This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Stanford University Libraries
3 6105 025 498 234

510.5
A673

e

ARCHIV

der

MATHEMATIK [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

J. A. Grunert.

[illegible]

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Dreizehnter Teil.

Leipzig.

Verlagsbuchhandlung,

[illegible]

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Dreizehnter Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

(H. Ehlers & Co.)

1895.

162511

Inhalts-Verzeichniss

des dreizehnten Teils.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Geschichte der Mathematik und Physik.		
XXI.	Mathematisch-Geschichtliches aus dem Codex latinus Monacensis No. 14908. Von M. Curtze . . .	IV	388
	Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.		
I.	Beweis des Fermat'schen Satzes von der Unmöglichkeit der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für rationale Zahlen $n > 2$. Von G. Korneck	I	1
XIV.	Nachtrag	III	263
X.	Ueber Transformation und numerische Lösung der kubischen Gleichung. Von R. Hoppe	I	95
X.	Bemerkungen zur Summenformel für die Potenzreihe der natürlichen Zahlen. Von Stephan Glaser.	I	106
XII.	Ueber die Potenzen der Zahlen von der Form $xn \mp 1$. Von G. Speckmann	II	216
XII.	Potenzcongruenzen. Von G. Speckmann . . .	II	217
XII.	Congruenzen. Von G. Speckmann	II	219
XIX.	Fundamentalauflösungen der Pell'schen Gleichung. Von G. Speckmann	III	327
XIX.	Ueber die Auflösung der Pell'schen Gleichung. Von G. Speckmann	III	330

Nr. der Abhandlung		Heft.	Seite.
XIX.	Ueber die Zerlegung der Zahlen von der Form $4n+1$ in zwei Quadrate. Von G. Speckmann . . .	III	333
XIX.	Ueber die Reihensysteme, deren Modul ein Vielfaches von 6 ist. Von G. Speckmann . . .	III	334
XIX.	Lösung der von Loyd in der Londoner „Tit Bits“ gestellten Preisaufgabe. Von Benz	III	336
XXII.	Zwei algebraische Aufgaben mit Lösungen. Von Amthor und C. Davids	IV	407

Integralrechnung.

XVII.	Zur fünften Form der Integrabilitätsbedingungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Von Ernst Schultz	III	311
XVIII.	Zu Bour's Methode der Integration eines Systems simultaner partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, Von Ernst Schultz	III	316

Geometrie der Ebene.

II.	Dreizehn Auflösungen des Malfatti'schen Problems. Von C. Davids	I	10
VI.	Ueber successive Fusspunktspolygone. Von H. Schotten	I	65
VIII.	Ueber Formelpaare der mechanischen Quadratur. Von Rudolf Skutsch	I	78
IX.	Ueber eine Behandlung einer Curve 4. Ordnung und der allgemeinen Curve 3. Ordnung mittelst Kegelschnittcoordinaten. Von Hermann Oppenheimer	I	84
X.	Ueber eine Erzeugungsweise der Hyperbel als Enveloppe. Von Wilhelm Rulf	I	90
X.	Neuer Satz über die Cykloide. Von Wilhelm Rulf	I	92
X.	Entwickelung von $\sin E_n(\varepsilon, \varphi)$ in eine nach Potenzen von $\sin\varphi_n$ fortschreitende Reihe. Von C. Benz	I	102
X.	Recursionsformel zur Rectification der Ellipse. Tl. VIII. S. 378. Von C. Benz	I	104

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
X.	Reihe zur numerischen Berechnung eines Ellipsenbogens. Von C. Benz	I	105
XI.	Anwendung eines Abbildungsprincips zur Untersuchung von Curven zweiten Grades. Von Stephan Glaser	II	113
XII.	Ueber eine allgemeine Eigenschaft der Curven der reciproken Ordinaten. Von Wilhelm Rulf . .	II	210
XII.	Ueber ebene zusammenhängende Liniengebilde. Von O. Steinert	II	220
XV.	Anwendungen des Ameseder'schen Nullsystems. Von Hermann Oppenheimer	III	263
XVI.	Eigenschaften der imaginären Brennpunkte der Centralkegelschnitte. Von Franz Rogel . . .	III	297
XIX.	Bemerkungen zu den aus einer Curve abgeleiteten Curven. Von Wilhelm Rulf	III	324
	Geometrie des Raumes.		
VII.	Einaxige Polyeder von kleinster Oberfläche bei constantem Inhalt. Von R. Hoppe	I	69
X.	Projective Lösung einer Aufgabe über die Schraubenlinie. Von Wilhelm Rulf	I	89
X.	Bedingung, unter der 4 von einem Punkte aus gesehene Punkte in einem Raume liegen. Von R. Hoppe	I	100
XIII.	Ueber den Flächen- und Rauminhalt der durch Curven und Flächen erzeugten Flächen- und Raumgrössen. Von Chr. Nehls	III	225
XX.	Fortsetzung	IV	337
XXIII.	Einige quantitative Fragen über 12 Kugeln, die eine Kugel berühren. Von R. Hoppe	IV	439
	Trigonometrie.		
XII.	Zur Trisection des Winkels. Von Ernst Fischer	II	210
XII.	Dreiecksätze. Von F. Specht	II	220
XII.	Herleitung der trigonometrischen Formel für die Tangente des halben Winkels aus den Seiten des Dreiecks. Von F. Specht	II	223

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite:
XXIII.	Ein Beitrag zur Lösung des Problems der Dreiteilung des Winkels. Von Lothar von Köppen.	IV	446

Mechanik.

IV.	Untersuchungen über die Attraction zweier homogenen Körper. Von Emil Liebenthal . . .	I	39

Erd- und Himmelskunde.

III.	Ueber die Verspätung des Flutmaximums inbezug auf die Culmination des Mondes. Von C. Benz	I	35
V.	Eine Hypothese über das Gesetz der Dichtigkeit im Innern der Erde. Von Emil Oekinghaus . .	I	55

Litterarische Berichte.

IL. Kaiser (Bahn. d. Weltansch.) Padé (Alg.) Macfarlane (alg. of phy. — imag. trig. fct. — fund. th. gen. f. space. — lang.) Stringham (alg.) Schotten (Plan. II.) Kerz Schalablag.) Flor (Quadr. Kreis) Bergbohm (Int. 1. II.) Ozegowski (Qudr. Krs.) Kloock (Ar.) Karagianades (nicht eukl. G.) Frege (Ar.) E. R. Müller (4st. Log.) Rohrbach (4st. Log.) Schnellinger (5st. Log.) Ligowski (naut. Taf.) Mayer (Mech. d. Wärm.) Wiedemann (Elektr.) Lang (Phys.) Waals (Capill) Braun (el. Kraftübertr,) Hovestadt (Masse) Pierce (electr. str.) C. Neumann (math. ph.)

L. Lejeune Dirichlet (Zahlenth) Scheffler (S. Zahlenth.) Durège (Fct. Compl.) Stolz (Diff. u. Int.) Gravelius (Diff.) Kronecker (Int.) Macfarlane (ell. and hyp. an.) Goursat (part. Diff.) Méray, (an. inf) Puchberger (Diff) Heffter (lin. Diff.) Lie (Gruppe) Oltramare (calc. gén.) d'Ocagne (cal. simpl.) Deter (Diff. u. Int.) Bachmann (Zahlenth. II.) Laska (Fct. Th.)

LI. Foth (Ar. — Geom.) Holzmüller (El. Math.) Schwering u. Krimphoff (eb. Geom.) Schering (Stcr. — anal.

G.) Lengauer (eb. Geom.) Lieber u. Lühmann (Trig.) Rumpen u. Blind (Plan. — Trig. — Ster.) Roeder (Coord. Kegschn.) Sickenberger (el. Math. II.) Martus (Geom.) Wrobel (Ster.) Rohn u. Papperitz (darst. G.) Sachs (eb. Geom.)

LII. Schlotke (darst. G.) Hermes (Phys.) Börner (Phys.) Pieper (Phys.) Schubert (Aufg. f. Gymn. — f. Realsch. — Res.) Bussler (Ueb.) Lieber u. Köhler (Aufg. — Lös.) Laisant (probl.) Adam (Aufg. plan,) Schlotke (an. Geom.) E. R. Müller (Aufg. plan.) Saint-Germain (exerc. méc.) Jordan (trig. — geod. Taf.) Kämpfe (Taf. f. ein best. Int.) Thannabaur (Rent. — Taf.) Günther (math. Geogr.) Weidefeld (math. Geogr.) Saubert Erdmagn.) Lambert (Karten.) Lagrange u. Gauss (Karten.) Littrow (Kal. 1895). Bureau des longitudes (Annuaire 1895).

I.

Beweis des Fermat'schen Satzes von der Unmöglichkeit der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für rationale Zahlen und $n > 2$.

Von

G. Korneck,

Oberlehrer am Progymnasium zu Kempen (Posen).

Vorbemerkung.

Fermat hat auf den Rand des von ihm benutzten Exemplars von Diophants Arithmetik zur 8ten Aufgabe des zweiten Buches, die von der Darstellung einer Quadratzahl als Summe zweier Quadrate handelt, folgende Bemerkung geschrieben: „Dagegen ist es ganz unmöglich, einen Kubus in zwei Kuben, ein Biquadrat in zwei Biquadrate und allgemein irgend eine Potenz ausser dem Quadrat in zwei Potenzen von demselben Exponenten zu zerfällen. Hierfür habe ich einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt; aber der Rand ist zu klein, ihn zu fassen". (Wertheim, Uebersetzung des Diophant Seite 52).

Der erwähnte Beweis findet sich in Fermats Werken nirgends vor, und alle Versuche, die obige Behauptung allgemein zu beweisen waren bisher vergeblich.

In Folgendem wird nun ein solcher Beweis geliefert.

§ 1.

Wir nehmen an, es gebe zwei rationale in den kleinsten Zahlen ausgedrückte Brüche $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ von der Beschaffenheit, dass die Summe

ihrer $n$ten Potenzen wieder eine $n$te Potenz z^n sei. Die Nenner c und d mögen, falls sie nicht relativ prim sind, den gemeinsamen Teiler f haben:

$$c = ef, \quad d = fg$$

alsdann muss der den Wert z darstellende Bruch den Nenner efg haben. Man hat also:

$$\left(\frac{a}{cf}\right)^n + \left(\frac{b}{fg}\right)^n = \left(\frac{h}{efg}\right)^n$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $(cfg)^n$, so erhält man

$$(ag)^n + (be)^n = h^n$$

ag, be, h sind nun ganze Zahlen; wenn also die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

für rationale gebrochene Zahlen möglich ist, so muss sie auch für ganze Zahlen möglich sein. Wir können deshalb bei der weitern Untersuchung für x, y, z ganze Zahlen voraussetzen.

§ 2.

Hätten in der Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

zwei der Zahlen den gemeinsamen Teiler t, so müsste auch die dritte Zahl durch t teilbar sein, und der Factor t^n könnte durch Division entfernt werden.

Daraus folgt, dass entweder alle 3 Zahlen x, y, z durch n unteilbar sind, oder dass eine durch n teilbar ist, und die beiden andern unteilbar sind.

§ 3.

Wir beweisen nun zunächst folgenden Satz:

„Sind n und k relative Primzahlen und durch keine Quadrat-„zahl ausser 1 teilbar, so ist die Gleichung

$$nx^2 + ky^2 = z^n$$

„bei ungeradem n in ganzen Zahlen lösbar und jeder Wert von x „ist durch n teilbar."

Beweis: Wenn

$$nx^2 + ky^2 = z^n$$

so ist auch

$$\sqrt[n]{nx^2+ky^2} = z \quad \text{oder}$$

$$\sqrt[n]{x\sqrt{n}+y\sqrt{-k}} \cdot \sqrt[n]{x\sqrt{n}-y\sqrt{-k}} = z$$

Da jede Wurzel einer complexen Zahl ebenfalls eine complexe Zahl ist, so kann man setzen

$$\sqrt[n]{x\sqrt{n}\pm y\sqrt{-k}} = \alpha \pm \beta i$$

und man erhält

1) $x\sqrt{n} \pm y\sqrt{-k} = (\alpha \pm \beta i)^n$ und

2) $\alpha^2+\beta^2 = z$

Führt man in Gleichung 1) die Potenzirung aus und setzt die reellen Teile der beiden Seiten sowie die imaginären gleich, so ergiebt sich:

$$x\sqrt{n} = \alpha^n - n_2\alpha^{n-2}\beta^2 + n_4\alpha^{n-4}\beta^4 - n_6\alpha^{n-6}\beta^6 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\alpha\beta^{n-1}$$

$$y\sqrt{k} = n\alpha^{n-1}\beta - n_3\alpha^{n-3}\beta^3 + n_5\alpha^{n-5}\beta^5 - n_7\alpha^{n-7}\beta^7 + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \beta^n$$

Setzt man nun

$$\alpha = \lambda\sqrt{n} \quad \text{und} \quad \beta = \varphi\sqrt{k}$$

so erhält man die 3 Gleichungen:

3) $$x = n\lambda\left[n^{\frac{n-3}{2}}\lambda^{n-1} - n_2 n^{\frac{n-5}{2}} k\lambda^{n-3}\varphi^2 + n_4 n^{\frac{n-7}{2}} k^2\lambda^{n-5}\varphi^4 - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{\frac{n-1}{2}}\varphi^{n-1}\right]$$

4) $$y = \varphi\left[n_1 n^{\frac{n-1}{2}}\lambda^{n-1} - n_3 n^{\frac{n-3}{2}} k\lambda^{n-3}\varphi^2 + n_5 n^{\frac{n-5}{2}} k^2\lambda^{n-5}\varphi^4 - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{\frac{n-1}{2}}\varphi^{n-1}\right]$$

5) $z = n\lambda^2 + k\varphi^2$

Wir haben also die 3 Unbekannten x, y, z als Functionen der beiden Unbekannten λ und φ dargestellt. Alle möglichen ganzen

(positiven und negativen) Werte von λ und φ liefern für x, y, z ganze Zahlen, und wie Gleichung 3) zeigt, ist dann x durch n teilbar.

Da aber möglicherweise auch gebrochene oder irrationale Werte von λ und φ für x, y, z ganze Zahlen ergeben, so ist zu untersuchen, ob dann ebenfalls x durch n teilbar sein muss.

Man setze

$$\lambda = \frac{\gamma}{\delta\varepsilon} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{\xi}{\varepsilon\eta}$$

(δ, ε, η ganze Zahlen, δ und η relativ prim), so geht Gleichung 5) über in

$$z\delta^2\varepsilon^2\eta^2 = n\gamma^2\eta^2 + k\xi^2\delta^2$$

Es müsste also n durch δ^2 und k durch η^2 teilbar sein. Nach Voraussetzung sind aber n und k durch keine Quadratzahl ausser 1 teilbar, folglich ist $\delta = \eta = 1$. Man erhält also:

$$z = \frac{n\gamma^2}{\varepsilon^2} + \frac{k\xi^2}{\varepsilon^2}$$

Wäre nun $\varepsilon = n\vartheta$ möglich, so hätte man

$$\lambda = \frac{\gamma}{n\vartheta}, \quad n\lambda = \frac{\gamma}{\vartheta}$$

und in Gleichung 3) wäre x nicht durch n teilbar. Man erhält aber

$$z = \frac{\gamma^2}{n\vartheta^2} + \frac{k\xi^2}{n^2\vartheta^2}$$

folglich

$$zn^2\vartheta^2 = n\gamma^2 + k\xi^2$$

und es müsste k durch n teilbar sein. Da dies nach Voraussetzung unmöglich ist, so kann ε kein Vielfaches von n sein, und es bleibt also x auch für

$$\lambda = \frac{\gamma}{\varepsilon}, \quad \varphi = \frac{\xi}{\varepsilon}$$

durch n teilbar, und zwar auch wenn γ und ξ irrational sind.

§ 4.

Aus $x^n + y^n = z^n$ folgt

$$x^n = z^n - y^n = (z-y)(z^{n-1} + z^{n-2}y + \ldots + zy^{n-2} + y^{n-1})$$

Die Division von

$$S = z^{n-1} + z^{n-2}\,y + z^{n-3}y^2 + \ldots + z\,y^{n-2} + y^{n-1}$$

durch $z-y$ und S ergiebt ny^{n-1} als Rest. Haben also $z-y$ und S einen gemeinsamen Teiler, so muss auch der Rest ny^{n-1} durch denselben teilbar sein. Da aber x und y relativ prim sind, so kann der gemeinsame Teiler von $x-y$ und ny^{n-1} und deshalb auch von S nur n sein.

Wenn also in der Gleichung

$$(z-y)S = x^n$$

die Zahl x durch n unteilbar ist, so haben $z-y$ und S keinen gemeinsamen Factor, und infolge dessen muss sowol $z-y$ als auch S eine $n$te Potenz sein.

§ 5.

Es sei nun x durch n nicht teilbar, $z-y = q^n$, $S = r^n$, so ist

$$x = qr$$

Ist ferner $z+y = p$, so hat man

$$2z = p+q^n, \quad 2y = p-q^n, \quad 2x = 2qr$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung

$$(2z)^n - (2y)^n = (2x)^n$$

so erhält man:

$$(p+q^n)^n - (p-q^n)^n = (2qr)^n = 2^n q^n r^n$$

Für eine ungerade Primzahl n erhält man durch Ausführung der Potenzirung und Division durch $2q^n$ (wenn $n_\alpha = n\varphi_\alpha$):

$$np^{n-1} + \varphi_3 np^{n-3}q^{2n} + \varphi_5 np^{n-5}q^{4n} + \ldots + \varphi_2 npq^{n(n-3)} + q^{n(n-1)} = 2^{n-1}r^n$$

Dafür kann man schreiben

$$np^{n-1} + [\varphi_3 np^{n-3} + \varphi_5 np^{n-5}q^{2n} + \ldots + \varphi_2 npq^{n(n-5)} + q^{n(n-3)}]q^{2n} = 2^{n-1}r^n$$

Alle Glieder der eingeklammerten Summe sind mit Ausnahme von $q^{n(n-3)}$ durch n teilbar; folglich ist die Summe selbst nicht durch n teilbar. Bezeichnen wir diese Summe mit ku^2, so dass $u = 1$, wenn die Summe keinen quadratischen Factor enthält, so erhalten wir die Gleichung

$$np^{n-1} + ku^2q^{2n} = 2^{n-1}r^n$$

in welcher k weder durch n noch durch einen quadratischen Factor teilbar ist.

Multiplicirt man diese Gleichung mit 2^{n+1}, so ergiebt sich:

$$2^{n+1} n p^{n-1} + 2^{n+1} k u^2 q^{2n} = 2^{2n} r^n = (4r)^n$$

Setzt man

$$2^{\frac{n+1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}} = a, \quad 2^{\frac{n+1}{2}} u q^n = b, \quad 4r = c$$

so erhält man

$$n a^2 + k b^2 = c^n$$

Weil nun k weder durch n noch durch eine Quadratzahl teilbar ist, so würden die Zahlen a, b, c eine ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$n x^2 + k y^2 = z^n$$

ergeben, und es müsste nach § 3. a durch n teilbar sein.

Da $a = 2^{\frac{n+1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}}$, so müsste also

$$p = z + y$$

durch n teilbar sein. Da in der ganzen Entwickelung dieses § die Vertauschung von y und x nichts ändert, falls auch y als unteilbar durch n angenommen wird, so müsste auch $z + x$ durch n teilbar sein.

§ 6.

Weil in der Gleichung

$$x^n + y^n = z^n \qquad x + y > z$$

sein muss, so kann man setzen

$$x + y = z + s \quad \text{und} \quad (x+y)^n = (z+s)^n$$

Man erhält also

$$x^n + n x^{n-1} y + \varphi_2 n x^{n-2} y^2 + \varphi_3 n x^{n-3} y^3 + \ldots + \varphi_2 n x^2 y^{n-2} + n x y^{n-1} + y^n$$
$$= z^n + n z^{n-1} s + \varphi_2 n z^{n-2} s^2 + \varphi_3 n z^{n-3} s^3 + \ldots$$
$$+ \varphi_2 n z^2 s^{n-2} + n z s^{n-1} + s^n$$

Da nun

$$x^n + y^n = z^n$$

so ergiebt sich

$$(x^{n-1} y - z^{n-1} s) + \varphi_2 (x^{n-2} y^2 - z^{n-2} s^2) + \varphi_3 (x^{n-3} y^3 - z^{n-3} s^3) + \ldots$$
$$+ \varphi_2 (x^2 y^{n-2} - z^2 s^{n-2}) + (x y^{n-1} - z s^{n-1}) = \frac{s^n}{n}$$

Es muss also

$$s = x + y - z$$

durch n teilbar sein.

§ 7.

Wir erhalten also bei der Voraussetzung, dass keine der Zahlen x, y, z durch n teilbar sei, für eine ungerade Primzahl n

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & z+y \\ 2) & z+x \\ 3) & x+y-z \end{array}\right\} \text{ durch } n \text{ teilbar}$$

Folglich müsste

$$(z+y)+(z+x)-(x+y-z)=3z$$

durch n teilbar sein. Für $n > 3$ wäre also z und infolge von 1) und 2) auch y und x gegen die Voraussetzung durch n teilbar.

Infolge dieses Widerspruchs ist die Gleichung

$$x^n+y^n=z^n$$

für 3 ganze durch n unteilbare Zahlen unmöglich, wenn n eine Primzahl und grösser als 3 ist.

Für $n=3$ ist die Annahme, dass alle 3 Zahlen durch 3 unteilbar seien, nicht möglich; denn es ist

$$x+y-z=3u, \quad \text{also}$$

$$x+y=z+3u, \quad \text{folglich} \quad (x+y)^3=(z+3u)^3$$

Daraus folgt

$$xy(x+y)=3u(z^2+9zu+9u^2)$$

Es muss also entweder x oder y oder $x+y$ und damit z durch 3 teilbar sein.

§ 8.

Setzen wir aber eine der Zahlen als teilbar durch n, die beiden andern als unteilbar voraus, so muss in jedem Falle eine der Zahlen x und y unteilbar sein. Es sei entweder y oder z durch n teilbar, x also unteilbar; dann ist nach § 5. $z+y$ durch n teilbar, und da entweder z oder y nach Voraussetzung teilbar ist, so müssten beide Zahlen z und y und deshalb auch x durch n teilbar sein.

Es kann also für eine ungerade Primzahl n die Gleichung

$$x^n+y^n=z^n$$

auch nicht möglich sein, wenn eine der Zahlen als durch n teilbar vorausgesetzt wird.

§ 9.

Da es also keine rationalen Werte giebt, welche der Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

genügen, wenn n eine Primzahl und grösser als 2 ist, so ist die Gleichung auch für jeden Exponenten unmöglich, der ein Vielfaches einer solchen Primzahl ist; denn die Gleichung

$$x^{n\alpha} + y^{n\alpha} = z^{n\alpha}$$

kann geschrieben werden

$$(x^\alpha)^n + (y^\alpha)^n = (z^\alpha)^n$$

und da es für x^α, y^α, z^α keine rationalen Werte giebt, so kann es auch für x, y, z keine geben.

Es bleiben also noch die Exponenten, welche Potenzen von 2 sind, zu betrachten. Da sie durch 4 teilbar sind und die Gleichung

$$x^{4\alpha} + y^{4\alpha} = z^{4\alpha}$$

geschrieben werden kann

$$(x^\alpha)^4 + (y^\alpha)^4 = (z^\alpha)^4$$

so bleibt nur noch die Unmöglichkeit von

$$x^4 + y^4 = z^4$$

zu beweisen.

§ 10.

Soll die Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^4 \quad \text{oder} \quad (x^2)^2 + (y^2)^2 = (z^2)^2$$

für ganze Zahlen gelten, so kann man setzen

$$x^2 = p^2 - q^2, \quad y^2 = 2pq, \quad z^2 = p^2 + q^2$$

Aus

$$x^2 + q^2 = p^2 \quad \text{und} \quad z^2 = p^2 + q^2$$

folgt, dass p und z ungerade, q gerade und deshalb x ungerade sein muss. Da $p > x$; $z > p$ und die Differenzen $p - x$, $z - p$ gerade sein müssen, so kann man setzen

$$p - x = 2u, \quad z - p = 2v$$

folglich

$$x = p - 2u, \quad z = p + 2v$$

Man erhält also

$$x^2 = p^2 - 4pu + 4u^2 = p^2 - q^2 \quad \text{und} \quad z^2 = p^2 + 4pv + 4v^2 = p^2 + q^2$$

Daraus folgt

$$4pu - 4u^2 = q^2 \quad \text{und} \quad 4pv + 4v^2 = q^2$$

Mithin ist

$$pu - u^2 = pv + v^2$$

und deshalb

$$p = \frac{u^2 + v^2}{u - v}$$

Da p eine ganze Zahl sein soll, und $u^2 + v^2$ nicht durch $u - v$ teilbar ist, so muss

$$u - v = 1, \quad \text{also} \quad u = 1 + v$$

sein. Folglich ist

$$p = 1 + 2v + 2v^2$$

und man erhält

$$q^2 = 4v(1 + 3v + 2v^2) = 4v(v+1)(2v+1) = 2v(2v+1)(2v+2)$$

Das Product der 3 aufeinander folgenden Zahlen $2v$, $2v+1$, $2v+2$ kann aber niemals ein Quadrat sein; folglich ist q irrational und wegen $y^2 = 2pq$ auch y.

Daher ist die Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^4$$

für rationale Zahlen unmöglich.

„Die Fermat'sche Behauptung, dass keine Potenz mit Ausnahme „der zweiten die Summe zweier Potenzen desselben Grades sein „kann, ist somit für alle möglichen Fälle bewiesen."

II.

Dreizehn Auflösungen des Malfatti'schen Problems.

Von

C. Davids.

Aufgabe. „In ein gegebenes Dreieck *DEF* 3 Kreise zu be-„schreiben, so dass jeder dieser Kreise 2 Seiten des Dreiecks berührt „und die 3 Kreise sich auch gegenseitig berühren".

I. Auflösung.

(Vervollständigung eines von Crelle mitgeteilten Versuchs einer Auflösung).

Es seien die Halbmesser der gesuchten Kreise x, y, z, Figur 9. Man hat nun (wenn $\mathfrak{R}$ Inkreisradius, l, m, n Projectionen der Eckradien u, v, w auf die Seiten d, e, f)

$$\mathfrak{T}'\mathfrak{U} = d - E\mathfrak{T}' - F\mathfrak{U} = d - \frac{my}{\mathfrak{R}} - \frac{nz}{\mathfrak{R}}$$

aber auch

$$\mathfrak{T}'\mathfrak{U} = \sqrt{MN^2 - (z-y)^2} = \sqrt{(y+z)^2 - (z-y)^2} = 2\sqrt{yz}$$

also

$$\left.\begin{aligned} 1) \ldots\ & d\mathfrak{R} = my + nz + 2\mathfrak{R}\sqrt{yz} \\ \text{ebenso} \\ & e\mathfrak{R} = lx + nz + 2\mathfrak{R}\sqrt{xz} \\ & f\mathfrak{R} = lx - my + 2\mathfrak{R}\sqrt{xy} \end{aligned}\right\} \text{Grundgleichungen}$$

Da nun

$$u^2 md = v^2 le$$

ist (Form. 175); so multiplicire man die erste Gleichung mit $u^2 m$ und die zweite Gleichung mit $v^2 l$; man erhält:

$$u^3 md\,\mathfrak{R} = u^2 m(my + nz + 2\mathfrak{R}\sqrt{yz})$$
$$v^2 le\,\mathfrak{R} = v^2 l(lx + nz + 2\mathfrak{R}\sqrt{xz})$$

also

2) . . . $u^2 m^2 y + u^2 mnz + u^2 m 2\mathfrak{R}\sqrt{yz} = v^2 l^2 x + v^2 lnz + 2v^2 l\mathfrak{R}\sqrt{xz}$

Es handelt sich jetzt darum, die z in dieser Gleichung so zu verteilen, dass auf beiden Seiten die Quadratwurzel ausgezogen werden kann. Wenn die z der rechten Seite auf die linke Seite der Gleichung gebracht werden, so ist der Coefficient alsdann

$u^2 mn - v^2 ln = \mathfrak{R}^2 fe - \mathfrak{R}^2 fd = \mathfrak{R}^2 u^2 - \mathfrak{R}^2 v^2$ (Formel 179, 186)

Hierdurch verändert sich die Gleichung 2) in

3) . . . $u^2 m^2 y + \mathfrak{R}^2 u^2 z + 2\mathfrak{R}u^2 m\sqrt{yz} = v^2 l^2 x + \mathfrak{R}^2 v^2 z + 2\mathfrak{R}v^2 l\sqrt{xz}$

Also

$$um\sqrt{y} + \mathfrak{R}u\sqrt{z} = vl\sqrt{x} + \mathfrak{R}v\sqrt{z}$$

Oder

4) . . . . $u(m\sqrt{y} + \mathfrak{R}\sqrt{z}) = v(l\sqrt{x} + \mathfrak{R}\sqrt{\varepsilon})$

Ebenso

$$v(n\sqrt{z} + \mathfrak{R}\sqrt{x}) = w(m\sqrt{y} + \mathfrak{R}\sqrt{x})$$
$$w(l\sqrt{x} + \mathfrak{R}\sqrt{y}) = u(n\sqrt{z} + \mathfrak{R}\sqrt{y})$$

Wird nun die erste dieser Gleichungen mit w und die dritte mit v multiplicirt; so erhält man

$$uwm\sqrt{y} + (uw - vw)\mathfrak{R}\sqrt{z} = vwl\sqrt{x}$$
$$uvn\sqrt{z} + (uv - vw)\mathfrak{R}\sqrt{y} = vwl\sqrt{x}$$

also

5) . . . $(muw + vw\mathfrak{R} - uv\mathfrak{R})\sqrt{y} = (nuv + vw\mathfrak{R} - uw\mathfrak{R})\sqrt{z}$

$$vwn = umn - \mathfrak{R}^2 u$$
$$(mw + mn - \mathfrak{R}v - \mathfrak{R}^2)\sqrt{y} = (nv + mn - \mathfrak{R}w - \mathfrak{R}^2)\sqrt{z}$$

Ebenso

6) . . . $(lv + lm - \mathfrak{R}u - \mathfrak{R}^2)\sqrt{x} = (mu + lm - \mathfrak{R}v - \mathfrak{R}^2)\sqrt{y}$

Oder

$$[u(m + v - \mathfrak{R}) - \mathfrak{R}(\mathfrak{R} + u - l)]\sqrt{x}$$
$$= [m(l + u - \mathfrak{R}) - \mathfrak{R}(\mathfrak{R} + v - m)]\sqrt{y}$$

Nun ist

$$\Re+u-l : \Re+v-m = l(m+v-\Re) : m(l+u-\Re)$$

also auch

$$= l(m+v-\Re) - \Re(n+u-l) : m(l+u-\Re) - \Re(\Re+v-m)$$

Daher ergiebt sich aus Gleichung 6):

7) . . . $(\Re+u-l)\sqrt{x} = (\Re+v-m)\sqrt{y} = (\Re+w-n)\sqrt{z}$

Anmerkung 1. Man kann die erste Grundgleichung auch mit

$$e = \frac{muw}{\Re v}$$

und die zweite mit

$$d = \frac{lvw}{\Re u}$$

multipliciren; dadurch erhält man ebenfalls die Gleichung 2).

Anmerkung 2. Setzt man in die Gleichung 5)

$$muw = \Re ve \quad \text{und} \quad nuv = \Re wf$$

so kommt

$$v(e+w-u)\sqrt{y} = w(f+v-u)\sqrt{z}$$
$$w(f+u-v)\sqrt{z} = u(d+w-v)\sqrt{x}$$
$$u(d+v-w)\sqrt{x} = v(e+u-w)\sqrt{y}$$

Um nun auf Gleichung 7) zu kommen, benutze man Formel 373.

Anmerkung 3. Die Gleichung 7) findet sich in einem Buche von Crelle (aber nicht abgeleitet). (Mathematische Aufsätze und Bemerkungen, Berlin 1821). Eine bessere Ableitung der Gleichung 7) aus 4) folgt in Anmerkung 13.

Von nun an können verschiedene Wege eingeschlagen werden.

α. Erstes Verfahren.

$$d\Re = my+nz+\Re\sqrt{yz}+\Re\sqrt{yz} \tag{1}$$

$$d\Re = my+nz+\Re\left(\frac{\Re+v-m}{\Re+w-n}\right)y+\Re\left(\frac{\Re+w-n}{\Re+v-m}\right)z \tag{7}$$

$$d\Re = \left(\frac{mv-mn+\Re^2+\Re v}{\Re+w-n}\right)y+\left(\frac{nv-mn+\Re^2+\Re w}{\Re+v-m}\right)z$$

$$d\Re = \frac{[\Re(\Re+v-m)+m(\Re+w-n)]}{\Re+w-n} \cdot \frac{(\Re+u-l)^2}{(\Re+v-m)^2}x + \frac{[\Re(\Re+w-n)+n(\Re+v-m)]}{\Re+v-m} \cdot \frac{(\Re+u-l)^2}{(\Re+w-n)^2}x \qquad (7)$$

$$d\Re = \frac{[\Re(\Re+v-m)+\frac{(\Re+v-m)(v+m-\Re)}{2\Re}.(\Re+w-n)](\Re u+u-l)^2x}{(\Re+w-n)(\Re+v-m)^2} + \frac{[\Re(\Re+w-n)+\frac{(\Re+w-n)(w+n-\Re)}{2\Re}(\Re+v-m)] \cdot (\Re+u-l)^2x}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)^2}$$

$$2d\Re^2 = \frac{[2\Re^2+(v+m-\Re)(\Re+w-n)] \cdot (\Re+u-l)^2x}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)} + \frac{[2\Re^2+(w+n-\Re)(\Re+v-m)] \cdot (\Re+u-l)^2x}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}$$

$$2dR^2 = \frac{[2\Re^2+2\Re m+2\Re n-2mn+2vw}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}(\Re+u-l)^2x$$

$$d\Re^2 = \frac{[\Re^2+\Re d-\frac{\Re^2(l+m+n)}{l}+\frac{\Re ud}{l}] \cdot (\Re+u-l)^2x}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}$$

$$dl\Re^2 = \left[\frac{\Re^2 l+\Re dl-\Re^2 l-\Re^2 d+\Re vd}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}\right] \cdot (\Re+u-l)^2x$$

$$l\Re = \frac{[l-\Re+u] \cdot (\Re+u-l)^2x}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}$$

$$\frac{(\Re+u-l)(u+l-\Re)\Re}{2\Re} = \frac{(u+l-\Re)(\Re+u-l)^2x}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}$$

$$8) \ldots x = \frac{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}{2(\Re+u-l)} .$$

Nach dieser Gleichung kann leicht eine Construction ausgeführt werden. (Erste Constr.)

β. Zweites Verfahren.

Wird von der Summe der zweiten und dritten Grundgleichung die erste subtrahirt, so erhält man:

$$9) \ldots (e+f-d)\Re = 2lx+2\Re\sqrt{xy}+2\Re\sqrt{xz}-2\Re\sqrt{yz}$$

$$\sqrt{xy} = \frac{\Re+u-l}{\Re+v-m}x \qquad (7)$$

$$\sqrt{xz} = \frac{\Re+u-l}{\Re+w-n}x$$

$$\sqrt{yz} = \frac{(\Re+u-l)^2}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}x$$

$$2l\Re = \left|2l+2\Re\left(\frac{\Re+u-l)}{\Re+v-m}\right)+2\Re\left(\frac{\Re+u-l}{\Re+w-n}\right)\right.$$
$$\left.-2\Re\frac{(\Re+u-l)^2}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}\right]x$$

$$l = \frac{(\Re+u-l)(\Re-u+l)}{2(u-l)}$$

$$10) \ldots \frac{(\Re-u+l)}{2(u-l)}\Re = \left[\frac{(\Re-u+l)}{2(u-l)}+\frac{\Re}{\Re+v-m}+\frac{\Re}{\Re+w-n}\right.$$
$$\left.-\frac{\Re(\Re+n-l)}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}\right]x$$

$$\Re(\Re-u+l)(\Re+v-m)(\Re+w-n) = \left\{\begin{array}{l}(\Re-u+l)(\Re+v-m)(\Re+w-n)\\+2\Re(u-l)(\Re+w-n)\\+2\Re(u-l)(\Re+v-m)\\-2\Re(u-l)(\Re+u-l)\end{array}\right\}x$$

oder

$$= \left\{\begin{array}{l}\Re^3\\+\Re^2(u+v+w)\\-\Re^2(l+m+n)\\+\Re(uv+uw+vw)\\-\Re(um+un+vl+vl+vn+wl+wm)\\+\Re(lm+ln+mn)\\+lvw+muw+uuv\\-umn-vln-wlm\\-uvw\\+lmn\\-2\Re(u-l)^2\end{array}\right\}x$$

Nun ist

$$\Re um+\Re un = \Re ud = lvw$$

daher heben sich die fünfte und siebente Reihe gegenseitig auf. Ferner ist

$$lmn = \Re^2(l+m+n)$$

und

$$\Re(lm+ln+mn) = \Re^3 + uvw \qquad \text{(F. 357)}$$

Die Vereinfachung ergiebt also

$$\left.\begin{aligned} \Re(\Re-u+l)(\Re+v-m)(\Re++-n) = \quad & 2\Re^3 \\ & +\Re^2(u+v+w) \\ & +\Re(uv+uw+vw) \\ & -(umn+vln+wlm \\ & \quad -2\Re(u-l)^2 \end{aligned}\right\} x$$

Ferner

$$wmn = \Re vw + \Re^2 u \qquad \text{(F. 199)}$$

also

$$umn+vln+wlm = \Re(uv+uw+vw)+\Re^2(u+v+w)$$

Also

$$\Re(\Re-u+l)(\Re+v-m)(\Re+w-n) = [2\Re^3-2\Re(u-l)^2]x$$

$$(\Re-u+l)(\Re+v-m)(\Re+w-n) = 2(\Re+u-l)(\Re-u+l)x$$

$$x = \frac{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}{2(\Re+u-l)}$$

γ. Drittes Verfahren.

Es werde hier von Gleichung 9) ausgegangen

$$2\Re l = 2lx + 2\Re\sqrt{xy} + 2\Re\sqrt{wz} - 2\Re\sqrt{yz}$$

$$x = \frac{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}{(\Re+u-l)}\sqrt{yz} \qquad (7)$$

$$2\Re l = 2l\frac{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}{(\Re+u-l)^2}\sqrt{yz} + 2\Re\frac{(\Re+w-n)}{\Re+u-l}\sqrt{yz} - 2\Re\sqrt{yz} \qquad (7)$$

$$+ 2\Re\frac{(\Re+v-m)}{\Re+u-l}\sqrt{yz}$$

$$11) \ldots (\Re+u-l)^2 2l\Re^2 = [2l(\Re+v-m)(\Re+w-n)$$

$$+2\Re(\Re+u-l)(\Re+v-m+\Re+w-n-(\Re+u-l))]\sqrt{yz}$$

$$2l - \frac{(\Re+u-l)(u+l-n)}{\Re}$$

$$(\Re+u-l)\cdot 2l\Re^2 = [(u+l-\Re)(\Re+v-m)(\Re+w-n)$$

$$+2\Re^2(\Re+v+w-u+l-m-n)]\sqrt{yz}$$

$$(\Re+u-l)\cdot 2l\Re^2 = [2\Re^2(u-v-w+l+m+n-\Re)$$

$$+2\Re^2(\Re+v+w-u+l-m \quad n)\sqrt{yz}$$

$$(\Re+u-l)2l\Re^2 = 4\Re^2 l\sqrt{yz}$$

12) . . . $2\sqrt{yz} = \Re+u-l$

Jetzt kann man durch Gleichung 7) ohne Mühe Gleichung 8) erhalten.

δ. Viertes Verfahren.

$$\frac{(\Re+u-l)\sqrt{x} = (\Re+v-m)\sqrt{y}}{(\Re+u-l)\sqrt{xy} = (\Re+v-m)y} \qquad (7)$$

Ebenso

$$(\Re+v-m)\sqrt{xy} = (\Re+u-l)x$$

subtrahirt

$$(u-l-v+m)\sqrt{xy} = (\Re+v-m)y-(\Re+u-l)x$$

$$(u-l-v+m)2\Re\sqrt{xy} = (2\Re^2+2\Re v-2\Re m)y-(2\Re^2+2\Re u-2\Re l)x$$

Nun ist

$$2\Re\sqrt{xy} = f\Re-lx-my \qquad (1)$$

also

$$(u-l-v+m]2\Re\sqrt{xy} = f\Re(u-v+m-l)-l(u-v+m-l)x$$
$$-m(u-v-x+m-l)y$$

Also

$$f\Re(u-v+m-l) = (2\Re^2+2\Re v-2\Re m)y-(2\Re^2+2\Re u-2\Re l)x$$
$$+m(u-v+m-l)y+l(u-v+m-l)x$$

$$f\Re(u-v+m-l)+(2\Re^2++2\Re u-2\Re l+l^2-lm-lu+lv)x$$
$$= (2\Re^2+2\Re v-2\Re m+m^2-lm-mv+mu)y$$

subtrahirt erste Glch.

$$\Re^2+2\Re u-2\Re l+u^2-2lu+l^2)x = \Re^2+2\Re v-2\Re m+v^2-2mv+m^2)y$$

$$f\Re(u-v+m-l)+(\Re^2-u^2-lm+lu+lv)x = (\Re^2-v^2-lm+mv+mu)y$$

$$u^2-\Re^2 = l^2 \qquad v^2-\Re^2 = m^2$$

$$f\Re(u-v+m-l+l(u+v-f)x = m(n+v-f)y$$

$$lx = \frac{f\Re(v-m)}{u+v-f} = my-\frac{f\Re(u-l)}{u+v-f}$$

Nun ist

$$\frac{\Re[u^2+fm+uv-f(u+v)]}{u+v-f} - \frac{\Re[v^2+fl+uv-f(u+v)]}{u+v-f} \quad \text{subtr.}$$

13) . . . $lx-\Re u = my-\Re v = nz-\Re w = \Re(u-v)$

Die dritte Grundgleichung ist

$$f\Re = lx + my + 2\Re\sqrt{xy}$$

$$\begin{matrix} lx = nz - \Re w + \Re u \\ my = nz - \Re w + \Re v \end{matrix} \quad (12) \qquad \sqrt{xy} = \frac{(\Re + w - n)^2}{(\Re + u - l)(\Re + v - m)}$$

$$f\Re = 2nz - 2\Re w + \Re u + \Re v + \frac{2\Re(\Re + w - n)^2 z}{(\Re + u - l)(\Re + v - m)}$$

$$\Re[f + 2w - u - v](\Re + u - l)(\Re + v - m)$$
$$= [2n(\Re + u - l)(\Re + v - m) + 2\Re(\Re + w - n)^2]z$$

$$\Re[f + 2w - u - v]\frac{(\Re + u - l)(\Re + v - m)}{\Re(\Re + w - n)}$$
$$= \left[\frac{2n(\Re + u - l)(\Re + v - m)}{\Re(\Re + w - n)} + 2(\Re + w - n)\right]z$$
$$= [2(l + m + n - \Re + w - u - v) + 2(\Re + w - n)]z]$$
$$= 2(f + 2w - u - v)z$$
$$z = \frac{(\Re + u - l)(\Re + v - m)}{2(\Re + w - n)}$$

Anmerkung 4. Von Gleichung 13) an kann man auch folgendermassen verfahren:

$$lx + my + 2\Re\sqrt{xy} = f\Re, \quad lx - \Re u = my - \Re v$$
$$lx - my = \Re u - \Re v$$
$$2lx + 2\Re\sqrt{xy} = \Re(f + u - v)$$
$$2lx = \Re(f + u - v) - 2\Re\sqrt{xy}$$

Ebenso

$$2my = \Re(f + v - u) - 2\Re\sqrt{xy}$$
$$4lmxy = \Re^2(f^2 - u^2 + 2uv - v^2) - 4\Re^2 f\sqrt{xy} + \Re^2 xy$$
$$(lm - \Re^2)xy + \Re^2 f\sqrt{xy} = \Re^2\left(\frac{f + u - v}{2}\right)\left(\frac{f + v - u}{2}\right)$$
$$lmn = \Re^2(l + m + n)$$
$$\left(\frac{l + m + n}{n}\Re^2 - \Re^2\right)xy + \Re^2 f\sqrt{xy}$$
$$= \Re^2\left(\frac{f + u - v}{2}\right)\left(\frac{f + v - u}{2}\right)$$
$$\frac{f}{n}xy + f\sqrt{xy} = \left(\frac{f + u - v}{2}\right)\left(\frac{f + v - u}{2}\right)$$

$$xy + n\sqrt{xy} = \frac{n}{f}\left(\frac{f^2 - u^2 - v^2 + 2uv}{4}\right)$$

$$n(u^2 + v^2) = n(2\Re^2 + l^2 + m^2)$$

$$2nuv = 2wf\Re$$

$$\sqrt{xy} + \frac{n}{2} = \sqrt{\frac{nf^2 - 2n\Re^2 - nl^2 - nm^2 + 2wf\Re}{4f} + \tfrac{1}{4}n^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2lmn - 2n\Re^2}{4f} + \tfrac{1}{2}\Re w + \tfrac{1}{4}n^2}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}\Re^2 + \tfrac{1}{2}\Re w + \tfrac{1}{4}n^2}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}\Re^2 + \tfrac{1}{2}\Re w + \tfrac{1}{2}w^2}$$

$$\sqrt{xy} + \frac{n}{2} = \tfrac{1}{2}\Re + \tfrac{1}{2}w$$

$$2\sqrt{xy} = \Re + w - n$$

Anmerkung 5. Die Gleichung 12) kann auch aus 7) und 8) abgeleitet werden. Es ist nämlich nach 7):

$$x = \frac{(\Re + v - m)(\Re + w - n)}{(\Re + u - l)^2}\sqrt{yz}$$

mit 8) verglichen ergiebt sich:

14) . . .
$$\begin{cases} 2\sqrt{yz} = \Re + u - l; & \text{ferner} \\ 2\sqrt{xy} = \Re + w - n \\ 2\sqrt{xz} = \Re + v - m \end{cases}$$

Anmerkung 6. Mit Hülfe dieser Gleichung 14) lassen sich nun noch wieder neue Gleichungen für x, y, z finden. Es ist

$$2\Re l = 2lx + 2\Re\sqrt{xy} + 2\Re\sqrt{xz} - 2\Re\sqrt{yz} \qquad (9)$$

Also

$$2\Re l = 2lx + \Re(\Re + w - n) + \Re(\Re + v - m) - \Re(\Re + u - l)$$

15) . . .
$$x = \frac{\Re}{2l}(l + m + n - \Re + u - v - w)$$

Nach dieser Gleichung lässt sich leicht eine Construction (die zweite) ausführen.

II. Auflösung.

$$d\Re = my + nz + 2\Re\sqrt{yz}$$
$$e\Re = lx + nz + 2\Re\sqrt{xz}$$

Die erste dieser Grundgleichungen mit e, die zweite mit d multiplicirt, giebt:

$$mey + nez + 2e\Re\sqrt{yz} = ldx + ndz + 2d\Re\sqrt{xz}$$
$$df - v^2 = ef - u^2$$

$$me(df - v^2)y + ne(df - v^2)z + 2e(df - v^2)\Re\sqrt{yz}$$
$$= ld(ef - u^2)x + nd(ef - u^2)z + 2d(ef - u^2)\Re\sqrt{xz}$$

$$me(df - v^2) = e^2v^2 \qquad ld(ef - u^2) = d^2u^2$$
$$ne(df - v^2) - nd(ef - u^2) = n(e - d)\,2\Re\Re = n(u^2d - v^2e)$$

$$e^2v^2y + ndu^2z + 2euvw\sqrt{yz} = d^2u^2x + nev^2z + 2duvw\sqrt{xz}$$

$$ndu^2 - nev^2 = w^2u^2 - w^2v^2$$

$$e^2v^2y + u^2w^2z + 2euvw\sqrt{yz} = d^2u^2x + v^2w^2z + 2duvw\sqrt{xz}$$

16) . . . $ev\sqrt{y} + uw\sqrt{z} = du\sqrt{x} + vw\sqrt{z}$

Die Coefficienten in dieser Gleichung sind zwar andere als die Coefficienten unter 3), aber das Verhältniss derselben ist in beiden Gleichungen dasselbe, und der weitere Verlauf dieser Auflösung kann also mit dem Verlauf der II. Auflösung leicht in Uebereinstimmung gebracht werden. Jedoch wird hier davon Abstand genommen und statt dessen ein anderer Weg eingeschlagen. Werden nach der Analogie noch zwei andere Gleichungen wie 16) gebildet, so hat man:

17) . . .
$$\begin{cases} ev\sqrt{y} + uw\sqrt{z} = du\sqrt{x} + vw\sqrt{z} \\ fw\sqrt{z} + vu\sqrt{x} = ev\sqrt{y} + wu\sqrt{x} \\ du\sqrt{x} + wv\sqrt{y} = fw\sqrt{z} + uv\sqrt{y} \end{cases}$$

Aus der ersten und dritten Gleichung folgt

$$v(e + w - u)\sqrt{y} = w(f + v - u)\sqrt{z} \quad \text{(vergleiche Anmerkung 2)}$$

Wird diese Gleichung in die erste Grundgleichung

$$d\Re = my + nz + 2\Re\sqrt{yz}$$

gesetzt, so kommt

$$d\Re = my + \frac{nv^2(e + w - u)^2}{w^2(f + v - u)^2}y + 2\Re\sqrt{y}\,\frac{v(e + w - u)}{w(f + v - u)}\sqrt{y}$$

$$d\Re = \left[m + n\frac{v^2(e+w-u)^2}{w^2(f+v-u)^2} + 2\Re\frac{v}{w}\frac{(f+v-u)(e+w-u)}{(f+v-u)^2}\right]y$$

$$y = \frac{d\Re w^2(f+v-u)^2}{mw^2(f+v-u)^2 + nv^2(e+w-u)^2 + 2\Re vw(f+v-u)(e+w-u)}$$

$$mw^2 = \frac{de\Re^2}{l}, \quad nv^2 = \frac{df\Re^2}{l} \quad 2\Re vw = \frac{2du\Re^2}{l}$$

18) . . .
$$\begin{cases} y = \dfrac{lw^2(f+v-u)^2}{\Re[e(f+v-u)^2 + f(e+w-u)^2 + 2u(f+v-u)(e+w-u)]} \\ \text{Ebenso} \\ y = \dfrac{nu^2(d+v-w)^2}{\Re[e(d+v-w)^2 + d(e+u-w)^2 + 2w(d+v-w)(e+u-w)]} \end{cases}$$

Wenn in dem eingeklammerten Teile des Nenners dieser letzten Gleichung

$$e = l + n \quad \text{und}$$
$$d = m + n$$

gesetzt wird, so kommt für diesen Teil

$$\begin{aligned}
&- 2uvw + \tfrac{1}{2}[(m+n)(l+n) - w^2](u+v) - 2w(lm+ln+mn) \\
&\quad + 2(w^2 - n^2)(w-n) + u^2(m+n) + v^2(l+n) \\
&\quad - w^2(l+m) + 2lmn + n(l^2 + 2lm + m^2) + lm(l+m) + 3n^2(l+m) \\
&- 4R\Re^2 + 4R\Re(u+v) - 2w(2R+\Re)\Re + 2\Re^2(w-n) \\
&\quad + u^2d + v^2e - w^2f + 2\Re^2(l+m+n) + nf^2 + lmf + 3n^2f \\
&- 4R\Re^2 + 4R\Re(u+v) - 4R\Re w - 2\Re^2 w + 2\Re^2 n - 2\Re^2 n + 2R\Re(l+m-n) \\
&\quad + 2\Re^2(l+m+n) + f(lm+ln+mn) + 3n^2f \\
&- 4R\Re^2 + 4R\Re(u+v) - 4R\Re w + 2R\Re(f-n) + 2\Re^2 f + f(2R+\Re)\Re + 3n^2f \\
&- 2R\Re[2\Re + 2u + 2v - 2w + 2f - n] + 3\Re^2 f + 3n^2 f \\
&\qquad\qquad 3f(\Re^2 + n^2) = 3fw^2 = 3n \cdot 2R\Re \\
&- 2R\Re(2\Re + 2u + 2v - 2w + d + e + f)
\end{aligned}$$

wo R Umkreisradius des Dreiecks, dessen Fusspunktdreieck DEF ist. Für die erste Gleichung in 18) wird der Nenner diesem eben gefundenen Nenner ähnlich, demnach gehen die Gleichungen 18) über in

19) . . .
$$\begin{cases} y = \dfrac{lw^2(f+v-u)}{2R\Re^2(2\Re + 2v + 2w - 2u + d + e + f)} \\ y = \dfrac{nu^2(d+v-w)^2}{2R\Re^2(2\Re + 2u + 2v - 2w + d + e + f)} \end{cases}$$

Diese Ausdrücke haben, wie man in gewisser Beziehung sagen kann, eine schiefe Gestalt; um hieraus einen rectificirten Ausdruck zu erhalten, der mutmasslich auch von einfacherer Gestalt sein wird, könnte man die Gleichungen 19) addiren. Besser wird es aber jedenfalls sein, sie mit einander zu multipliciren und dann die Formeln 424', 425, 427 etc. in's Auge zu fassen. Aber hier ist noch ein anderer Weg möglich; am besten ist es nämlich, für x eine Gleichung zu bilden, die hinsichtlich des Nenners mit dem Nenner der zweiten Gleichung für y übereinstimmt, nämlich

$$x = \frac{nv^2(e+u-w)^2}{2R\Re^2(2\Re+2u+2v-2w+d+e+f)}$$

und diese Gleichung mit der zweiten Gleichung in 19) zu multipliciren. Es kommt:

$$20) \ldots \sqrt{xy} = \frac{nuv(d+v-w)(e+u-w)}{2R\Re^2(2\Re+2u+2v-2w+d+e+f)}$$

$$uv = \frac{2R\Re^2}{w}$$

$$\sqrt{xy} = \frac{n(d+v-w)(e+u-w)}{w(2\Re+2u+2v-2w+d+e+f)}$$

$$\sqrt{xy} = \frac{w(\Re+w-n)(\Re+u+v-w+l+m+n)}{w(2\Re+2u+2v-2w+d+e+f)}$$

$$\sqrt{xy} = \frac{\Re+w-n}{2}$$

Die weitere Entwicklung wie in Anmerkung 6.

Anmerkung 7. Ich erinnere mich nicht mehr, ob sich eine der Gleichungen 18) bei Crelle findet (1821), die weitere Entwicklung findet sich aber jedenfalls nicht bei ihm.

III. Auflösung.

Nachdem auf dem in Auflösung II. gezeigten Wege die Gleichung 3) gefunden ist, setze man

$$nz = d\Re - my - 2\Re\sqrt{yz} \quad \text{(erste Grundgleichung)}$$

$$nz = e\Re - lx - 2\Re\sqrt{xz} \quad \text{(zweite Grdgl.)}$$

Also

21) . . . $d\Re - my - 2\Re\sqrt{yz} = e\Re - lx - 2\Re\sqrt{xz}$

$$\sqrt{s} = \frac{vl\sqrt{x} - um\sqrt{y}}{\Re u - \Re v} \quad \text{(Gleichung 3) in Auflösung II.)}$$

$$\left.\begin{matrix} d\Re\Re u - \Re mu \\ -d\Re\Re v + \Re mv \\ +2\Re um \end{matrix}\right\} y - 2\Re vl\sqrt{xy} = \left.\begin{matrix} e\Re\Re u - \Re ul \\ -e\Re\Re v + \Re vl \\ -2\Re vl \end{matrix}\right\} x + 2\Re um\sqrt{xy}$$

$$\begin{matrix} d\Re^2 u - e\Re^2 u + \\ -d\Re^2 v + e\Re^2 v + \end{matrix} \left\{\begin{matrix} \Re ul \\ \Re vl \end{matrix}\right\} x \left\{\begin{matrix} +\Re um \\ +\Re vm \end{matrix}\right\} y = (um+vl)2\Re\sqrt{xy}$$

$$2\Re\sqrt{xy} = f\Re - lx - my$$

$$= \Re umf + \Re vlf - umlx - vl^2 x - um^2 y - vlmy$$

$$\left.\begin{matrix} d\Re^2 u - d\Re^2 v + \Re ul \\ -e\Re^2 u + e\Re^2 v + \Re vl \\ -\Re mfu - \Re lfv + um\,l \\ + vl^2 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x + \Re um \\ + \Re vm \\ + vlm \\ + um^2 \end{matrix}\right\} y = 0$$

$$um + vl = \frac{\Re(\Re+w)}{n}(u+v)$$

$$\left.\begin{matrix} \Re un \\ +\Re vn \\ +\Re(\Re+w)(u+v) \end{matrix}\right\} lx + \left.\begin{matrix} \Re un \\ +\Re vn \\ +\Re(\Re+w)(u+v) \end{matrix}\right\} my = \begin{matrix} -d\Re^2 un + d\Re^2 vn \\ +e\Re^2 un - e\Re^2 vn \\ +f\Re umn + f\Re vln \end{matrix}$$

22) . . . $(u+v)(\Re+w+n)lx + (u+v)(\Re+w+n)my$

$$= fn(um+vl) - \Re dun + \Re dvn + \Re eua - \Re evn$$

$$= f\Re(\Re+w)(u+v) - \Re umn + \Re vmn$$

(403) $$- \Re un^2 + \Re vn^2 + \Re un^2 - \Re vn^2 + \Re uln - \Re vln$$

$$= f\Re(\Re+w)(u+v) + \Re uln + \Re vmn + \Re umn - \Re vln$$

$$uln + vmn = (u+v)[n(l+m+n) - w(\Re+w)]$$

$$umn = \Re(vw + \Re u)$$

$$vln = \Re)uw + \Re v)$$

$$= \Re(u+v)(\Re+w)f + \Re(u+v)[n(l+m+n) - w(\Re+w)] - \Re^2 w(u+v) - \Re^2(u+v)$$

$$-\Re(u+v)[(\Re+w)(l+m-w)+n(l+m+n)]$$
$$-\Re(u+v)[(\Re+w)\Re]$$
$$-\Re(u+v)[(\Re+w)(l+m-w-\Re)+n(l+m+n)]$$
$$-\Re(u+v)[(\Re+w+n)(l+m+n-w-\Re)]$$

23) . . . $lx+my=\Re(l+m+n-\Re-w)$

Ebenso

$$lx+nz=\Re(l+m+n-\Re-v)$$
$$my+nz=\Re(l+m+n-\Re-u)$$

Folglich

$$2lx+2my+2nz=3\Re(l+m+n)-3\Re^2-\Re(u+v+w)$$
$$2my+2nz=2\Re(l+m+n)-2\Re^2-2\Re u \quad \text{subtrahirt}$$

$$2lx=\Re(l+m+n)-\Re^2+\Re u-\Re v-\Re w$$

$$x=\frac{\Re}{2l}[l+m+n-\Re+u-v-w]$$

Anmerkung 8. Die directe Ableitung der Gleichung 23) war bisher vielleicht noch nicht gelungen.

IV. Auflösung.

(Die einfachste und beste).

$$d\Re=my+nz+2\Re\sqrt{yz}$$
$$e\Re=nz+lx+2\Re\sqrt{xz}$$
$$f\Re=lx+my+2\Re\sqrt{xy}$$

Aus der ersten Grundgleichung folgt

$$nz+2\Re\sqrt{yz}=\Re d-my$$

$$z+\frac{2\Re\sqrt{y}}{n}\sqrt{z}=\frac{\Re d-my}{n}$$

quadratisch behandelt

$$\sqrt{z}=\frac{-\Re\sqrt{y}\pm\sqrt{\Re dn-mny+\Re^2y}}{n}$$

$$\Re dn=\frac{vwln}{u}$$

$$\Re^2-mn=\frac{\Re vw}{u}$$

$$24) \ldots \begin{cases} n\sqrt{z} = -\Re y + \sqrt{\frac{v\,w}{u}} \cdot \sqrt{ln - \Re y} \\ \text{Ebenso} \\ n\sqrt{z} = -\Re x + \sqrt{\frac{u\,w}{v}} \cdot \sqrt{mn - \Re x} \end{cases}$$

aus der zweiten Grundgleichung.

Also

$$25) \ldots -\Re\sqrt{y} + \sqrt{\frac{v\,w}{u}}\sqrt{ln - \Re y} = -\Re x + \sqrt{\frac{u\,w}{v}} \cdot \sqrt{mn - \Re x}$$

$\alpha)$ $\Re(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \sqrt{\frac{u\,w}{v}}\sqrt{mn - \Re x} - \sqrt{\frac{v\,w}{u}}\sqrt{ln - \Re y}$ quadrirt:

$$\Re^2(x + y - 2\sqrt{xy}) = \frac{u\,w}{v}(mn - \Re x) + \frac{v\,w}{u}(ln - \Re y) - 2w\sqrt{(lm - \Re x)(ln - \Re y)}$$

$$uwm = \Re ev \qquad vwl = \Re ud$$

$$= \Re en - \frac{\Re u\,wx}{v} + \Re dn - \frac{\Re vwy}{u} - 2w\sqrt{lmn \cdot n - \Re n \cdot lx - \Re n \cdot my + \Re^2 xy}$$

$$\frac{\Re uw}{v} = ln - \Re^2 \qquad \frac{\Re vw}{u} = mn - \Re^2$$

$$= \Re(e + d)n - (ln - \Re^2)x - (mn - \Re^2)y - 2w\sqrt{[\Re^2(l + m + n)n - \Re n(lx + my) + \Re^2 xy]}$$

dritte Grundgleichung:

$$lx + my = f\Re - 2\Re\sqrt{xy}$$

$$-2\Re\sqrt{xy} = \Re(e + d)n - lnx - mny - 2w\sqrt{[\Re^2(l + m + n)n - (\Re nf\Re - \Re n \cdot 2\Re\sqrt{xy}) + \Re^2 xy]}$$

$$-2\Re^2\sqrt{xy} = \Re(e + d)n - n(lx + my) - 2w\sqrt{[\Re^2 n^2 + 2\Re \cdot \Re n\sqrt{xy} + \Re^2 xy]}$$

$$-2\Re^2\sqrt{xy} = \Re(e + d)n - n(lx + my) - 2w - (\Re n + \Re\sqrt{xy})$$

$$(2\Re^2 - 2\Re w)\sqrt{xy} = -\Re(e + d)n + n(lx + my) + 2wn$$

$$2\Re n\sqrt{xy} = \Re fn - n(lx + my)$$

die dritte Grundgleichung addirt:

$$2\Re(\Re - w + n)\sqrt{xy} = -\Re(e + d - f)n + 2wn$$

$$2(\Re - w + n)\sqrt{xy} = -2n^2 + 2wn = (\Re + w - n)(\Re - w + n)$$

$$2\sqrt{xy} = \Re + w - n$$

Das Weitere wie in Anmerkung 6, oder, indem man jetzt aus der dritten Grundgleichung die Gleichung 23) bildet.

β) Die Gleichung 25) gestattet auch folgendes Verfahren:

$$-\Re\sqrt{y} + \sqrt{ln\,\frac{vw}{u} - \frac{vw}{u}\Re y} = -\Re\sqrt{x} + \sqrt{\frac{mn\,uw}{v} - \frac{uw}{v}\Re x}$$

$$\frac{ln\,vw}{u} - \frac{\Re u d n}{u} = \Re dn = \frac{\Re f dn}{f} = \frac{dn}{f}lx + \frac{dn}{f}my\,\frac{dn}{f} + 2\Re\sqrt{xy}$$

$$\frac{\Re vw}{u} = mn - \Re^2$$

Ebenso

$$\frac{uv\,mn}{v} = \frac{en}{f}lx + \frac{en}{f}my + \frac{en}{f};\quad \frac{\Re um}{n} = ln - \Re^2$$

$$-\Re\sqrt{y} + \sqrt{\frac{df\,lnu + df\,nmy + dfn\,2\Re\sqrt{xy}}{f^2} - mny + \Re^2 y}$$

$$= -\Re\sqrt{x} + \sqrt{\frac{ef\,lnx + ef\,mny + fen\,2\Re\sqrt{xy}}{f^2} - lnx + \Re^2 x}$$

$$-\Re\sqrt{y} + \sqrt{\frac{df\,lnx + (df\,mn - f^2mn + \Re^2 f^2)y + dfn\,2\Re\sqrt{xy}}{f^2}}$$

$$= -\Re\sqrt{x} + \sqrt{\frac{ef\,mny + (ef\,ln - f^2ln + \Re^2 f^2)x + fen\,2\Re\sqrt{xy}}{f^2}}$$

$$dfln = \frac{(l+m+n)^2\Re^2 v^2}{m^2};\quad df\,mn - f^2mn + \Re^2 f^2 = n^2v^2$$

$$ef\,mn = \frac{(l+m+n)^2\Re^2 u^2}{l^2};\quad ef\,ln - f^2ln + \Re^2 f^2 = n^2u^2$$

$$-\Re\sqrt{y} + \frac{(l+m+n)\Re v}{fm}\sqrt{x} + \frac{nv}{f}\sqrt{y}$$

$$= -\Re\sqrt{x} + \frac{(l+m+n)\Re u}{fl}\sqrt{y} + \frac{nu}{f}\sqrt{x}$$

$$\left[\frac{(l+m+n)\mathfrak{R}v}{fm}+\mathfrak{R}-\frac{nu}{f}\right]\sqrt{x}=\left[\frac{(l+m+n)\mathfrak{R}u}{fl}+\mathfrak{R}-\frac{nv}{f}\right]\sqrt{y}$$

$$(l+m+n)\mathfrak{R}v=m\mathfrak{R}v+\mathfrak{R}ve=m\mathfrak{R}v+uem$$

26) . . . $(uw+\mathfrak{T}v+\mathfrak{T}f-un)\sqrt{x}=(vw+\mathfrak{R}u+\mathfrak{R}f-vm)\sqrt{y}$

Die Coefficienten dieser Gleichung sind wieder ganz andere als diejenigen der Gleichung 6) und in Anmerkung 2; aber ihr Verhältniss ist mit dem Verhältniss der Coefficienten in Gleichung 7) übereinstimmend, und es wird sich also Gleichung 26) auf Gleichung 7) reduciren lassen, wenn man diesen Weg weiter verfolgt.

V. Auflösung.

(Der vorigen ähnlich).

Wird von der Summe der ersten und zweiten Grundgleichung die dritte subtrahirt, so kommt, (ähnlich wie in Gleichung 9)):

$$2n\mathfrak{R}=2nz+2\mathfrak{R}\sqrt{zx}+2\mathfrak{R}\sqrt{yz}-2\mathfrak{R}\sqrt{yx}$$

$$z+\frac{\mathfrak{R}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{n}\sqrt{z}=\frac{\mathfrak{R}(n+\sqrt{xy})}{n}$$

quadratisch behandelt,

$$27) \ . \ . \ . \ \sqrt{z}=\frac{-\mathfrak{R}(\sqrt{x}+\sqrt{y})\pm\sqrt{4\mathfrak{R}n(n+\sqrt{xy})+\mathfrak{R}^2(x+y+2\sqrt{xy}}}{2n}$$

Wird die erste Grundgleichung nach z quadratisch behandelt, so kommt (vergl. IV):

$$\sqrt{z}=\frac{-\mathfrak{R}\sqrt{y}}{n}\pm\sqrt{\frac{\mathfrak{R}dn-mny+\mathfrak{R}^2y}{n^2}}$$

$$mn-\mathfrak{R}^2=\frac{\mathfrak{R}^2d}{l}$$

$$\sqrt{z}=\frac{-\mathfrak{R}\sqrt{y}+\sqrt{\frac{\mathfrak{R}dln-\mathfrak{R}^2dy}{l}}}{n}$$

Ebenso

$$\sqrt{z}=\frac{-\mathfrak{R}\sqrt{x}+\sqrt{\frac{\mathfrak{R}emn-\mathfrak{R}^2ex}{m}}}{n}$$

addirt und dann durch 2 dividirt:

$$28) \ldots \sqrt{z} = \frac{-\Re(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + \sqrt{\frac{\Re emn - \Re^2 ex}{m}} + \sqrt{\frac{\Re dln - \Re^2 dy}{l}}}{2n}$$

Aus 27) und 28) folgt

$$\sqrt{\frac{\Re emn - \Re^2 ex}{m}} + \sqrt{\frac{\Re dln - \Re^2 dy}{l}} \cdot$$

$$= \sqrt{4\Re n(n+\sqrt{xy}) + \Re^2(x+y+2\sqrt{xy}}$$

$$+2\sqrt{\frac{\Re^2 delmn^2 - \Re^2 delnx - \Re^3 demny + \Re^4 dexy}{lm}} \Bigg\} = 4\Re n(n+\sqrt{xy}) + \Re^2(x+y+2\sqrt{xy})$$

$$lx+my = f\Re - 2\Re\sqrt{xy} \quad \text{(dritte Grundgleichung)}$$

Mit lm multiplicirt

$$+2lm\sqrt{\frac{\Re elmn - \Re^2 elx + \Re dlmn - \Re^2 dmy}{\Re^2 delmn^2 - \Re^3 den(f\Re - 2\Re\sqrt{xy}) + \Re^4 dexy}} = 4\Re lmn(n+\sqrt{xy}) + \Re^2 lm(x+y+2\sqrt{xy})$$

$lmn = \Re^2(l+m+n)$ (F. 220), durch $\Re^2$ dividirt

$$+2lm\sqrt{\frac{(\Re e+\Re d)(l+m+n) - elx - dmy}{den(l+m+n) - denf + 2den \cdot 2\sqrt{xy} + dexy}} = 4\Re(l+m+n)(n+\sqrt{xy}) + lmx + lmy + 2lm\sqrt{xy}$$

$$\Re(d+e)(l+m+n) + 2lm\sqrt{\frac{de(n^2+2n\sqrt{xy}+xy}{lm}} = \begin{cases} 4\Re(l+m+n)n + 4\Re(l+m+n)\sqrt{xy} \\ +(el+lm)x + (dm+lm)y + 2lm\sqrt{xy} \end{cases}$$

$$\Re(d+e-4n)(l+m+n) + 2\sqrt{delm(n^2+2n\sqrt{xy}+xy} = 4\Re(l+m+n)\sqrt{xy} + (l+m+n)(lx+my) + 2lm\sqrt{xy}$$

$$delm = \frac{(l+m+n)\Re w}{n}$$

$$\Re(l+m+n)(l+m-2n) + 2\frac{(l+m+n)\Re w(n+\sqrt{xy}}{n} = 4\Re(l+m+n)\sqrt{xy} + (l+m+n)(lx+my) + 2lm\sqrt{xy}$$

Wird mit n multiplicirt und durch $l+m+n$ dividirt, so kommt

$$\Re(f-2n)n+2\Re w(n+\sqrt{xy}) = 4\Re n\sqrt{xy}+2\Re^2\sqrt{xy}+n(lx+my)$$

$$\Re fn = 2\Re n\sqrt{xy}+n(lx+my)$$

$$-2\Re n^2+2\Re wn+2\Re w\sqrt{xy} = 2\Re n\sqrt{xy}+2\Re^2\sqrt{xy}$$

$$-n^2+wn = (n+\Re-w)\sqrt{xy}$$

$$\sqrt{xy} = \frac{wn-n^2}{\Re+n-w}$$

$$\sqrt{xy} = \frac{(wn-n^2)(\Re-n+w)}{(\Re+n-w)(\Re-n+w)}$$

$$\sqrt{xy} = \frac{(wn-n^2)(\Re-n+w)}{-2n^2+2nw}$$

$$\sqrt{xy} = \left(\frac{\Re-n+w}{2}\right)$$

$$2\sqrt{xy} = \Re+w-n$$

VI. Auflösung.

(Die von Crelle mitgeteilte Auflösung der Redacteure eines französischen Journals etwas verändert und zu Ende geführt. — Gergonne und Lavernède, 1810, 1811.)

$$d\Re = my+nz+2\Re\sqrt{yz}$$

$$e\Re = lx+nz+2\Re\sqrt{xz}$$

$$f\Re = lx+my+2\Re\sqrt{xy}$$

Man setze: $y = s^2x$

und $z = t^2x$

wodurch die 3 Grundgleichungen folgende Gestalt gewinnen:

$$29)\ \ldots \begin{cases} d\Re = x(ms^2+nt^2+2\Re st) \\ e\Re = x(l\ \ +nt^2+2\Re t) \\ f\Re = x(l\ \ +ms^2+2\Re s) \end{cases}$$

Die erste dieser Grundgleichungen giebt

$$x = \frac{d\Re}{ms^2+nt^2+2\Re st}$$

Setzt man diesen Wert in die andern beiden Gleichungen ein, so kommt:

30) . . . $\begin{cases} e(ms^2+nt^2+2\Re st) = d(l+nt^2+2\Re t) \\ f(ms^2+nt^2+2\Re st) = d(l+ms^2+2\Re s) \end{cases}$

Die erste Gleichung wird mit lm, die zweite mit ln multiplicirt. Es kommt

$$el(m^2s^2+2\Re mst)+elmnt^2 = dlm(l^2+2\Re tt)+dlmnt^2$$

$$dlmnt^2 = (l+n)(l+m+n)\Re^2t^2 = [el+lm+n(l+m+n)]\Re^2t^2$$
$$dlmnt^2 = (m+n)(l+m+n)\Re^2t^2 = [dm+lm+n(l+m+n)]\Re^2t^2$$

$$el(m^2s^2+2m\Re st+\Re^2t^2 = dlm(l^2+2l\Re t+\Re^2t^2)$$
$$el : dlm = u^2 : v^2$$

31) . . . $\begin{cases} u(ms+\Re t) = v(l+\Re t). \text{ Ebenso} \\ u(nt+\Re s = w(l+\Re s) \end{cases}$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$s = \frac{vl-(u-v)\Re t}{um}$$

dies in die zweite Gleichung gesetzt, giebt

32) . . . $\begin{cases} t = \dfrac{l[(u-w)\Re v - uwm]}{(u-v)(u-w)\Re^2 - u^2mn}. \text{ Ebenso} \\ s = \dfrac{l[(u-v)\Re w - uvn]}{(u-v)(u-w)\Re^2 - u^2mn} \end{cases}$

$$uwm = \Re ev$$
$$u^2mn = \Re^2ef$$
$$uvn = \Re vf$$

33) . . . $\begin{cases} s = \dfrac{lw}{\Re}\cdot\dfrac{f+v-u}{ef-(u-v)(u-w)} \\ t = \dfrac{lv}{\Re}\cdot\dfrac{e+w-u}{ef-(u-v)(u-w)} \end{cases}$

also

34) . . . $\begin{cases} ms^2 = \dfrac{ml^2w^2(f+v-u)^2}{\Re^2[ef-(u-v)(u-w)]^2} \\ nt^2 = \dfrac{nl^2v^2(e+w-u)^2}{\Re^2[ef-(u-v)(u-w)]^2} \\ 2\Re st = \dfrac{2lvw(f+v-u)(e+w-u)}{\Re[ef-(u-v)(u-w)]^2} \end{cases}$

$$35)\ \ldots \begin{cases} ms^2 = lde\left[\dfrac{f+v-u}{ef-(u-v)(u-w)}\right]^2 \\ nt^2 = ldf\left[\dfrac{e+w-u}{ef-(u-v)(u-w)}\right]^2 \\ 2\mathfrak{P}st = \dfrac{2ldu(f+v-u)(e+w-u)}{[ef-(u-v)(u-w)]^2} \end{cases}$$

Nun ist unter 29)

$$x = \frac{d\mathfrak{R}}{ms^2+nt^2+2\mathfrak{P}st}$$

Daher ist

$$36)\ \ldots x = \frac{\mathfrak{R}}{l}\cdot\frac{[ef-(u-v)(u-w)]^2}{e(f+v-u)^2+f(e+w-u)^2+2u(f+v-u)(e+w-u)}$$

Bis hierher die Redacteure Gergonne und Lavernède. Diese Gleichung kann nun auf die bekannte Gleichung in Anmerkung 6) reducirt werden. Es kommt:

$$x = \frac{\mathfrak{R}}{l}\cdot\frac{2R\mathfrak{R}[(l+m+n)^2-(\mathfrak{R}+v+w-u)^2]}{2R\mathfrak{R}2[(l+m+n)+(\mathfrak{R}+v+w-u]}$$

$$37)\ \ldots x = \frac{\mathfrak{R}}{2l}[l+m+n-(\mathfrak{R}+v+w-u)]$$

Anmerkung 9. Die vorstehende Auflösung kürzt die von Crelle mitgeteilte Auflösung der genannten Redacteure ziemlich wesentlich ab und führt sie zu Ende. Die Original-Auflösung ist sehr mangelhaft, teils, weil man darin die Symmetrie und Eleganz vermisst, indem die Auflösung sich in schiefgestaltigen Ausdrücken bewegt und diese die Auffassung der analogen Beziehungen erschweren, teils, weil sie an unnötiger Weitschweifigkeit leidet, und endlich, weil in Gleichung 36) noch der eigentliche Schluss fehlt.

Anmerkung 10. Aus den beiden Gleichungen 31) können auch die Gleichungen 5), sowie auch die in Anmerkung 2. enthaltenen Gleichungen hergeleitet werden; nämlich

$$\frac{u\mathfrak{R}l-v\mathfrak{R}t+ums}{v} = l - \frac{u\mathfrak{R}s-w\mathfrak{P}s+unt}{w} \qquad (31)$$

$$s(vw\mathfrak{P}-nv\mathfrak{R}+uwm) = t(vw\mathfrak{R}-uw\mathfrak{R}+uvn) \qquad (5)$$

$$uwm = \mathfrak{P}ive \qquad uvn = \mathfrak{P}iwf$$

$$sv(e+w-u) = tw(f+v-u)$$
$$s^2x = y \qquad t^2x = z$$
$$v(e+w-u)\sqrt{y} = w(f+v-u)\sqrt{z}$$

Dasselbe Resultat erhält man auch sehr leicht aus den Gleichungen 33), denn $t^2y = s^2z$.

Anmerkung 11. Adams beschäftigt sich in seinem „Malfatti-schen Problem", Winterthur 1846, auch mit der Reduction der Gleichung 36). Dieselbe ist ihm nicht vollständig gelungen, indem er nicht die Malfatti'schen, sondern nur ähnliche Ausdrücke erhält, nämlich

$$x = \frac{\mathfrak{R}^2}{lR} \cdot \frac{\mathfrak{R}_1^2}{(l+m+n+\mathfrak{R}+v+w-u)}$$

Hinsichtlich der Grösse $\mathfrak{R}_1$ bedarf es hier einer Erklärung; dieselbe hat folgende Bedeutung. Adams spricht von einem Kreise, der dem Dreieck *DEF*, Fig. 5 und 6, eingeschrieben ist und in diesen Figuren $\mathfrak{R}$ zum Radius hat (bei ihm $= r$), und ausserdem von 3 anderen das Dreieck *DEF* auswärts tangirenden Kreisen. Die Mittelpunkte dieser Kreise stimmen in Figur 6 mit den Eckpunkten des Dreiecks *ABC* überein. Der von *A* aus zu beschreibende Kreis berührt die Seite *d* unmittelbar, von *e* und *f* aber deren Verlängerungen. Jede Seite des Dreiecks *DEF* berührt also – den inneren Kreis mitgerechnet — im Grunde 4 Kreise, und man sieht leicht, dass $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$ Potenzlinien der äusseren Kreise sind. Von dem Dreieck *ABC* denkt Adams sich nun wieder 4 berührende Kreise; den Radius des inneren bezeichnet er mit $\mathfrak{R}$ (in Fig. 6 mit r übereinstimmend), und die Radien der auswärts berührenden Kreise mit $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$. Es mag nun noch bemerkt werden, dass bei Adams $2\mathfrak{R}$ in Figur 6 $= R$, und dass $\mathfrak{R}_1 = 2R + r - x$ in Fig 6 ist.

Zweites Verfahren.

Ein anderer Gang in der VI. Auflösung ist folgender. Wenn die zweite Gleichung in 29) mit f und die 3te mit e multiplicirt wird, so ergiebt sich:

38) . . . $fl+fnt^2+2\Re ft = el+ems^2+2\Re es$

$$\frac{w^2f}{n} = \frac{v^2-e}{m}$$

multiplicirt

$$\frac{w^2f^2l}{n}+w^2f^2t^2+\frac{2\Re w^2f^2t}{n} = v^2e^2\frac{l}{m}+v^2e^2s^2+\frac{2\Re v^2e^2s}{m}$$

Nun ist

$$\frac{\Re^3v^2e}{m^2} = \frac{\Re^2w^2f^2}{n^2} - \frac{v^2e^2l}{m} - \frac{w^2f^2l}{n}$$

denn

$$\frac{v^2e^2(lm-\Re^2)}{m^2} = \frac{w^2f^2(ln-\Re^2)}{n^2}$$

$$\frac{\Re^2w^2f^2}{n^2}+w^2f^2t^2+2\frac{\Re w^2f^2t}{n} = \frac{\Re^2v^2e^2}{m^2}+v^2e^2s^2+2\frac{\Re v^2e^2s}{m}$$

$$\frac{\Re wf}{n}+wft = \frac{\Re ve}{m}+ves$$

$$mwf(\Re+nt) = nve(\Re+ms)$$

$$mwf\Re(\Re+nt) = nve\Re(\Re+ms)$$

$$wf\Re = uvn \qquad ve\Re = uem$$

39) . . . $v(\Re+nt) = w(\Re+ms)$ oder

$$\frac{\Re+nt}{w} = \frac{\Re+ms}{v}$$

Werden hieraus t und s wieder entfernt, $\left(t=\sqrt{\frac{z}{x}},\ s=\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$, so erhält man die Gleichungen 4), und man kann dann die Entwicklung fortsetzen.

Anmerkung 12. Aus der Zusammenstellung der Gleichung 39) mit der ersten Gleichung von 31) gehen ähnliche Gleichungen wie die in Anmerkung 2. enthaltenen hervor.

$$wms = \Re v+vnt-\Re w \quad (39) \qquad ums = \Re vt+vl-\Re ut \quad (31)$$

$$uems = uvnt+luv-\Re uw \qquad uems = vwl+\Re vwt-\Re uwt$$

$$uvn = \Re wf \qquad vwl = \Re ul$$

$$wft+uv-uw = ul+vwt-uwt$$

$$(wf+uw-vw)t = ul+uw-uv$$

40) . . .
$$\begin{cases} t = \dfrac{u(d+v-w)}{w(f+u-v)} \\ s = \dfrac{u(d+v-w)}{v(e+u-w)} \end{cases}$$

Wenn man aber beide Gleichungen in 31) addirt, und zwar so:

$$\Re ut + ums = \Re vt + vl$$

$$\Re ws + wl = \Re us + unt$$

$$(\Re w + um)s + \Re ut + wl = (\Re v + un)t + \Re us + vl$$

$$\Re(\Re w - \Re u + um)s + \Re wl = \Re(\Re v - \Re u + un)t + \Re vl$$

$$wmls + \Re wl = vlnt + \Re vl \quad (39) \quad \text{subtr.}$$

$$\Re(\Re w - \Re u + um)s - (\Re uv + \Re^2 w)s = \Re(\Re v - \Re u + un)t - (\Re uw + \Re^2 v)t \qquad \text{(F. 201)}$$

$$(-\Re u + um - uv)s = (-\Re u + un - uw)t$$

41) . . . $(\Re + v - m)s = (\Re + w - n)t$

so geht daraus, (indem man 39) zu Hülfe nimmt), die Gleichung 7) hervor; denn man braucht in 41) für s und t nur die ursprünglichen Ausdrücke wieder herzustellen. Es kommt:

42) . . . $(\Re + v - m)\sqrt{y} = (\Re + w - n)\sqrt{z} = (\Re + u - l)\sqrt{x}$

Aus einer Vergleichung der Wege, die zu den Resultaten 40) und 41) führten, ersieht man, wie notwendig es ist, wenn man einfache Resultate erhalten will, dass die Entwicklung sich in symmetrischen Ausdrücken bewegt. Es gilt dies überhaupt von der ganzen Behandlung des Problems.

Anmerkung 13. Aus der vorigen Anmerkung geht ferner leicht hervor, dass die wichtige Gleichung 7) (oder 42)) sich aus 4) auch noch auf eine andere und zwar bessere Art als es in Auflösung II. geschah, ableiten lässt. Man kann nämlich in Gleichung 4)

$$u(m\sqrt{y} + \Re\sqrt{z}) = v(l\sqrt{x} + \Re\sqrt{z})$$
$$v(n\sqrt{z} + \Re\sqrt{x}) = w(m\sqrt{y} + \Re\sqrt{x})$$
$$w(l\sqrt{x} + \Re\sqrt{y}) = u(n\sqrt{z} + \Re\sqrt{y})$$

die erste und dritte Gleichung mit $\Re$, die zweite aber mit l multipliciren und dann alle 3 Gleichungen addiren. Man erhält:

$$\left.\begin{array}{c}\Re um\sqrt{y} + \Re^2 u\sqrt{z} + \Re wl\sqrt{x} + \Re^2 w\sqrt{y} \\ + vln\sqrt{z} + \Re vl\sqrt{x}\end{array}\right\} -$$

$$\left\{\begin{array}{c} \mathfrak{R}vl\sqrt{x} + \mathfrak{R}^2v\sqrt{z} + \mathfrak{R}un\sqrt{z} + \mathfrak{R}^2u\sqrt{y} \\ + wlm\sqrt{y} + \mathfrak{R}wl\sqrt{x} \end{array}\right.$$

$$vln = \mathfrak{R}uw + \mathfrak{R}^2v; \quad wlm = \mathfrak{R}uv + \mathfrak{R}^2w$$

$$\mathfrak{R}um\sqrt{y} + \mathfrak{R}^2u\sqrt{z} + \mathfrak{R}uw\sqrt{z} = \mathfrak{R}un\sqrt{z} + \mathfrak{R}^2u\sqrt{y} + \mathfrak{R}uv\sqrt{y}$$

$$\mathfrak{R}u(\mathfrak{R} + w - n)\sqrt{z} = \mathfrak{R}u(\mathfrak{R} + v - m)\sqrt{y}$$

$$(\mathfrak{R} + w - n)\sqrt{z} = (\mathfrak{R} + v - m)\sqrt{y}$$

Die übrigen 7 Lösungen folgen später.

III.

Ueber die Verspätung des Flutmaximums inbezug auf die Culmination des Mondes.

Von

C. Benz.

Bezeichnet man unter der Annahme der Aequatorstellung des Mondes die Entfernung desselben vom Mittelpunkte der Erde mit l, und ist a ein Punkt des Aequators der letzteren, φ der von dem zu a gehörigen Erdradius r und l eingeschlossene Winkel, γ die Anziehungskraft des Mondes in der Entfernung 1, so ist die Componente der Beschleunigung in der Richtung der Rotation des Punktes a im ersten Quadranten westlich vom Culminationsmeridian für diesen Punkt

$$1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\gamma l \sin\varphi}{(l^2 - 2lr\cos\varphi + r^2)^{3/2}} + \frac{\gamma \sin\varphi}{l^2}$$

Da $dx = r\,d\varphi$, so ergiebt sich, wenn man mit dx multiplicirt und dann integrirt

$$2) \qquad \tfrac{1}{2}v^2 = \frac{\gamma}{(l^2 - 2lr\cos\varphi + r^2)^{1/2}} - \frac{\gamma r\cos\varphi}{l^2} + c$$

wo v die Geschwindigkeit und c die Integrationsconstante bezeichnet.

Für einen Punkt des Aequators beträgt die Geschwindigkeit annähernd 469 m, dieser Wert gilt für

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

demnach ist für c der Wert

$$\frac{469^2}{2} m - \frac{\gamma}{(l^2+r^2)^{1/2}} \quad \text{zu setzen.}$$

Unter Berücksichtigung dieses Wertes geht Gleich. 2), wenn man die höheren Potenzen von $\frac{r}{l}$ vernachlässigt, da dieser Bruch etwa $= \frac{1}{60}$ ist, über in

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{469^2}{2} m + \tfrac{3}{2} \frac{\gamma r^2 \cos^2\varphi}{l^3}$$

Hieraus folgt:

3) $$v = 469 \left(1 + \frac{3 \,.\, 9{,}8 \,.\, \cos^2\varphi}{2 \,.\, 80 \,.\, 60^3 \,.\, 469^2}\right) m$$

da γ annähernd $\frac{9{,}8}{80} m$ für $r = 1$ ist.

Es sei ferner M die Wassermasse von der Länge des Quadranten, der Breite 1 und der Tiefe s, dann ist ein unendlich kleiner Teil dieser Masse von derselben Breite und Tiefe

$$= \frac{M r \, d\varphi}{r \frac{\pi}{2}} = \frac{M d\varphi}{\frac{\pi}{2}}$$

Da $\frac{s}{r}$ ein kleiner Bruch ist, so kann man die Rotationsgeschwindigkeit am Grunde und an der Oberfläche von M annähernd als gleich annehmen. Multiplicirt man nun Gl. 3) mit $\frac{M d\varphi}{\frac{\pi}{2}}$ und integrirt zwischen den Grenzen

$$\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

so erhält man als Bewegungsgrösse für diesen Quadranten

4) $$v_1 M = 469 \left(1 + \frac{3 \,.\, 9{,}8}{4 \,.\, 80 \,.\, 60^3 \,.\, 469^2}\right) mM$$

Die obere Grenze

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

ist nur annähernd genommen; genauer ist sie

$$\varphi = 89^0\ 30'$$

da φ als Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks zu

bestimmen ist, dessen Schenkel jeder $= l$ und dessen Basis $= r_1 \cos\varphi$, also

$$= \frac{r}{2l} = 0{,}00\,830$$

weil in diesem Falle die Anziehung des Mondes auf den Punkt a und den Mittelpunkt der Erde gleich stark ist.

Für den ersten Quadranten östlich vom Culminationsmeridian erhält man auf ähnliche Weise

$$5) \qquad v_2 M_1 = 469\left(1 - \frac{3 \cdot 9{,}8}{4 \cdot 80 \cdot 60^3 \cdot 469^2}\right) mM$$

Aus Gl 4) und 5) ergiebt sich annähernd

$$6) \qquad M_1 = \left(1 + \frac{3 \cdot 9{,}8}{2 \cdot 80 \cdot 60^3 \cdot 469^2}\right) M$$

Bei Gleichheit der Bewegungsgrössen muss also auf dem östlichen Quadranten eine grössere Wassermasse vorhanden sein als auf dem westlichen, das Flutmaximum muss sich demnach nach Osten vom Culminationsmeridian verschieben.

Nimmt man den Aequatorialdurchschnitt der Erde unter Berücksichtigung der Flut als eine Ellipse mit den halben Achsen r und $r + \sigma$ an, wo σ die Höhe der Flut bezeichnet, und bezeichnet man ferner den Winkel der Verschiebung des Flutmaximums mit χ, so erhält man annähernd als Flächenunterschied des Kreis- und des dazu gehörigen Teiles des Ellipsenquadranten einerseits

$$\tfrac{1}{2}\sigma r\left(\frac{\pi}{2} + \chi\right), \quad \text{andererseits} \quad \tfrac{1}{2}\sigma r\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right)$$

also eine Differenz von $\sigma r \chi$; für den Zustand der Gleichheit der Bewegungsgrössen muss demnach annähernd

$$\frac{\sigma \cdot r\,\chi}{s \cdot r\,\frac{\pi}{2}} M = \frac{3 \cdot 9{,}8}{2 \cdot 80 \cdot 60^3 \cdot 469^2} M$$

sein, hieraus ergiebt sich

$$7) \qquad \chi = \frac{3 \cdot 9{,}8}{2 \cdot 80 \cdot 60^3 \cdot 469^2} \cdot \frac{s}{\sigma} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Für σ kann man annähernd $\frac{2s}{80 \cdot 60^3}$ setzen. Unter Berücksichtigung dieses Wertes geht Gleichung 7) über in

$$8) \quad \chi = \frac{3 \cdot 9{,}8}{4 \cdot 469^2} \cdot \frac{\pi}{2} = 10{,}8'' \text{ oder in Zeit } = 0{,}7 \text{ Sec.}$$

Wegen Lage und Gestalt der Continente muss aber diese Zeit vergrössert werden. An den Westküsten derselben fehlt der Gegendruck in ost-westlicher Richtung, an den Ostküsten in west-östlicher, sodass sich hier das Wasser besonders hoch stauen muss, da die Küsten ihre Rotationsgeschwindigkeit behalten, das Wasser auch nicht plötzlich, dem veränderten Drucke entsprechend, in der Herstellung des Gleichgewichts folgen kann.

In ähnlicher Weise lässt sich auch für den entgegengesetzten Meridian eine Verspätung des Flutmaximums ableiten, da in den beiden anderen Quadranten der Mittelpunkt der Erde stärker angezogen wird als ein Punkt der Peripherie.

Eine Verzögerung der Rotationsgeschwindigkeit der Erde kann aber durch die Verspätung des Flutmaximums nicht herbeigeführt werden, da die Flutmassen wieder zurückströmen müssen.

Gleichung 8) muss auch annähernd für die Atmosphäre gelten, wenn sich auch wegen anderer Einflüsse und Ursachen die Verschiebung schwer durch Beobachtung wird nachweisen lassen.

IV.

Untersuchungen über die Attraction zweier homogenen Körper.

Von

Emil Liebenthal.

In seiner Inaugural-Dissertation beschäftigte sich Verfasser mit der Attraction, welche erstens zwei homogene Polyeder und zweitens ein homogenes Polyeder und ein homogenes dreiaxiges Ellipsoid auf einander ausüben. Im Nachstehenden möge nun der erste Teil ausführlicher mitgeteilt werden, während der zweite nur kurz erwähnt werden soll.

Es mögen die Massen zweier unveränderlicher Systeme m, m' so auf einander wirken, dass jeder Punkt P des ersten Systems auf jeden Punkt P' des zweiten und umgekehrt jeder Punkt P' des zweiten Systems auf jeden Punkt P des ersten nach dem Newtonschen Attractionsgesetze wirkt. Es werden sich dann sämtliche Attractionskräfte im Gleichgewicht halten, wenn man das System starr macht. Nach den Gesetzen der Statik reduciren sich die an den Punkten P wirkenden Kräfte für einen beliebigen Punkt des Raumes auf eine Resultante R und ein Kräftepar H. Für denselben Punkt reduciren sich auch die an den Punkten P' wirkenden Kräfte auf eine Resultante R' und ein Kräftepar H', die R und H an Grösse gleich, dem Sinne nach jedoch entgegengesetzt sind. Wir wollen nun diesen Reductionspunkt zum Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems machen und die Resultante R und das resultirende Par H aller an m angreifenden Kräfte in die Componenten X, Y, Z und L, M, N nach den Axen zerlegen. Es ist dann, wenn wir die Kraft, mit der sich 2 Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung anziehen, der Einfachheit wegen gleich der Einheit setzen:

$$X = \int\int \frac{x' - x}{r^3}\, dm\, dm' \qquad L = \int\int \frac{yz' - y'z}{r^3}\, dm\, dm'$$

$$Y = \int\int \frac{y' - y}{r^3}\, dm\, dm' \qquad M = \int\int \frac{zx' - z'x}{r^3}\, dm\, dm'$$

$$Z = \int\int \frac{z' - z}{r^3}\, dm\, dm' \qquad N = \int\int \frac{xy' - x'y}{r^3}\, dm\, dm'$$

r bedeutet darin den Abstand der unbestimmten Elemente dm, dm', deren Coordinaten xyz, $x'y'z'$ seien, und von den Integrationen ist die eine über m, die andere über m' auszudehnen. Diese Grössen X, Y, Z; L, M, N lassen sich nun durch die Differentialquotienten der Function

$$V = \int\int \frac{dm\, dm'}{r}$$

ausdrücken, welche daher das Potential der Massen m, m' auf ninander genannt wird. Erteilen wir nämlich dem System m, dessen Attractionskräfte wir reduciren wollen, eine virtuelle Verrückung, welche in die Verschiebungen $\partial\xi\, \partial\eta\, \partial\zeta$ parallel den Axen und in die Rotationen von den Amplituden $\partial\sigma$, $\partial\sigma'$, $\partial\sigma''$ um die Coordinatenaxen zerlegt werden kann, so liefert das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten als Bedingung für das Gleichgewicht zwischen den Attractionskräften und $-X$, $-Y$, $-Z$, $-L$, $-M$, $-N$

$$\partial V = X\partial\xi + Y\partial\eta + Z\partial\zeta + L\partial\sigma + M\partial\sigma' + N\partial\sigma''$$

Legen wir dann durch einen beliebigen Punkt (ξ, η, ζ) des Systems m ein mit diesem fest verbundenes Coordinatensystem u, v, w, dessen Axen der Lage nach durch die 3 Euler'schen Coordinaten ψ, ϑ, φ gegeben sein mögen, so wird V eine Function voe ξ, η, ζ; φ, ϑ, ψ. ψ resp. φ sei dabei der Winkel, den die Schnittlinie der uv- und xy-Ebene mit der x- resp. u-Axe bildet, und ϑ sei der Winkel der z- und w-Axe. Geben wir zunächst dem System m nach und nach Verschiebungen parallel den Coordinatenaxen, so folgt

$$X = \frac{\partial V}{\partial \xi}, \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial \eta}, \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial \zeta}$$

Erteilen wir ferner dem System m nach und nach 3 Rotationen um die Coordinatenaxen, so erhalten wir, da sich ξ, η, ζ, ψ, ϑ, φ ändern werden:

$$L = \frac{\partial V}{\partial \sigma} = \frac{\partial V}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} + \frac{\partial V}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \sigma} + \frac{\partial V}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} + \frac{\partial V}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma} + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}$$

$$M = \frac{\partial V}{\partial \sigma'} = \frac{\partial V}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \sigma'} + \frac{\partial V}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \sigma'} + \frac{\partial V}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \sigma'} + \frac{\partial V}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial \sigma'} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma'} + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma'}$$

$$N = \frac{\partial V}{\partial \sigma''} = \frac{\partial V}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \sigma''} + \frac{\partial V}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \sigma''} + \frac{\partial V}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \sigma''} + \frac{\partial V}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial \sigma''} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma''} + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma''}$$

Hierin können wir zunächst wieder

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = X; \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} = Y; \quad \frac{\partial V}{\partial \zeta} = Z$$

setzen. Die Grössen $\frac{\partial \xi}{\partial \sigma}, \frac{\partial \eta}{\partial \sigma}, \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma}$ u. s. w. findet man durch die Bemerkung, dass hier eine parallel der yz-Ebene gerichtete Translation von der Grösse $\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}\partial\sigma$, in die Verschiebungen

$$\partial\xi = \sigma, \quad \partial\eta = \zeta\partial\sigma \quad \text{und} \quad \partial\zeta = \eta\partial\sigma$$

zu zerlegen ist; es ist also:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \sigma} = -\zeta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} = \eta$$

Ganz ebenso finden wir die der Rotationsamplitude $\partial\sigma'$ resp. $\partial\sigma''$ um die Axe parallel der y- resp. z-Axe entsprechenden Werte von $\partial\xi$, $\partial\eta$, $\partial\zeta$.

Die Grössen

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma}, \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}, \frac{\partial \psi}{\partial \sigma''}, \frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma''}, \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma'}, \frac{\partial \psi}{\partial \sigma''}, \frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma''}, \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma''}$$

ergeben sich mit Hülfe des Satzes vom Parallepiped der Rotationen von unendlich kleinen Amplituden. Denken wir uns $\partial\sigma$, $\partial\sigma'$, $\partial\sigma''$ so auf die Axen abgetragen, dass eine Amplitude, die einer Drehung im positiven oder negativen Sinne entspricht, die Richtung der betreffenden positiven oder negativen Axe hat, und projiciren diese Amplituden auf die beweglichen Coordinatenaxen der u, v, w, so erhalten wir Rotationen, welche die früheren ersetzen. Mit Hülfe der 3 bekannten Gleichungen aus der Mechanik, welche die Beziehungen zwischen den Amplituden um die beweglichen Axen und den Differentialen $\partial\psi$. $\partial\vartheta$, $\partial\varphi$, ausdrücken, gewinnen wir die drei Gleichungen:

a) $\partial\sigma(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta) +$
$\partial\sigma'(\sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta + \sin\psi\cos\varphi) +$
$\partial\sigma''\sin\varphi\sin\vartheta = \cos\varphi\,\partial\vartheta + \sin\varphi\sin\vartheta\,\partial\psi$

b) $\partial\sigma(-\sin\psi\cos\varphi\cos\vartheta - \sin\varphi\cos\psi) +$
$\partial\sigma'(\cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\psi) +$
$\partial\sigma''\sin\vartheta\cos\varphi = -\sin\varphi\,\partial\vartheta + \cos\varphi\sin\vartheta\,\partial\psi$

c) $\partial\sigma\sin\vartheta\sin\psi - \partial\sigma'\sin\vartheta\cos\psi + \partial\sigma''\cos\vartheta = \partial\varphi + \cos\vartheta\,\partial\psi$

Wir finden hieraus durch Auflösung nach $\partial\vartheta$, $\partial\varphi$ und $\partial\psi$:

$\partial\vartheta = \partial\sigma\cos\psi + \partial\sigma'\sin\psi$
$\partial\varphi\sin\vartheta = \partial\sigma\sin\psi - \partial\sigma'\cos\psi$
$\partial\psi\sin\vartheta = \partial\sigma''\sin\vartheta - \partial\sigma\sin\psi\cos\vartheta + \partial\sigma'\cos\psi\cos\vartheta$

Wenn wir also dem System m drei Rotationen von den Amplituden $\partial\sigma$, $\partial\sigma'$, $\partial\sigma''$ erteilen, so ändern sich ϑ, φ und ψ um Grössen, welche durch diese Gleichungen gegeben sind. Daraus folgt:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma} = \cos\psi, \quad \frac{\delta\varphi}{\partial\sigma} = \frac{\sin\psi}{\sin\vartheta}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} = -\frac{\sin\psi\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma'} = \sin\psi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma'} = -\frac{\cos\psi}{\sin\vartheta}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\sigma'} = \frac{\cos\psi\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma''} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma''} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\sigma''} = 1$$

Hierdurch sind L, M, N vollständig bestimmt, wenn wir

$$V = \int\int \frac{dm\,dm'}{r}$$

als Function von ψ, ϑ, φ, ξ, η, ζ dargestellt haben.

Aus unseren Untersuchungen geht also hervor, dass zur Bestimmung der Attraction der Massen m, m' die Kenntniss der Function

$$V = \int\int \frac{dm\,dm'}{r}$$

allein genügt und dass wir uns das System m' fest denken können, wenn es sich um die Bestimmung der Attraction handelt, welche das System m in der Lage, die es gerade einnimmt, von dem System m' erfährt.

Bevor ich nun dazu übergehe, jene Function V für den Fall der Attraction zweier homogenen Polyeder zu berechnen, werde ich, um den Gang der Untersuchung nicht zu unterbrechen, die Sätze, auf welche ich mich berufen habe, vorausschicken.

1.

Wenn die Functionen F_1, F_2, F_3 von x, y, z im Innern eines bestimmten Raumes endlich und stetig sind, so gilt die Gleichung

$$\iiint \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$
$$= \iint \Big(F_1 \cos(n,x) + F_2 \cos(n,y) + F_3 \cos(n,z)\Big)\, do$$

wo linker Hand über diesen bestimmten Raum und rechter Hand über dessen gesamte Oberfläche, dessen unbestimmtes Element durch do bezeichnet werden möge, zu integriren ist. (n,x), (n,y) und (n,z) sind die Winkel, welche die auf dem Elemente do nach dem Aeussern des Körpers gezogene Normale mit den positiven Axen einschliesst.

2.

Bedeutet $\varphi(\varrho)$ irgend eine Function der Entfernung ϱ des Elementes do einer ebenen Fläche von einem in dieser Ebene aber ausserhalb der geschlossenen ebenen Fläche gelegenen Punkt, so besteht, wenn man

$$\int \varrho\varphi(\varrho)\,d\varrho = \psi(\varrho)$$

setzt, die Gleichung

$$\iint \varphi(\varrho)\,do = \int \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} \cos\overline{\nu\varrho}\,.\,ds$$

wo links über die geschlossene Fläche und rechts über den Umfang derselben zu integriren ist; ds ist ein unbestimmtes Element der Begrenzung, ϱ dessen Entfernung vom angezogenen Punkte und $\overline{\nu\varrho}$ ist der Winkel, den die auf dem Elemente ds nach dem Aeussern dieser Fläche errichtete Normale ν mit dem von dem angezogenen Punkte nach ds gezogenen Radiusvector ϱ einschliesst. Liegt der Punkt aber innerhalb der geschlossenen ebenen Fläche, so ist zu dem Integral auf der rechten Seite noch der Beitrag: $-2\pi\psi(o)$ [1]) hinzuzufügen.

1) Cfr. Mertens, Bestimmung des Potentials eines homogenen Polyeders. (Crelle's Journ. Bd. 69 p. 286).

3.

Aus der Gleichung

$$r^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$$

folgt durch Differentiation

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z'^2}\right)$$

Bestimmung des Potentials zweier homogener Polyeder auf einander.

Die constante Dichtigkeit beider Körper werde ich der Einfachheit wegen der Einheit gleichsetzen, da von der Einheit verschiedene Dichtigkeiten nur einen constanten Factor involviren würden. Den Anfang des absoluten Coordinatensystems lege ich, wie schon oben bemerkt ist, in den Reductionspunkt, für welchen die Attrationskräfte von m reducirt werden sollen. Das Polyeder m resp. m' möge n resp. n' Seitenflächen besitzen. Ich werde sie dadurch bezeichnen, dass ich jeder derselben eine der Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3 . . . n resp. $1'$, $2'$, $3'$ . . . n', wo natürlich im allgemeinen n von n' verschieden sein wird, als Index beifüge. Das Polyeder m ist also begrenzt von den Flächen 1, 2 . . n und das System m' von den Flächen $1'$, $2'$ . . . n'. Allgemein werde ich eine Fläche des Systems m resp. m' durch i resp. i' bezeichnen, so dass also i resp. i' eine Zahl aus der Reihe 1, 2 . . n resp. $1'$, $2'$ . . . n' darstellt. Die Coordinaten eines Punktes der Seite i resp. i' will ich x_1, y_1, z_1 resp. x_1', y_1', z_1' nennen und die Gleichungen dieser Seiten seien in der Normalform gegeben durch

$$A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1 - D_1 = 0$$
$$A_1' x_1' + B'_1 y_1' + C_1' z_1' - D_1' = 0$$

so dass die A, B, C die Cosinus der Winkel sind, welche die vom Coordinatenanfang auf die betreffende Seite gefällte Senkrechte von der Länge D mit den positiven Richtungen der Axen einschliesst. do_i resp. do_i' sei ein unbestimmtes Element der Seite i resp. i'. Teile ich nun, wie es gewöhnlich geschieht, das System der Massen m, m' durch Ebenen parallel den Coordinatenebenen in Elemente $dx \,.\, dy \,.\, dz$; $dx' \,.\, dy' \,.\, dz'$, so ist wegen der gleich der Einheit angenommenen Dichtigkeit beider Systeme

$$dm = dx \,.\, dy \,.\, dz \quad \text{und} \quad dm' = dx' \,.\, dy' \,.\, dz'$$

Da der Abstand r der Elemente dm, dm' ausgedrückt wird durch

$$r = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

so ergiebt sich für V der Ausdruck

$$V = \iiiint\!\!\iint \frac{dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

den wir auch unter der Form

$$V = \iiint dx\,dy\,dz \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

schreiben können, und der mit Rücksicht auf den Satz 3) übergeht in

$$V = \frac{1}{2}\iiint dx\,dy\,dz \iiint dx'\,dy'\,dz' \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z'^2}\right)$$

Die Anwendung des Satzes 1) liefert dann für das über m' auszudehnende Integral ein über die Oberfläche von m' zu erstreckendes, das wir in eine Summe von Integralen zerlegen, von denen sich jedes nur auf eine einzelne Polyederfläche bezieht. Wir erhalten also

$$V = \frac{1}{2}\sum_{1'}^{n'} \iiint dx\,dy\,dz \iint do_i' \left(A_i' \frac{\partial r}{\partial x_i'}+B_i' \frac{\partial r}{\partial y_i'}+C_i' \frac{\partial r}{\partial z_i'}\right)$$

wo zunächst über die Seitenfläche i' zu integriren und darauf nach i' von $1' \ldots n'$ über alle Seiten i' zu summiren ist. Den durch die Gleichungen der betreffenden Ebenen gegebenen Grössen $A_1' B_1' C_1'$ haben wir in diesem Ausdruck für V ihre Vorzeichen zu lassen oder ihnen die entgegengesetzten zu geben, je nachdem die vom Coordinatenanfang auf die Seite i' gefällte Senkrechte die Richtung der von dem Elemente do_1' nach dem Aeussern oder Innern des Körpers gezogenen Normale hat. Durch Umkehrung der Integrationsordnung erhalten wir, wenn wir benutzen, dass

$$\frac{\partial r}{\partial x_i'} = -\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial y_i'} = -\frac{\partial r}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial r}{\partial z_i'} = -\frac{\partial r}{\partial z}$$

ist, und dass die $A_1' B_1' C_1'$ als constante Grössen vor das Integralzeichen treten können:

$$\begin{aligned} V = -\frac{1}{2}\sum_{1'}^{n'} \Big[& A_1' \iint do_1' \iiint dx\,dy\,dz \frac{\partial r}{\partial x} \\ & + B_1' \iint do_1' \iiint dx\,dy\,dz \frac{\partial r}{dy} \\ & + C_i' \iint do_1' \iiint dx\,dy\,dz \frac{\partial r}{\partial z}\Big] \end{aligned}$$

Eine nochmalige Anwendung des Satzes 1) aul die Gleichung liefert:

$$V = -\frac{1}{2}\sum_1^n \sum_{1'}^{n'} \left[(A_1'A_1 + B_1'B_1 + C_1'C_i) \iint do_i' \iint do_i' r\right]$$

wo zunächst über die Seite i zu integriren und darauf die Summation dieser Integralausdrücke über alle Seiten i zu erstrecken ist. Die Bestimmung des Vorzeichens der Grössen A_1, B_1, C_1 ist analog von A_1', B_1', C_1'. Berücksichtigen wir noch, dass $(A_1'A_1' + B_1'B_1 + C_1'C_1)$ abgesehen vom Vorzeichen gleich dem Cosinus des Neigungswinkels der Ebenen i und i' ist, den wir mit (i, i') bezeichnen wollen, so können wir V die kürzere Form geben

$$V = \frac{1}{2}\sum_1^n \sum_{1'}^{n'} \varepsilon_{ii'} \left(\cos(i, i') \iint do_1' \iint do_1' r\right)$$

wenn ε_{ii} nach dem Obigen die Werte $+1$ oder -1 annimmt.

Wir haben hierdurch V ausgedrückt durch eine Seite von $n.n'$ vierfachen Integralen von der allgemeinen Form $\iiiint do_1'.do_1.r$, bei denen sich die Integrationen über die Polyederflächen i und i' erstrecken. Um dieses vierfache Integral weiter zu behandeln, wollen wir zunächst das Doppelintegral $\iint do_1 r$ ins Auge fassen und dasselbe zur Abkürzung U nennen. Fällen wir nun von dem Elemente do_1' auf die Ebene i das Lot p_1, dessen Fusspunkt N_1 von dem Elemente do_1 um die Strecke ϱ_1 entfernt sein möge, so ist

$$r^2 = p_i^2 + \varrho_i^2$$

also

$$U = \iint do_1' \sqrt{p_1^2 + \varrho_1^2}$$

Bei Anwendung des Satzes 2) auf diesen Ausdruck erhalten wir also für den Fall, dass der Fusspunkt N_i ausserhalb der Polyederfläche i liegt:

$$U = \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{(p_1^2 + \varrho_1^2)^3}}{\varrho} \cos \overline{\nu\varrho}\, ds$$

wo über die durch eine Reihe von Kanten gebildete Begrenzung dieser Fläche zu integriren ist. Wenn N_i dagegen innerhalb der Fläche i liegt, so ist auf der rechten Seite noch $-\frac{2\pi}{3} p_i^3$ hinzuzufügen. Es möge nun allgemein unter k eine von den Ebenen ver-

standen werden, die mit der Ebene i eine Kante bildet, die wir kurz die Kante der Ebenen i und k nennen wollen. Bezeichnet dann $ds_{i,k}$ ein Element der Kante von i und k, $\varrho_{i,k}$ dessen Entfernung von dem Punkte N_i, so erhalten wir also:

$$U = \frac{1}{3} \Sigma^k \int \frac{\sqrt{(p_i^2 + \varrho^i{}_{,k}^2)^3}}{\varrho_{i,k}} \cos(\nu_{i,k},\ \varrho_{i,k})\, ds_{i,k}$$

wo nach k über alle Kanten der Seitenfläche i zu integriren ist. Fällen wir nun von dem Punkte N_i auf die Kante von i und k das Lot $N_i N_{i,k}$, das mit $q_{i,k}$ bezeichnet werden möge, so wird

$$\cos(\nu_{i,k},\ \varrho_{i,k}) = \frac{q_{i,k}}{\varrho_{i,k}}$$

wo wir dem $q_{i,k}$ das positive oder negative Vorzeichen zu geben haben, je nachdem N_i auf der innern oder äussern Seite der Kante der Seitenflächen i und k liegt. Werden die s von dem Fusspunkte $A_{i,k}$ der Senkrechten $N_i N_{i,k}$ positiv nach der einen und negativ nach der entgegengesetzten Seite hin gezählt, so wird, wenn dem Elemente $ds_{i,k}$ der Wert $s_{i,k}$ entspricht:

$$\varrho_{i,k}^2 = q_{i,k}^2 + s_{i,b}^2$$

Wir müssen dabei nach derjenigen Richtung hin integriren, nach welcher die s wachsen. Seien nun $s'_{i,k}$ und $s''_{i,k}$ die Werte von s, welche den Eckpuvkten dieser Kante entsprechen und $s'_{i,k} < s''_{i,k}$, so ist:

$$U = \frac{1}{3} \Sigma_k\, q_{i,k} \int_{s'_{i,k}}^{s''_{i,k}} \frac{\sqrt{(p_1^2 + q_{1,k}^2 + s_{1,k}^2)^3}}{q_{1,k}^2 + s_{1,k}^2}\, ds_{i,k}$$

Das jetzt zu behandelnde Integral

$$\int_{s'}^{s''} \frac{\sqrt{(p^2 + q^2 + s^2)^3}}{q^2 + s^2}\, ds$$

bei dem ich der Kürze wegen die Indices fortgelassen habe, kann zerlegt werden in

$$p^2 \int_{s'}^{s''} \frac{\sqrt{p^2 + q^2 + s^2}}{q^2 + s^2} \cdot ds + \int_{s'}^{s''} \sqrt{p^1 + q^2 + s^2} \cdot ds$$

Das erste dieser Integrale ist von Mertens in seiner Abhandlung über die Bestimmung des Potentials eines homogenen Polyeders auf einen materiellen Punkt berechnet; er findet:

$$\int_{s'}^{s''} \frac{\sqrt{p^2+q^2+s^2}}{q^2+s^2}\,ds = \log \frac{s''+\sqrt{p^2+q^2+s''^2}}{s'+\sqrt{p^2+g^2+s'^2}}$$

$$+\frac{p}{q}\operatorname{arc\,tg}\frac{ps''}{q\sqrt{p^2+q^2+s''^2}} - \frac{p}{q}\operatorname{arc\,tg}\frac{ps'}{q\sqrt{p^2+q^2+s'^2}}$$

wo die arctg zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ zu nehmen sind.

Unter Benutzung der bekannten Recursionsformel

$$\int s^m (a+bs^n)^p\,ds = \frac{s^{m+1}(a+bs^n)^p}{np+m+1} + \frac{anp}{np+m+1}\int s^m (a+bs^n)^{p-1}\,ds$$

ergiebt sich für das zweite Integral

$$\int_{s'}^{s''} \sqrt{p^2+q^2+s^2}\,.\,ds = \frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{s''+\sqrt{p^2+q^2+s''^2}}{s'+\sqrt{p^2+q^2+s'^2}}$$

$$+\frac{s''\sqrt{p^2+q^2+s''^2}}{2} - \frac{s'\sqrt{p^2+q^2+s'^2}}{2}$$

Denken wir uns jetzt den p, q, s ihre früheren Indices wiedergegeben, so stellen

$$\sqrt{p_i^2+q_{i,k}^2+s''_{i,k}{}^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{p_i^2+q_{i,k}^2+s'_{i,k}{}^2}$$

die Entfernungen $r''_{i,k}$ und $r'_{i,k}$ des Elementes do_i' von den Endpunkten der Kante von i und k dar, $s''_{i,k}$ und $s'_{i,k}$ sind ihrem absoluten Werte nach die Projectionen dieser Entfernungen auf dieselbe Kante. Substituiren wir nun in U die für die beiden Integrale gefundenen Werte, so erhalten wir also den gesuchten Ausdruck des Potentials der beiden Polyeder aufeinander in der Form

$$V = \frac{1}{6}\sum_{1'}^{n'}{}'_i \sum_{1}^{n}{}_k \varepsilon_{i,k}\cos(i,\,i')\int do_1'\Big(q_{i,k}\frac{3p_1^2+q_{i,k}^2}{2}\log\frac{s''_{i,k}+r''_{i,k}}{s'_{i,k}+r'_{i,k}}$$

$$+p_1^2\operatorname{arc\,tg}\frac{p_{i,k}\,s''_{i,k}}{q_{i,k}\,r''_{i,k}} - p_1^2\operatorname{arc\,tg}\frac{p_{i,k}\,s'_{i,k}}{q_{i,k}\,r'_{i,k}} + q_{i.k}\frac{s''_{i,k}\,r''_{i,k}}{2} - q_{i,k}\frac{s'_{i,k}\,r_{i,k}}{2}\Big)$$

$$-\frac{\pi}{3}\sum_{1'}^{n'}\Sigma_{i'}\sum_{1}^{n}\Sigma_{i}\,\varepsilon_{ii'}(\cos(i,\,i'))\int do_{i'}\,p_{i}^{3}$$

wo sich die Integration in dem letzten Gliede auf der rechten Seite über denjenigen Teil der Fläche i' zu erstrecken hat, für den N_i innerhalb der Fläche i liegt.

Zur leichteren Uebersicht sei noch einmal die Bedeutung der in dieser Gleichung vorkommenden Grössen angegeben. Es ist p_i das von dem Elemente $do_{i'}$ auf die Polyederfläche i gefällte Lot und $\varphi_{i,k}$ dasjenige, welches vom Fusspunkt N_i jenes Lotes auf die Kante der Seitenflächen i und k gefällt ist. $q_{i,k}$ erhält das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem N_i auf der inneren oder äusseren Seite dieser Kante liegt. $r''_{i,k}$ und $r'_{i,k}$ sind die Entfernungen des Elementes $do_{i'}$ von den Endpunkten der Kante und die absoluten Werte von $s''_{i,k}$ und $s'_{i,k}$ die Projectionen von $r''_{i,k}$ und $r'_{i,k}$ auf dieselbe Kante; ihre wirklichen Werte sind die den Endpunkten der Kante von i und k entsprechenden Werte von s und zwar haben wir $s'_{i,k} < s''_{i,k}$ zu nehmen. Die Summe Σ_k erstreckt sich über alle Kanten der Seitenfläche i Das Zeichen $\sum_{1}^{n}\Sigma_i$ deutet an, dass die entsprechenden Ausdrücke für alle Grenzflächen l des Polyeders m zu bilden und zu addiren sind. Die Integration erstreckt sich zunächst über die Polyederfläche i' und $\sum_{1'}^{n'}\Sigma_{i'}$ bezeichnet eine Summation über sämtliche Polyederflächen i',

Ich habe jetzt zu zeigen, wie man die Grössen p_i, $q_{i,k}$, $r''_{i,k}$, $r'_{i,k}$, $s''_{i,k}$, $s'_{i,k}$ analytisch auszudrücken und daraus V als Function jener im Eingange erwähnten 6 Grössen ξ, η, ζ. ψ, ϑ, φ darzustellen habe.

Es ist, wenn $do_{i'}$ die Coordinaten $x_{i'}$, $y_{i'}$, $z_{i'}$ hat

$$p_1 = [A_1 x_1' + B_1 y_1' + C_1 z_1' - D_1]$$

wo die eckige Klammer andeuten soll, dass wir von dem Ausdruck in der Klammer den absoluten Wert zu nehmen haben, weil in dem Ausdruck von V nur der absolute Wert von p_i in Betracht gezogen wird.

Die Grösse $q_{i,k}$ findet man leicht durch folgende Betrachtung. Es schneidet die von dem Punkte N_1 auf die Ebene k gefällte Senkrechte $N_1 O_k$ die in dem Punkte $N_{1,k}$ auf der Kante errichtete in

der Ebene k liegende Senkrechte $N_{1,k}O_k$. Dadurch entsteht das bei O_k rechtwinklige Dreieck $N_1 O_k N_{1,k}$. Der Winkel $N_1 N_{1,k} O_k$ ist also der Neigungswinkel der Ebenen i und k und kann nach Analogie unserer früheren Bezeichnung mit Wkl. (i, k) bezeichnet werden. Da nun, wie man leicht findet, N_i die Coordinaten

$$x_1' - p_1 A_1; \quad y_1' - p_1 B_1; \quad z_1' - p_1 C_1$$

hat, so ergiebt sich

$$N_1 O_k = [(x_1' - p_1 A_1) A_k + (y_1' - p_1 B_1) B_k + (z_1' - p_1 C_1) C_k - D_k]$$

wo die eckige Klammer dieselbe Bedeutung hat als vorher. Nun ist

$$q_{1,k} = \frac{A_1 D_k}{\sin(i, k)}$$

oder da

$$\cos(i, k) = \pm (A_1 A_k + B_1 B_k + C_1 C_k) \quad \text{ist}$$

$$q_{1,k} = \frac{N_1 O_k}{\sqrt{(B_1 C_k - B_k C_1)^2 + (C_1 A_k - C_k A_1)^2 + (A_1 B_k - A_k B_1)^2}}$$

Dem sich hieraus ergebenden absoluten Werte von $q_{i,k}$, den wir als Function von x_1', y_1', z_1' dargestellt haben, müssen wir dann nach den früher angegebenen Bestimmungen das positive oder negative Vorzeichen geben. Die Coordinaten der Endpunkte der Kante von i und k findet man aus den Gleichungen der 3 Ebenen i, k, l_1 und i, k, l_2, die in diesen Endpunkten zusammenstossen. Die Coordinaten werden also nur abhangen von den Grössen

$$A_1;\ B_1,\ C_1;\quad A_k,\ B_k,\ C_k;\quad A_{l_1},\ B_{l_1},\ C_{l_1};\quad A_{l_2},\ B_{l_2},\ C_{l_2}$$

Wir können also die Entfernungen $r''_{i,k}$ und $r'_{i,k}$ bestimmen. Zur Berechnung der absoluten Werte von $s'_{i,k}$ und $s''_{i,k}$ ist die Kenntniss der Cosinus derjenigen Winkel erforderlich, welch die Radienvectoren $r''_{i,k}$ und $r'_{i,k}$ einerseits und die Kante der Seitenflächen i und k anderseits mit den Coordinatenaxen einschliessen. Die 6 ersten Cosinus sind bekannt, sobald man die Coordinaten der Endpunkte der Kante gefunden hat Die 3 letzteren, die wir nach Analogie mit $A_{1,k}$, $B_{i,k}$, $C_{i,k}$ bezeichnen wollen, finden wir aus der Bemerkung, dass die Kante senkrecht steht auf den Normalen der Ebenen i und k, durch die 3 Gleichungen

$$A_1 A_{1,k} + B_1 B_{1,k} + C_1 C_{1,k} \quad A_k A_{1,k_1} + B_i B_{1,k} + C_k C_{1,k} = 0$$

und

$$N^2_{1,k} + B^2_{1,k} + C^2_{1,k} = 1$$

Wir legen nun durch einen beliebigen Punkt (ξ, η, ζ) des Polyeders m ein mit diesem fest verbundenes Coordinatensystem u, v, w, dessen Axen der Lage nach durch die oben besprochenen Winkel ψ, ϑ, φ bestimmt sein mögen. Der Kürze halber wollen wis jedoch zunächst die Cosinus der Winkel einführen, welche die beweglichen Axen mit den festen einschliessen; diese seien: a, a', a''; b, b', b''; c, c', c''. Die Gleichung der Seite i sei in Bezug auf das bewegliche Coordinatensystem in der Normalform

$$\mathfrak{A}_1 u_i + \mathfrak{B}_1 v_i + \mathfrak{C}_1 w_i - \mathfrak{D}_1 = 0$$

wo wir $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{D}_i$ als gegeben ansehen müssen. Da nun durch die Transformationsformeln

$$x = \xi + au + bv + cw, \quad y = \eta + a'u + b'v + c'w$$
$$z = \zeta + a''u + b''v + c''w$$

$$A_i x_i + B_i y_i z_i - D_i \ . \ . \ .$$

übergehen soll in $\lambda(\mathfrak{A}_i v_i + \mathfrak{B}_i v_i + \mathfrak{C}_i w_i - \mathfrak{D}_i)$, wo λ eine, noch zu bestimmende Constante ist, so folgen die Gleichungen

$$A_1 a + B_1 a' + C_1 a'' = \lambda \mathfrak{A}_1, \quad A_1 b + B_1 b_1' + C_1 b'' = \lambda \mathfrak{B}_i$$
$$A_1 c + B_1 c' + C_1 C'' = \lambda \mathfrak{C}_1, \quad D_1 - A_1 \xi - B_1 \eta - C_1 \zeta = \lambda \mathfrak{D}_1$$

Die ersteren 3 Gleichungen liefern

$$A_1 = \lambda(\mathfrak{A}_1 a + \mathfrak{B}_1 b + \mathfrak{C}_1 c), \quad B_1 = \lambda(\mathfrak{A}_1 a' + \mathfrak{B}_1 b' + \mathfrak{C}_1 c')$$
$$C_1 = \lambda(\mathfrak{A}_1 a'' + \mathfrak{B}_1 b'' + \mathfrak{C}_1 c'')$$

aus ihnen findet man

$$\lambda = \pm 1$$

durch die Bemerkung, dass

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = 1$$

ist. Die vierte Gleichung endlich bestimmt D_i. Wir haben hiermit also die $A_1 B_1 C_1 D_1$ ausgedrückt $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$; a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''. Die 9 letzteren Cosinus haben wir dann auszudrücken durch die sin und cos der ϑ, ψ, φ vermittelst der bekanntien Gleichungen. Somit haben wir V dargestellt als Functon von z, η, ζ; ψ, ϑ, φ; A_1', B_1', C_1', D_1; $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{D}_1'$, von denen die letzteren 8 Grössen von den ersten 3 unabhängig sind. Die in der Einleitung angegebenen Gleichungen gestatten uns schliesslich X, Y, Z und L, M, N zu berechnen.

Aus der eben angegebenen analytischen Darstellung der Grössen p, q, r, s geht hervor, dass wir in dem Ausdruck für das Doppel-

potential zweier homogenen Polyeder, das wir in Gestalt eines Doppelintegrals erhielten, noch eine Integration auszuführen vermögen. Zunächst erkennen wir, wenn zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon_{i,i'} \cdot \cos(i, i') = a_{i,i'}$$

gesetzt wird, dass sich in dem Integral

$$-2\pi a_{i,i'} \int do_i \cdot p_i^3$$

beide Integrationen ausführen lassen.

Betrachten wir ferner einen der Endpunkte der Kante von i und k, dem die Werte $s''_{i,k}$ und $r''_{i,k}$ entsprechen mögen, so erhalten wir in V die Summe der beiden folgenden zur Abkürzung mit A und B bezeichneten Integrale:

$$A = a_{i,i'} \int do_{1,i'} \left(q_{1,k} \frac{3p_1^2 + q\,q_{1,k}^2}{2} \log(s'_{i,k} + r''_{1,k}) + p_1^3 \operatorname{arc\,tg} \frac{p_1\, s''_{1,k}}{q_{1,k} r''_{1,k}} \right)$$

und

$$B = \int do_{i'}\, q_{i,k} \frac{s''_{i,k}\, r''_{i,k}}{2}$$

Bezeichnen wir die Coordinaten dieses betreffenden Endpunktes mit $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$, $\gamma_{i,k}$, so wird, abgesehen vom Vorzeichen,

$$s''_{1,k} = (x_1' - \alpha_{1,k}) A_{1,k} + (y_1' + \beta_{1,k}) B_{1,k} + (z_1' - \gamma_{1,k}) C_{1,k}$$

$$r''_{1,k} = \sqrt{(x_1' - \alpha_{1,k})^2 + (y_1' - \beta_{1,k})^2 + (z_1' - \gamma_{1,k})^2}$$

$$p_1 = (A_1 x_1' + B_1 y_1' + C_1 z_1' - D_1]$$

$$q_{1,k} = \lambda x_1' + \mu y_1' + \nu z_1' + \sigma$$

wenn wir zur Abkürzung die λ, μ, ν, σ, die als bekannt gelten, einführen. Diese Grössen setzen wir in A und B ein, wodurch die zu integrirenden Grössen Functionen von x_1', y_1', z_1' und

$$\mathfrak{R}(x_1', y_1', z_1') = \sqrt{(x_1' - \alpha_{1,k})^2 + (y_1' - \beta_{1,k})^2 + (z_1' - \gamma_{1,k})^2}$$

werden. Die ebene Fläche i' ist jetzt in eine endliche Anzahl von durch Grade begrenzten Teilen zu teilen, so dass in jedem Teile das Vorzeichen der Ausdrücke für $q''_{1,k}$, $s''_{1,k}$ ungeändert bleibt Teilen wir nun jeden dieser ebenen Flächenteile von i', über welchen zu integriren ist, durch Ebenen parallel der xz- und yz-Ebene in Elemente

$$do_1' = \frac{dx_1'\, dy_1'}{C_1'}$$

und drücken z_1' vermöge der Gleichung der Ebene i' als Function von x_1', y_1'' durch die Gleichung

$$z_1' = \frac{D_1'}{C_1'} - \frac{A_1'}{C_1'} x_1' - \frac{B_1'}{C_1'} y_1'$$

aus, so erhalten wir A als Summe von 2 Integralen von der Form

$$\iint dx_1' dy_1' f(x_1' y_1') \Phi(x_1', y_1' R)$$

wenn $f(x_1', y_1')$ ein ganzer Ausdruck dritten Grades in Bezug auf x_1', y_1' und Φ eine transcendente Function x_1', y_1' und $R(x_1', y_1')$ ist. R sei dabei der Ausdruck, der aus $\Re(x_1', y_1', z_1')$ dadurch hervorgeht, dass man z_1' durch x_1' und y_1' ausdrückt. Hierbei ist über alle Werte von x_1', y_1' zu integriren, welche innerhalb der Projection des betrachteten Flächenteils von i' auf die xy-Ebene liegen. Die Anwendung der teilweisen Integration ergiebt, wenn wir die Integration nach y_1' ausführen wollen, und wenn

$$\int f(x_1', y_1') dy_1' = \psi(x_1', y_1') \quad \text{ist:}$$

$$A = \Sigma \int dx_1' \left[\psi \Phi - \int dy' \psi \frac{\partial \Phi}{\partial y_1'} \right]$$

Da aus $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1'}$ die transcendenten Functionen log und arctg verschwinden, so erhalten wir unter dem Integralzeichen eine rationale Function von x_1', y_1' und $R(x_1' y_1'))$, die sich nach den bekannten Regeln der Integration durch Einführung einer neuen Integrationsvariablen rational machen lässt. Die Integration der so erhaltenen rationalen Function bietet keine principiellen Schwierigkeiten. Dass in B eine rationale Function von x_1'. y_1' und R auftritt, sieht man sofort. Wir können also auch bei B eine Integration ausführen. Dieselben Betrachtungen gelten auch für den andern Endpunkt der Kante der Seitenflächen i und k, dem die Grössen $s'_{i,k}$ und $r_{i,k}$ entsprechen mögen. Summiren wir jetzt diese Integrationsausdrücke über alle Kanten der Seitenfläche i und erstrecken dann die Summation über sämtliche Flächen i und schliesslich über sämtliche Flächen i' des Systems m', so werden wir den Ausdruck des Potentials der beiden Polyeder in Gestalt eines einfachen Integrals erhalten.

Was die Bestimmung der Attraction eines homogenen Polyeders und eines homogenen dreiaxigen Ellipsoids aufeinander anbelangt, so kann zunächst dieses letztere nach dem Maclaurin'schen Satze durch die in der Ebene der grösseren und mittleren Axe liegende confocale elliptische Scheibe ersetzt werden, deren Dichtigkeit im Elemente $d\omega$ durch die Gleichung

$$\varphi(x, y) = \frac{2abc}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2-c^2} - \frac{y^2}{b^2-c^2}} \quad \ldots a > b > c$$

gegeben wird, wenn das feste Coordinatensystem der x, y, z mit den 3 Axen a, b, c des Ellipsoids zusammenfällt. Mithin kann V in der Form des fünffachen Integrals

$$V = \int \frac{dm\, d\omega \,.\, \varphi(x, y)}{r}$$

geschrieben werden, wo die Integration über die elliptische Scheibe und über das Polyeder m zu erstrecken ist. Da nun $\int \frac{dm}{r}$ das Potential des homogenen Polyeders auf die an dem Orte des Elements $d\omega$ concentrirt gedachte Masseneinheit ist, und da sich ferner dieses Potential als geschlossener Ausdruck darstellen lässt, in welchem dieselben transcendenten Functionen wie bei der Attraction zweier homogenen Polyeder, multiplicirt mit ganzen rationalen Functionen der Coordinaten, auftreten, so erhält man V schliesslich in Gestalt eines Doppelintegrals.

Für ein verlängertes Rotationsellipsoid $a > b$, $b = c$ ergiebt sich V unmittelbar als einfaches Integral, da in diesem Falle die elliptische Scheibe in das zwischen den beiden Brennpunkten enthaltene Stück der x-Axe übergeht, dessen Dichtigkeit im Punkte x, 0, 0 gleich

$$\frac{ac^2\pi}{\sqrt{a^2-c^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2-c^2}\right)$$

also ein ganzer Ausdruck zweiten Grades von x ist

Wenn dann in ähnlicher Weise wie bei zwei homogenen Polyedern die teilweise Integration angewandt wird, lässt sich in V auch noch die letzte Integration ausführen.

V.

Eine Hypothese über das Gesetz der Dichtigkeit im Innern der Erde.

Von

Emil Oekinghaus.

Die Frage, in welcher Art und Grösse die Dichtigkeit im Innern der Erde nach dem Mittelpunkt hin sich ändert, ist wie es scheint, schon oft gestellt worden, ohne befriedigend gelöst worden zu sein. Ob überhaupt eine Möglichkeit vorhanden ist, diese Frage endgültig zu beantworten, steht um so mehr dahin, als uns über die Zusammensetzung und Verschiedenheiten der Massen sowie über die Zunahme der Temperatur, Druck, Veränderung des Aggregatzustandes des Erdinnern nichts bekannt ist, indem die Tiefen, bis wohin man die Bohrlöcher gebracht hat, in keinem Verhältniss stehen zu dem Erdhalbmesser.

Die folgenden Bemerkungen bezwecken auch durchaus nicht die definitive Lösung der Aufgabe; sie sollen vielmehr nur einen problematischen Versuch dazu bilden, und insofern wäre auch unsere Bearbeitung gegenstandslos und überflüssig, da ein directer Beweis durch Beobachtung nicht erbracht werden kann. Der Reiz aber, den das Unbekannte ausübt, wird wol immer als Entschuldigung dafür dienen können, wenn man einmal, das Bekannte verlassend, am Ariadnefaden einer Hypothese sich in die labyrinthischen Räume des Unbekannten hineinwagt.

Der Hauptgegenstand indessen, der mich bestimmte, einige Rechnungen hierüber mitzuteilen, war die vollständige Uebereinstimmung derselben mit den Versuchen und Resultaten, welche der

englische Astronom Airy im Jahre 1854 in der Kohlengrube Harton bei Newcastle zwecks Bestimmung der mittleren Erddichte erhalten hat.

Auf Grund der Ansicht, dass die Dichtigkeit der Erdschichten nach dem Mittelpunkt hin stetig zunehme, muss die wachsende Beschleunigung der Schwere eine Beschleunigung der Oscillationen des Pendels hervorbringen. Vermittelst des elektrischen Telegraphen ergaben die Vergleiche im Gang des oberen und unteren Pendels für letzteres eine Beschleunigung von $2^1/_4$ Secunden pro Tag in einer Tiefe von $383\,m$. Diesen Bestimmungen gemäss fand Airy für die mittlere Dichtigkeit der Erde den Wert 6,566.

Wir nehmen an, dass analog dem durch eine Exponentialfunction sich darstellende Gesetz der Dichtigkeit der Atmosphäre das Gesetz der Dichtigkeit der concentrisch gelagerten Erdschichten sich ebenfalls durch eine entsprechende Function darstellen lasse. Dieselbe sei

1) $$\delta = D e^{-kx^3}$$

Hierin bedeute δ die Dichte in der Kugelschicht vom Halbmesser x, D diejenige des Erdkerns, k eine Constante, x sei in Teilen des Erdhalbmessers $a = 1$ ausgedrückt.

Die Masse der Kugel vom Radius x ist demnach

$$M_x = 4\pi D \int_0^x e^{-kx^3} x^2 dx$$

also

2) $$M_x = \tfrac{4}{3}\pi \frac{D}{k}(1 - e^{-kx^3})$$

Die Gesamtmasse der Erde ist folglich

3) $$M = \tfrac{4}{3}\pi \frac{D}{k}(1 - e^{-k})$$

Wenn nun die mittlere Dichte der Erde $= \varrho$ ist, so folgt vermöge $M = \tfrac{4}{3}\pi\varrho$ aus den beiden letzten Bestimmungen

4) $$\varrho = \frac{D}{k}(1 - e^{-k})$$

und bezeichnet noch δ_0 die Dichte der obersten Schicht, so gewinnt man vermöge

5) $$\delta o = De^{-k}$$

die Relation

6) $$\varrho = \frac{\delta o}{k}(e^k - 1)$$

Um die Beschleunigungen zu finden, welche die Kugeln vom Halbmesser x und 1 auf einen Punkt ihrer Oberflächen ausüben, haben wir gemäss der Attractionstheorie die Massen derselben durch das Quadrat ihrer Radien zu dividiren. Man hat also

$$g_x : g = \frac{1 - e^{-kx^3}}{x^2} : \frac{1 - e^{-k}}{1^2}$$

7) $$\frac{g_x}{g} = \frac{1 - e^{-kx^3}}{x^2(1 - e^{-k})}$$

Die Pendelformel

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

zeigt nun, dass die Quadrate der Schwingungszeiten gleichlanger Pendel sich umgekehrt wie die Beschleunigungen an den Beobachtungsorten verhalten. Es ist also

8) $$\frac{t^2}{t_x^2} = \frac{g_x}{g}$$

und vermöge der vorhergehenden Relation

9) $$\frac{t^2}{t_x^2} = \frac{1 - e^{-kx^3}}{x^2(1 - e^{-k})}$$

Wir differentiiren diese Gleichung in der Form

$$t_x^2(1 - e^{-kx^3}) = Cx^2$$

und erhalten

$$2(1 - e^{-kx^3})t_x \frac{dt_x}{dx} + 3kt_x^2 x^2 e^{-kx^3} = 2Cx$$

d. i.

10) $$\frac{x}{t_x}\frac{dt_x}{dx} + \tfrac{3}{2}\frac{kx^3}{(e^{kx^3} - 1)} = 1$$

Da aber die durchbrochene Schicht des $385\,m$ tiefen Schachtes nur 1/16621,7 des Erdhalbmessers beträgt, so können wir auch noch für weit grössere Tiefen den letzten Ausdruck vereinfachen in

11) $$\frac{dt}{t\,dx} = 1 - \tfrac{3}{2}\frac{k}{e^k - 1}$$

dx bedeutet die Zunahme von x nach Aussen, dt die Zunahme der Oscillationsdauer des Pendels im Punkte x.

Bezeichnen wir daher mit Δy die Tiefe des Schachtes und mit Δt die Abnahme der Oscillationszeit in dieser Tiefe, so ist

12) $$\frac{\Delta t}{t\,\Delta y} = 1 - \tfrac{3}{2}\frac{\delta o}{\varrho}$$

Da aber nach den Bestimmungen Airy's

$$\Delta y = \frac{1}{16621{,}7}$$

ist, so erhalten wir nach Einsetzung dieses Ausdruckes und

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{2^1/_4}{86400}$$

in die obige Formel die Relation

$$\frac{\delta o}{\varrho} = \tfrac{2}{3}\left(1 - \frac{\Delta t}{t\,\Delta y}\right) = \tfrac{2}{3}\left(1 - 16621{,}7 \cdot \frac{2^1/_4}{86400}\right) = \tfrac{2}{3}(1 - 0{,}4328)$$

oder

$$\frac{\delta o}{\varrho} = 0{,}3781$$

welches das Verhältniss ausdrückt zwischen der Oberflächendichte und der mittleren Erddichte.

Da nun die Dichtigkeit der oberen Schicht zu 2,5 bestimmt wurde, so erhalten wir endlich als mittlere Dichte der Erde

13) $$\varrho = 6{,}61$$

ein Resultat, welches von dem Werte Airys

$$\varrho = 6{,}566$$

nur wenig abweicht.

Wenn man nun in der gefundenen Zahl nicht ein Spiel des Zufalls erblicken will, der ja allerdings nicht ausgeschlossen ist, so wird man immerhin das zu Anfang definirte Gesetz der Zunahme der Dichtigkeit als möglicherweise der Wahrheit sehr nahe kommend anerkennen können.

Man bemerke, dass in der Bedingungsgleichung für die obersten Schichten der Ausdruck k nicht vorkommt.

Um denselben zu bestimmen, benutzen wir zunächst den Ausdruck

14) $$\frac{\varrho}{\delta o} = \frac{e^k - 1}{k}$$

eine in Bezug auf k transcendente Gleichung. Man findet

$$k = 1{,}707$$

Damit kann man endlich noch die Dichte des Mittelpunkts der Erde berechnen. Vermittelst der Formel

$$D = \delta o e^k$$

folgt

15) $$D = 13{,}78$$

ein Wert, welcher das specifische Gewicht des Quecksilbers um ein Geringes übertrifft.

Die Dichte in einer beliebigen Entfernung vom Mittelpunkte ist demnach

16) $$\delta = 13{,}78\, e^{-1{,}707 x^2}$$

Die Bestimmung der Constanten dieser Gleichung beruhte lediglich auf den Beobachtungsarten Airy's, und die Gleichung kann als Ausdruck des Gesetzes für den Fall gelten, dass diese Werte auf der ganzen Erdoberfläche dieselben sind. Hierüber liegen aber nur wenig Beobachtungstatsachen vor.

Indessen sind in neuerer Zeit Untersuchungen über Schwerebestimmungen in verschiedenen Tiefen durch v. Sterneck in Adalbertschacht des Silberbergwerkes in Pribram (1883) und im Abrahamschachte bei Freiberg (1885) in Sachsen angestellt worden. Die Beobachtungen ergeben, dass die Schwere im Innern der Erde grösser ist, als an der Oberfläche, dass aber die Zunahme an den verschiedenen Orten sehr verschieden sei. In Harton nimmt sie bei 383 m Tiefe ebensoviel zu, als in Pribram bei 623 m und in Freiberg bei etwa 400 m.

Es wäre demnach sehr wünschenswert, wenn diese Versuche an recht vielen Punkten des Erdballs fortgesetzt würden, um durch eine Reihe von Beobachtungswerten den mittleren Wert Δt festzustellen, welcher einer bestimmten Tiefe Δy, etwa gleich 500 m, annähernd entspricht. Wie es scheint, muss die Tiefe, welche der Hartoner Zeit von $2^1/_4$ Secunden entspricht, im allgemeinen grösser angenommen werden. Unter der Voraussetzung, dass die Oberflächendichte überall die gleiche sei, nämlich 2,5 wollen wir für Δy die mittlere Tiefe von 500 m in Teilen des Radius zu Grunde legen,

da dieselbe für $\Delta t = 2^1/_4$ gleicher Schwerezunahme den Tiefen $400m$ und 623 ungefähr im Mittel entsprechen dürfte.

Setzt man diese Werte in 12) ein, so erhalten wir als mittlere Dichte

17) $$\varrho = 5{,}6$$

einen Wert, welcher den aus andern Beobachtungen und Berechnungen abgeleiteten Werten von ϱ sehr nahe kommt.

Die Dichte des Erdmittelpunkts ist nun wegen $k = 1{,}4$

18) $$D = 10{,}375$$

also etwas kleiner und wahrscheinlich genauer, als der erste Wert.

Die gefundene Zahl entspricht ungefähr dem specifischen Gewicht des Silbers.

Diese Zahlen dürften es möglich erscheinen lassen, dass die oben angenommene mittlere Tiefe von $500m$ anstatt der des Hartoner Schachtes von $383m$ in Bezug auf gleiche und dem letzteren entsprechende Schwerezunahme gewählt werden muss. Hierüber können indessen nur Beobachtungen entscheiden.

Die Beschleunigung in der Kugelschicht vom Radius x ist

$$\frac{g_x}{g} = \frac{1 - e^{-kx^3}}{x^2(1 - e^{-k})}$$

Dieselbe ist im Mittelpunkt = null. Sie erleidet von aussen nach innen zuerst eine Zunahme, dann eine Abnahme. Ihren Maximalwert erhält man aus der differentiirten Gleichung, er ergiebt sich aus

19) $$e^u = \tfrac{3}{2}u + 1, \quad u = kx^3$$

$$u = 0{,}768$$

woraus $$x = 0{,}818 \quad \text{folgt.}$$

Der grösste Wert der Beschleunigung liegt also der Oberfläche verhältnismässig nahe, da der betreffende Radius $^4/_5$ des Erdhalbmessers ist. Die Berechnung des entsprechenden Wertes von g_x ergiebt $10{,}31m$ in der Tiefe von weniger als $^1/_5$ des Erdhalbmessers. Von da an nimmt sie wieder ab. Der Ort, wo sie wieder dem Werte von g an der Oberfläche gleich ist, ergiebt sich aus

20) $$1 - e^{-kx^3} = x^2(1 - e^{-k})$$

$$x = 0{,}605$$

Diese Verhältnisse werden erklärlicher, wenn man die Dichtigkeitscurve

21) $$y = De^{-kx^3}$$

construirt. Man hat zunächst

$$\frac{dy}{dx} = -3kDx^2e^{-kx^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3kDx(3kx^3 - 2)e^{-kx^3}$$

Hieraus erkennt man, dass die Curve einen Wendepunkt besitzt, bestimmt durch

$$x^3 = \frac{2}{3k}$$

$$x = 0{,}723$$

Von aussen nach innen gerechnet steigt also die Dichtigkeit sehr rasch. Bis zu der Tiefe von ungefähr stark $^1/_4$ des Erdhalbmessers wächst die Dichtigkeit von 2,5 auf 5,3, also auf fast die mittlere Dichtigkeit, was die rasche Zunahme der Beschleunigung erklärlich macht.

Von Interesse ist noch die Bestimmung des Maximums der Schwere. Die Schwere eines *cdm* Wasser ist an der Oberfläche $1\,kg$. Im Mittelpunkt ist die Schwere null. Dieselbe hängt nämlich von der Masse und der entsprechenden Beschleunigung ab und ist

$$= mg$$

oder, da δ die Masse in der Volumeneinheit ist

$$= \delta \,.\, g_x$$

Hiernach haben wir folgendes Verhältniss der Schwere oder des Druckes einer Volumeneinheit in einem Punkte x im Vergleich zur Schwere an der Oberfläche

22) $$\frac{m_x g_x}{mg} = \frac{1 - e^{-kx^3}}{x^2(1 - e^{-k})} e^{k(1-x^3)}, \quad mg = 2{,}5\,kg = \delta o$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass die Schwere im Mittelpunkt ($x = 0$) = null ist. Es ist also möglich, dass auch hier ein Maximalwert existirt. Wir differentiiren die Gleichung und erhalten als Bedingungsgleichung

23) $$e^u = \frac{1+3u}{1+\frac{3}{2}u}, \quad kx^3 = u, \quad k = 1{,}4$$

woraus

$$u = 0{,}231$$

und

$$x = 0{,}5485$$

Das Maximum der Schwere liegt also ungefähr in der Mitte des Erdhalbmessers.

Das obige Verhältniss wird nun

24) $$\frac{\frac{3}{2}(1+\frac{3}{2}u)\,u\,e^k}{x^2(1+3u)^2(1-e^{-k})} \quad \text{d. i.} = 3.$$

Hiernach ist die Schwere oder der Druck eines bestimmten Volumens in dem bezeichneten Orte dreimal so gross als der eines gleichen Volumens an der Erdoberfläche.

In der oberen Hälfte des Radius wächst also die Schwere beträchtlich nach der Mitte zu an, worauf sie dann wieder bis zum Centrum abnimmt. Wir wollen noch das Gewicht des ganzen Erdballs bestimmen. Ist der Radius einer Kugel $= a = 1$ und ϱ ihre mittlere Dichtigkeit, so ist ihr Gewicht, wenn alle Teile gleich schwer sind

$$G_1 = 4\pi \int_0^a \varrho r^2\, dr = \tfrac{4}{3}\pi a^3 \varrho = \tfrac{4}{3}\pi\varrho$$

Sind dagegen die Teile nicht gleich schwer, aber gleichförmig dicht, so ist, wenn die Attraction dem Abstand vom Centrum proportional ist,

$$G_2 = 4\pi \int_0^a \varrho r^2 \cdot \frac{r}{a}\, dr = \pi\varrho a^3 = \pi\varrho$$

also kleiner.

Führen wir nun für ϱ ein

$$\delta = De^{-kx^2}$$

so folgt zunächst vermöge 22)

25) $$G_3 = \frac{4\pi\,\delta_0 e^k}{1-e^{-k}} \int_0^1 (e^{-kx^2} - e^{-2kx^2})\, dx$$

oder

$$G_3 = \frac{\pi\delta o k c^k}{1-e^{-k}}\left(1-\frac{4}{1.2}\frac{(2^2-1)k}{7}+\frac{4}{1.2.3}\frac{(2^3-1)k^2}{10}\right.$$
$$\left.-\frac{4}{4!}\frac{(2^4-1)k^3}{13}+\frac{4}{5!}\frac{(2^5-1)k^4}{16}\cdots\right)$$

Hieraus folgt der Wert

$$G_3 = 7{,}07\,\pi$$

welcher von dem mittleren Werte

$$G_1 = \tfrac{4}{3}\pi\varrho = 7{,}46\,\pi$$

wenig verschieden ist.

Laplace entwickelt im II. Band seiner Mechanik des Himmels eine Differentialgleichung 2 Ordnung, vermittelst welcher die Abplattung des Erdsphäroides bestimmt werden kann, wenn das Gesetz der Dichtigkeit der Erde bekannt ist.

Sie kann in folgender Form aufgestellt werden:

26) $$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{6kx^2e^{-kx^3}}{1-e^{-k}}\frac{dy}{dx}-\frac{6y}{x^2}\left(1-\frac{kx^3e^{-kx^3}}{1-e^{-k}}\right)=0$$

Ist hieraus y bestimmt, so folgt die Abplattung der Erde bis auf Grössen 2. Ordnung genau vermittelst

27) $$p = \frac{1/289\,y}{2y-\dfrac{6k}{5(1-e^{-k})}\displaystyle\int_0^1 e^{-kx^3}d(yx^5)}$$

Führt man ein

28) $$y = Ax^3-Bx^6+Cx^9-Dx^{12}+\cdots$$

worin A als Constante des Integrals $= 1$ angenommen werden darf, so erhält man folgende Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten

$$(5.6-6)B-(8.9-6)Cx^3+(11.12-6)Dx^6$$
$$-14.15-6)Ex^9+\cdots = 6B\left(1-kx^3+\frac{k^2x^6}{1.2}-\frac{k^3x^9}{3!}+\cdots\right)$$
$$\times(4-7Bx^3+10x^6-13Dx^9\cdots)$$

und man gewinnt der Reihe nach die Werte

$$B = \frac{k}{1-e^{-k}}$$

$$C = \frac{B}{11}(7B+4k)$$

$$D = \frac{B}{21}(10C + 7kB + 2k^2)$$

$$E = \frac{B}{34}(13D + 10kC + \tfrac{7}{2}Bk^2 + \tfrac{2}{3}k^3)$$

$$F = \frac{B}{50}(16E + 13kD + 5k^2C + \tfrac{7}{6}k^3B + \tfrac{1}{6}k^4)$$

Da indessen die Reihe 28) für $k = 1{,}4$ divergirt, so ist die Reihenform unzulässig und es ist deshalb schwierig, den Wert von y und damit den obigen Ausdruck für p zu erhalten. Man sieht aber, dass es von besonderem Interesse sein würde, einen theoretischen Wert von

$$p = \frac{a - b}{a}$$

aus den obigen Gleichungen herzuleiten und denselben mit dem bekannten zu vergleichen. Vielleicht ist es nicht ausgeschlossen, dass auf anderem Wege dennoch eine Lösung gefunden werden kann, wenn sie in Angriff genommen wird.

VI.

Ueber successive Fusspunktspolygone.

Von

H. Schotten, Dr. ph.

In Jahrgang 34 p. 311 der Zeitschrift für Mathematik und Physik habe ich eine Verallgemeinerung des bekannten Simson'schen Satzes nach der Richtung hin veröffentlicht, dass es sich nicht um Lote, sondern um Gerade handelt, die unter einem beliebigen, aber bestimmten Winkel gegen die Seiten des Dreiecks geneigt sind. Der verallgemeinerte Satz lautet: „Zieht man von einem Punkte des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises unter beliebigem, aber gleichem Winkel Strahlen nach den drei Seiten, so liegen die Durchschnittspunkte auf einer Geraden." Es ergab sich, dass in diesem Falle zwei Gerade resultiren, die für den Specialfall des Simson'schen Satzes in eine zusammenfallen. Zugleich wurde auf einige Folgerungen näher eingegangen und auf den Zusammenhang mit früheren Arbeiten von mir hingewiesen [1]).

In den folgenden Zeilen handelt es sich um eine anderweite Verallgemeinerung des Simson'schen Satzes, worin eine Ausdehnung auf Polygone gewonnen wird.

1) Ueber einige bemerkenswerte Gattungen der Hypocykloiden. — In.-Diss. Marburg 1883. Ueber Fusspunktscurven. — Progr. — Hersfeld 1887.

Allgemeiner Satz: Fällt man auf die Seiten eines Sehnen-n-ecks Lote von einem Punkte P des Umkreises, so resultirt als Fusspunktenfigur ein n-eck mit einer einspringenden Ecke; fällt man wiederum (von demselben Punkte P aus) auf die Seiten dieses Fusspunkten-n-ecks Lote, so resultirt als zweite Fusspunktenfigur ein n-eck mit zwei einspringenden Ecken u. s. f. Ist die Zahl der überhaupt möglichen einspringenden Ecken erreicht, so ergibt sich schliesslich als Fusspunktenfigur (immer denselben Punkt P als Pol vorausgesetzt) eine Gerade. Führt man diese Construction für P_1 und P_2 als Pole aus, unter der Voraussetzung, dass P_1 und P_2 Gegenpunkte des Umkreises sind, so sind die resultirenden beiden Geraden

1) parallel, wenn n gerade ist,

2) senkrecht zu einander, wenn n ungerade ist.

Da die Zahl der möglichen einspringenden Ecken $(n-3)$ beträgt, so hat man $(n-2)$ mal die Construction der Fusspunktenfigur auszuführen, bis man die Gerade erhält.

Von diesem allgemeinen Satze ist der bekannte Simson'sche Satz ein Specialfall: und es leuchtet ein, dass auch der von mir jetzt aufgestellte Satz ebenso noch der Erweiterung fähig ist, wie der Simson'sche, nämlich nach der Richtung hin, wie dies l. c. von mir geschehen ist. Die im Simson'schen Falle einem Paar Gegenpunkte entsprechenden Geraden — ein sogenanntes Paar — stehen senkrecht zu einander. Die Zahl der möglichen einspringenden Ecken ist hier 0, die Anzahl der Constructionen daher eins; und die senkrechte Lage von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ folgt, weil n ungerade ist. Einer besonderen Figur wird es für diesen Fall nicht bedürfen.

Es sei gestattet, noch weitere Specialfälle zu betrachten.

1) Das Viereck. — Es sei in Figur 1) $ABCD$ das gegebene Viereck; Z der Mittelpunkt des Umkreises; P_1 und P_2 seien zwei Gegenpunkte des Kreises und die Pole für die Construction der Fusspunktenpolygone resp. der Geraden. Die dem Pole P_1 entsprechenden Punkte tragen ebenfalls den Index 1; die P_2 entsprechenden den Index 2; es ist also $E_1 F_1 G_1 H_1$ das dem Pole P_1 entsprechende Fusspunktenviereck von $ABCD$ und $\mathfrak{G}_1$ die zugehörige Gerade, während das Fusspunktenviereck $E_2 F_2 G_2 H_2$ und die Gerade $\mathfrak{G}_2$ dem Pole P_2 entsprechen. Mit Hülfe congruenter Dreiecke lässt sich leicht nachweisen, dass

$$AE_1 = BE_2, \quad BF_1 = CF_2, \quad CG_1 = DG_2, \quad DH_1 = AH_2,$$

es ergibt sich sofort, dass auch

$$AE_2 = BE_1, \quad BF_2 = CF_1, \quad CG_2 = DG_1, \quad DH_2 = AH_1$$

ist. E_1 und E_2 liegen demnach symmetrisch gegen A und B, F_1 und F_2 gegen B und C, G_1 und G_2 gegen C und D, H_1 und H_2 gegen D und A. Je zwei, wie z. B. E_1 und E_2 liegen gleichweit von Z entfernt. Die Zahl der möglichen einspringenden Ecken ist 1, die Anzahl der Constructionen also 2; das resultirende Paar ist parallel, da n gerade ist.

2) Das Fünfeck. — Es sei in Fig. 2) $ABCDE$ das gegebene Fünfeck; Z der Mittelpunkt des Umkreises; P_a und P_b seien zwei Gegenpunkte des Kreises und die Pole für die Constructionen. Die dem Pole P_a entsprechenden Punkte tragen ebenfalls den Index a und daneben die der Construction entsprechende Ziffer. Demgemäss werden die dem Pole entsprechenden Fusspunktspolygone $F_{a_1} G_{a_1} H_{a_1} J_{a_1} K_{a_1}$, $F_{a_2} G_{a_2} H_{a_2} J_{a_2} K_{a_2}$, während die zugehörige Gerade mit $\mathfrak{G}_a$ bezeichnet ist; dem Pole P_b entsprechen die Fusspunktspolygone $F_{b_1} G_{b_1} H_{b_1} J_{b_1} K_{b_1}$ und $F_{b_2} G_{b_2} H_{b_2} J_{b_2} K_{b_2}$ sowie die Gerade $\mathfrak{G}_b$. — Die Zahl der möglichen einspringenden Ecken ist 2, die Anzahl der Constructionen 3 (rechnet man die resultirende Gerade als Fusspunktsfigur mit, so ist deren Anzahl gleich der Anzahl der Constructionen). Im Uebrigen finden analoge Beobachtungen über die symmetrische Lage der neuen Ecken statt wie beim Viereck. Das resultirende Paar steht senkrecht zu einander.

Es erübrigt noch in dieser vorläufigen Notiz die Frage zu berühren, welche Abweichungen vom allgemeinen Fall eintreten, wenn P besondere Lagen einnimmt. Es ergibt sich, dass, wenn P mit einer Ecke des Sehnenpolygons zusammenfällt, die Constructionen sich wesentlich vereinfachen, während allerdings ihre Anzahl unverändert bleibt. Die Fusspunktenfiguren haben in diesem Falle immer mindestens eine Ecke weniger: die einspringenden Ecken fallen auf jeden Fall jedesmal fort. So gelangt man beim Fünfeck, wenn der Pol mit einer Ecke zusammenfällt, erst zu einem Viereck, dann zu einem Dreieck, schliesslich zu einer Geraden, die in diesem Falle dann immer mit einer Ecke der Fusspunktspolygone zusammenfällt und auch auf der resultirenden Geraden liegt, oder mit andern Worten, wenn der Pol mit einer Ecke des gegebenen n-ecks zusammenfällt, so enthält die resultirende Gerade den Pol. Führt man die Constructionen bei einem regelmässigen $2n$-eck aus, so fallen die

beiden Parallelen, die einem Paar Gegenpunkte entsprechen, also ein sogenanntes Paar bilden, in eine zusammen. Ferner zeigen auch im allgemeinen Falle die Fusspunktsfiguren, die zum Gegenpunkte eines solchen Poles gehören, besondere Beziehungen.

Die weitere Bearbeitung dieses Problems, besonders die Untersuchung der Beziehungen zwischen den verschiedenen Fusspunktsfiguren und die Untersuchung der Enveloppe der resultirenden Geraden, wenn P alle Punkte des Umkreises durchläuft; ferner die Erweiterung, dass die Strahlen nicht rechtwinklig, sondern unter beliebigem, aber festem Winkel gegen die Seiten gezogen werden; endlich die Ausdehnung des Problems auf Curven, sowie die Feststellung des Zusammenhangs dieser Untersuchungen mit den Steinerschen bleibt späterer Bearbeitung vorbehalten.

Schmalkalden, den 4. October 1892.

VII.

Einaxige Polyeder von kleinster Oberfläche bei constantem Inhalt.

Von

R. Hoppe.

Unter einem einaxigen Körper sei ein Körper verstanden, der sich durch $n \geqq 3$ Ebenen, die sich in einer Geraden, der Axe, schneiden, in n congruente Sectoren, bestehend aus je 2 symmetrischen Hälften, zerlegen lässt, so dass die Grenzflächen der benachbarten Sectoren einander decken.

Ferner sollen 2 Polyeder mit gleichvielen Ecken gleichgeordnet heissen, wenn nur entsprechende Ecken durch Kanten verbunden sind.

Demgemäss heisse ein Polyeder einaxig geordnet, wenn es einem einaxigen Polyeder gleichgeordnet ist.

Wird nun ein Polyeder, das aus 2 symmetrischen Hälften besteht, in ein gleichgeordnetes von gleichem Inhalt unendlich wenig deformirt, so wird seine Oberfläche, wofern sie nicht constant ist, stets vergrössert. Auf einen Beweis dieses Satzes gehen wir nicht ein, da er bloss die Auswahl von Polyedern motiviren soll. Da nämlich die Grenzebenen der Sectoren einaxiger Polyeder, sowie die ihrer Hälften Symmetrieebenen des ganzen Polyeders sind, so folgt, dass das Minimum der Oberfläche eines einaxig geordneten Polyeders einem einaxigen Polyeder zukommt. Alle Resultate der Untersuchung einaxiger Polyeder in Bezug auf ihre Minimaloberfläche lassen sich

also sofort auf ihre gleichgeordneten anwenden, und wenn überdies das Polyeder von einer die Axe normal schneidenden Ebene symmetrisch geteilt wird, so gilt dasselbe Minimum auch für alle symmetrisch und gleich geordneten Polyeder.

Im Folgenden will ich die einfachsten Polyeder, nämlich Prisma, Pyramide und deren Zusammensetzungen, welche mutmasslich schon berechnet worden sind, nur resultatweise mitaufführen und zu diesen noch das Prismatoid nebst seinen Zusammensetzungen mit den vorigen samt Berechnung hinzufügen. Es sei stets vorausgesetzt, dass jede Symmetrie, die bei den untersuchten Polyedern stattfindet, bei allen Variationen erhalten bleibt. Zur gleichmässigen Bezeichnung sei P Inhalt, F Oberfläche des Polyeders, $\lambda = \frac{n}{4}$ Rechten,

$$B = \frac{n}{4} a^2 \cot 2\lambda$$

ein regelmässiges $n$eck von der Seite a.

I. Prisma von von der Höhe h über der Basis B.

$$P = \frac{n}{4} a^2 h \cot 2\lambda; \quad F = na\left(h + \frac{a}{2}\cot 2\lambda\right)$$

für kleinstes F bei constantem P

$$h = a\cot 2\lambda; \quad P = \frac{n}{4} a^3 \cot^2 2\lambda; \quad F = \frac{3n}{2} a^2 \cot 2\lambda$$

für $P = 1$

$$F = 3(2n \operatorname{tg} 2\lambda)^{1/3}$$

II. Pyramide von der Höhe h über der Basis B.

$$P = \frac{n}{12} a^2 h \cot 2\lambda; \quad F = \frac{n}{4} a(a\cot 2\lambda + 2q_1)$$

$$q_1^2 = \frac{a^2}{4}\cot^2 2\lambda + h^2$$

für kleinstes F bei constantem P

$$h = \sqrt{2}\, a \cot 2\lambda; \quad P = \frac{n}{6\sqrt{2}} a^3 \cot^2 2\lambda; \quad F = n a^2 \cot 2\lambda$$

für $P = 1$

$$F = 2(9n \operatorname{tg} 2\lambda)^{1/3}$$

III. Doppelpyramide von der Höhe $h + h$ über und unter der Basis B.

$$P = \frac{n}{6} a^2 h \cot 2\lambda; \quad F = n a q_1 \quad (q_1 \text{ wie in II.})$$

für kleinstes F bei constantem P

$$h = \frac{a}{\sqrt{2}} \cot 2\lambda; \quad P = \frac{n}{6\sqrt{2}} a^2 \cot^2 2\lambda; \quad F = \frac{n\sqrt{3}}{2} a^2 \cot 2\lambda$$

für $P = 1$

$$F = 3 (n \sqrt{3} \operatorname{tg} 2\lambda)^{1/3}$$

IV. Prisma von der Höhe h auf der Basis B mit 1 pyramidalen Aufsatz von der Höhe k auf der Endfläche.

$$P = \frac{n}{12} a^2 (3h + k) \cot 2\lambda; \quad F = na \left(h + \frac{a}{4} \cot 2\lambda + \frac{1}{2} q \right)$$

$$q^2 = \tfrac{1}{4} a^2 \cot^2 2\lambda + k^2 \qquad (1)$$

für kleinstes F bei constantem P

$$h = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} a \cot 2\lambda; \quad k = \frac{a}{\sqrt{5}} \cot 2\lambda$$

$$P = n \frac{3+\sqrt{5}}{24} a^3 \cot^2 2\lambda; \quad F = n \frac{3+\sqrt{5}}{4} a^2 \cot 2\lambda$$

für $P = 1$

$$F = \{qn (3+\sqrt{5}) \operatorname{tg} 2\lambda\}^{1/3}$$

V. Prisma von der Höhe h auf der Basis B mit 2 pyramidalen Aufsätzen von der Höhe k auf beiden Endflächen.

$$P = \frac{n}{12} a^2 (3h + 2k) \cot 2\lambda; \quad F = na(h+q) \quad (q \text{ wie in IV,})$$

für kleinstes F bei constantem P

$$h = k = \frac{a}{\sqrt{5}} \cot 2\lambda$$

$$P = \frac{n\sqrt{5}}{12} a^3 \cot^2 2\lambda; \quad F = \frac{n\sqrt{5}}{2} a^2 \cot 2\lambda$$

für $P = 1$

$$F = (18\sqrt{5} \cdot n \operatorname{tg} 2\lambda)^{1/3}$$

VI. Prismatoid von der Höhe h auf der Basis B.

Ein einaxiges Prismatoid wird eingeschlossen von 2 congruenten regelmässigen $n$ecken als Endflächen B auf 2 parallelen Ebenen im

Abstande gleich der Höhe h und mit Mittelpunkten auf der Axe liegend und von $2n$ gleichschenkligen Dreiecken D, deren Grundlinie eine Kante a der einen Endfläche, deren Spitze eine Ecke der andern ist.

Es lässt sich zerlegen in $2n$ congruente sechsseitige Fünfecke, deren jedes aus 2 Tetraedern besteht. Sind $A_0, A_2, A_4, \ldots$ die Ecken der einen Endfläche, $A_{-1}, A_1, A_3, \ldots$ die der andern, H_0, H_1 die gleich hohen Punkte der Axe, und nimmt man die Axe zur zAxe, die xAxe parallel H_0A_0 durch H_1, so ist die Tabelle der Coordinaten der Ecken jenes Fünfecks:

	x	y	z
A_{-1}	$c\cos 2\lambda$	$-c\sin 2\lambda$	0
A_0	c	0	h
A_1	$c\cos 2\lambda$	$c\sin 2\lambda$	0
H_0	0	0	h
H_1	0	0	0

wo $a = 2c\sin 2\lambda$, und nach absoluten Werten sind jene 2Tetraeder:

$$A_{-1}A_0A_1H_1 = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} c\cos 2\lambda & -c\sin 2\lambda & 0 \\ c & 0 & h \\ c\cos 2\lambda & c\sin 2\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{6}c^2h\sin 2\lambda\cos 2\lambda$$

$$A_0A_1H_0H_1 = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} c & 0 & h \\ c\cos 2\lambda & c\sin 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{6}c^2h\sin 2\lambda$$

Ihre Summe ist das gesuchte Fünfeck, daher, wenn zur Abkürzung

$$\mu = \frac{1+2\cos 2\lambda}{2\cos 2\lambda}$$

gesetzt wird:

$$P = \frac{n}{6}\mu a^2 h\cot 2\lambda$$

Der Mantel von P teilt sich in $2n$ gleichschenklige Dreiecke. Grundlinie ist a, Höhe sei r, Fusspunkt derselben C_0; dann sind dessen Coordinaten:

$$x = c\cos 2\lambda; \quad y = 0; \quad z = 0$$

also

$$r^2 = (A_0 C_0)^2 = c^2(1-\cos 2\lambda)^2 + h^2 = \frac{a^2}{4}\operatorname{tg}^2\lambda + h^2 \qquad (2)$$

und der Mantel wird $= nar$, **daher nach Addition der 2 Endflächen, d. i. der zwei** B

$$F = na\left(r + \frac{a}{2}\cot 2\lambda\right)$$

Bedingungen des constanten P **und kleinsten** F **bei variirenden** a **und** h **sind die Gleichungen:**

$$a\partial h + 2h\partial a = 0$$

$$(r + a\cot 2\lambda)\partial a + \frac{a}{r}\left(\frac{a\partial a}{4}\operatorname{tg}^2\lambda + h\partial h\right) = 0$$

woraus nach Elimination von ∂h:

$$a^2\operatorname{tg}^2\lambda - 2h^2 + 2ar\cot 2\lambda = 0$$

Diese in h **biquadratische Gleichung hat 2 reelle, und unter diesen nur eine positive Wurzel, nämlich:**

$$h = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{(\operatorname{tg}^2\lambda + \cot^2 2\lambda + \varkappa\cot 2\lambda)}$$

$$\varkappa^2 = 3\operatorname{tg}^2\lambda + \cot^2 2\lambda$$

Nach Einsetzung erhält man:

$$P = \frac{na^3}{6\sqrt{2}}\mu\cot 2\lambda\sqrt{(\operatorname{tg}^2\lambda + \cot^2 2\lambda + \varkappa\cot 2\lambda)}$$

$$F = na^2(\cot 2\lambda + \tfrac{1}{2}\varkappa)$$

für $P = 1$

$$F = 2(\cot 2\lambda + \tfrac{1}{2}\varkappa)\left\{\frac{9n\operatorname{tg}^2 2\lambda}{\mu^2(\operatorname{tg}^2\lambda + \cot^2 2\lambda + \varkappa\cot 2\lambda(}\right\}^{1/3}$$

VII. **Prismatoid von der Höhe** h **auf der Basis** B **mit 2 pyramidalen Aufsätzen von gleicher Höhe** k **auf beiden Endflächen.**

Hier ist

$$P = \frac{na^2}{6}(\mu h + k)\cot 2\lambda; \quad F = na(r+q) \qquad (3)$$

Bedingungen des kleinsten F **bei constantem** P **sind:**

$$a(\mu\,\partial h+\partial k)+2\,\partial\, a(\mu h+k)=0$$

$$a\left(\frac{a\,\partial a}{4r}\operatorname{tg}^2\lambda+\frac{h\,\partial h}{r}+\frac{a\,\partial a}{4q}\cot^2 2\lambda+\frac{k\,\partial k}{q}\right)+\partial a(r+q)=0$$

Nach Elimination von ∂k geben die Coefficienten der unabhängigen ∂h, ∂a:

$$\frac{h}{r}=\frac{\mu k}{q};\quad \frac{a^2}{4}\left(\frac{\operatorname{tg}^2\lambda}{r}+\frac{\cot^2 2\lambda}{q}\right)+r+q-\frac{2k}{q}(\mu h+k)=0$$

Eliminirt man q und multiplicirt mit r, so kommt:

$$\frac{a^2}{4}\left\{\left(2+\frac{\mu k}{h}\right)\operatorname{tg}^2\lambda+\frac{h}{\mu k}\cot^2 2\lambda\right\}+\left(\frac{\mu k}{h}-1\right)h^2-\frac{2hk}{\mu}=0$$

Zwischen k und h hat man vermöge Gl. (1) (2) die Relation:

$$\mu^2\left(\frac{a^2}{4h^2}\operatorname{tg}^2\lambda+1\right)=\frac{a^2}{4k^2}\cot^2 2\lambda+1 \tag{4}$$

Multiplicirt man die vorige Gleichung mit $\frac{h}{k}$ und eliminirt k^{-2}, so kommt:

$$\frac{\mu h}{k}\left(\frac{a^2}{2}\operatorname{tg}^2\lambda-h^2\right)=-\frac{\mu^2 a^2}{2}\operatorname{tg}^2\lambda-(2\mu^2-3)h^2 \tag{5}$$

Hiervon das Quadrat gibt nach Einsetzung des Wertes von k^{-2}:

$$a^2\left\{\frac{\mu^2 a^2}{2}\operatorname{tg}^2\lambda+(2\mu^2-3)h^2\right\}^2=$$
$$\mu^2\left(\frac{a^2}{2}\operatorname{tg}^2\lambda-h^2\right)^2\{\mu^2 a^2\operatorname{tg}^2\lambda+4(\mu^2-1)h^2]\operatorname{tg}^2 2\lambda$$

Sind h_1^2, h_2^2, h_3^2 die Wurzeln dieser kubischen Gleichung für h^2, so ist

$$h_1^2+h_2^2+h_3^2=\frac{\mu^2(3\mu^2-4)\operatorname{tg}^2\lambda\operatorname{tg}^2 2\lambda+(2\mu^2-3)^2}{4\mu^2(\mu^2-1)\operatorname{tg}^2 2\lambda}a^2>0 \tag{6}$$

$$h_2^2h_3^2+h_1^2(h_2^2+h_3^2)=-\frac{\operatorname{tg}^2\lambda\operatorname{tg}^2 2\lambda+2\mu^2-3}{4(\mu^2-1)\operatorname{tg}^2 2\lambda}\operatorname{tg}^2\lambda\cdot a^4<0 \tag{7}$$

$$h_1^2h_2^2h_3^2=\frac{\mu^2\operatorname{tg}^4\lambda(1-\operatorname{tg}^2\lambda\operatorname{tg}^2 2\lambda)}{16(\mu^2-1)\operatorname{tg}^2 2\lambda}a^6\gtrless 0 \tag{8}$$

und zwar für $n\gtrless 3$

$$\operatorname{tg}^4\lambda \operatorname{tg}^2 2\lambda \leqq 1; \quad \frac{3}{2} < \mu \leqq 2$$

Nach Gl. (8) ist für $n > 3$ eine der Wurzeln, z. B. h_1^2 positiv. Da also $h_2^2 h_3^2$ positiv ist, so ist nach Gl. (7) $h_2^2 + h_3^2$ negativ, folglich sind auch die Addenden negativ oder complex. Demnach ist von den 8 Wurzeln h stets eine und nur eine reell positiv.

Für $n = 3$ wird ein h^2, z. B. h_1^2, null, daher $h_2^2 h_3^2$ negativ, das ist nur für reelle Factoren möglich, und zwar offenbar ist der eine positiv, der andere negativ, folglich nur ein h und nur eins positiv.

Die Gleichung wird in diesem Falle:

$$h^6 - \frac{19}{48} a^2 h^4 - \frac{1}{18} a^4 h^2 = 0$$

und hat die einzige positive Wurzel:

$$h = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{57 + 9\sqrt{97}}{2}}$$

Nachdem der Wert von h gefunden ist, geben die Gl. (4) (3) eindeutig k, P und F.

VIII. Prismatoid von der Höhe h auf der Basis B mit einem pyramidalen Aufsatz von der Höhe k auf einer Endfläche.

Hier ist

$$P = \frac{n a^2}{6} (\mu h + \tfrac{1}{2} k) \cot 2\lambda; \quad F = n a (r + \tfrac{1}{4} a \cot 2\lambda + \tfrac{1}{2} q)$$

Bedingungen des kleinsten F bei constantem P sind:

$$a(\mu \partial h + \tfrac{1}{2} \partial k) + 2 \partial a (\mu h + \tfrac{1}{2} k) = 0$$

$$a\left(\frac{a \partial a}{4r} \operatorname{tg}^2 \lambda + \frac{h \partial h}{r} + \frac{\partial a}{2} \cot 2\lambda + \frac{a \partial n}{8q} \cot^2 2\lambda + \frac{k \partial k}{2q}\right) + \partial a (r + \tfrac{1}{2} q) = 0$$

Nach Elimination von ∂k geben die Coefficienten der unabhängigen ∂h, ∂a:

$$\frac{h}{r} = \frac{\mu k}{q}$$

$$\frac{a^2}{4r}\operatorname{tg}^2\lambda+\frac{a^2}{8q}\cot^2 2\lambda+\frac{a}{2}\cot 2\lambda+r+\tfrac{1}{2}q=\frac{k}{q}(2\mu h+k)$$

woraus nach Elimination von q und Multiplication mit r:

$$\frac{a^2}{2}\operatorname{tg}^2\lambda+\frac{a^2h}{8\mu k}\cot^2 2\lambda+\frac{\mu k}{2h}\left(\frac{a^2}{4}\operatorname{tg}^2\lambda+h^2\right)+\frac{ar}{2}\cot 2\lambda=h^2+\frac{hk}{\mu}$$

Hier sind k und r durch ihre Werte aus den Gl. (4) (2) in h darzustellen. Macht man die Gleichung rational, so wird sie 6. Grades in h^2.

Bemerkungen. 1. Prismatoide mit prismatischen Aufsätzen auf Endflächen haben keine Oberflächen-Minima, weil deren erste Bedingung

$$\frac{h}{r}=\frac{2\mu}{3}$$

unerfüllbar ist.

2. Alle regelmässigen Polyeder, nur das Dodekaeder ausgenommen, sind als Specialfälle in den vorstehenden enthalten. I. für $n=4$ ist ein Würfel, II. für $n=3$ ein Tetraeder, III. für $n=4$ ein Oktaeder, VI. für $n=3$ gleichfalls, VII. für $n=5$ ein Ikosaeder. Da die Oberflächen der regelmässigen Polyeder Minima für constanten Inhalt unter allen gleichgeordneten sind, so bestätigen diese 5 Fälle den in der Einleitung erwähnten Satz und sind zugleich Proben der Rechnung.

Folgende Tabelle gibt die Oberfläche für den Inhalt = 1.

n	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
3	6,537	7,206	6,240	6,227	5,936	5,717	6,191	5,589
4	6	6,604	5,719	5,707	5,440	5,576	5,253	5,380
5	5,810	6,395	5,539	5,527	5,268	5,549	5,148	5,339
6	5,719	6,275	5,451	5,440	5,185	5,541	5,101	5,318
7	5,667	6,238	5,402	5,391	5,139	5,539	5,075	5,306
8	5,634	6,201	5,370	5,360	5,108	5,537	5,056	5,302
9	5,613	6,178	5,351	5,340	5,090	5,537	5,051	5,300
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
∞	5,536	6,093	5,277	5,266	5,019	5,536	5,019	5,266

Das absolute Minimum der Oberfläche eines Körpers für das Volum 1 ist

$$F=4{,}83598\ldots$$

Diesem kommt das Polyeder VII. am nächsten, wiewol erst für $n > 3$.

Die die Gestalt der 3 letzten Polyeder bestimmenden Abmessungen, welche sich nicht so einfach wie die der 4 ersten allgemein ausdrücken lassen, mag folgende Tabelle geben.

	VI		VII			VIII		
n	$h:a$	a	$h:a$	$k:a$	a	$h:a$	$k:a$	a
3	0,816	1,285	0,711	0,151	1,361	0,760	0,153	1,294
4	1,096	0,929	0,766	0,343	0,969	0,920	0,348	0,951
5	1,423	0,724	0,851	0,526	0,771	1,129	0,532	0,747
6	1,758	0,593	0,956	0,699	0,640	1,350	0,704	0,615
7	2,094	0,502	1,074	0,864	0,546	1,570	0,868	0,524
8	2,426	0,436	1,202	1,023	0,476	1,821	1,026	0,455
9	2,754	0,386	1,331	1,179	0,422	2,033	1,184	0,403

Die Werte der a entsprechen $P = 1$.

VIII.

Ueber Formelpaare der mechanischen Quadratur.

Von

Rudolf Skutsch.

Die Bestrebungen, einen Anhalt zur Schätzung des bei Anwendung einer mechanischen Quadraturformel begangenen Fehlers lediglich durch Hinzuziehung neuer Ordinaten zu gewinnen, datiren bis auf Stirlings Methodus differentialis zurück. Stirling nahm zu den Ordinaten der Cotesischen Formeln und zwar nur derjenigen mit ungerader Ordinatenzahl, deren Ueberlegenheit ihm bekannt gewesen zu sein scheint, je eine Ordinate vor der Anfangs- und hinter der Endordinate hinzu in demselben Abstande von den letzteren, den benachbarte Cotesische Ordinaten von einander haben.

Die zu der so vermehrten Ordinatenzahl gehörige Quadraturformel erhält man aus der Cotesischen durch Addition einer Correction, deren Grösse einen ungefähren Schluss auf den übrig bleibenden Fehler zulässt.

Sei allgemein eine Näherungsform

$$\int_a^b y\,\partial x = A$$

eine zweite, durch Hinzunahme von Ordinaten vervollkommnete $= B$, so kann man eine beliebige Anzahl von Quadraturformeln X finden, welche denselben Genauigkeitsgrad von A, d. h. dieselbe Ordnung des ersten Gliedes der Fehlerreihe besitzen, wenn man setzt

$$A+\alpha X=(\alpha+1)B$$

Für beliebige α wird hierin aus den Fehlergliedern die in A und X, aber nicht in B auftreten, eine fortlaufende Proportion sich bilden lassen. Durch geeignete Wahl von α kann man in X, welches im allgemeinen sämtliche Ordinaten enthält, die in B auftreten, eine oder falls A und B wie bei Cotes symmetrisch gebaut sind, zwei Ordinaten zum Verschwinden bringen.

Die neuerdings mehrfach aufgestellten Formelpaare, d. h. Paare von mechanischen Quadraturformeln, welche den wahren Wert eines bestimmten Integrals mit mehr oder minder grosser Wahrscheinlichkeit zwischen sich einschliessen, sind nun nichts anderes als zwei solche Näherungen A und X mit positivem α, und die obige einfache Gleichung wird uns sehr schnell zur Einsicht von der Unvollkommenheit der vorhandenen Formelpaare und zur Aufstellung der denkbar zweckmässigsten führen.

Die ersten Formelpaare teilte, so weit mir bekannt ist, Herr Ligowski im 58ten Bande dieser Zeitschrift mit. Er hatte entweder zu vorhandenen, teils allgemein bekannten, teils von ihm selbst gefundenen A für $\alpha=1$ ein X berechnet, welches im allgemeinen keine von den Ordinaten enthielt, die in A vorkamen, und zwar so, dass der Fehler von B nur ein Glied weniger hatte, als die von A und X; oder er hatte zu vorhandenen A und X von gleicher Fehlerordnung den Factor α bestimmt, für den sich in der Summe $A+\alpha X$ die ersten Fehlerglieder heben. Er gelangt so trotz Anwendung irrationaler Constanten in X zu einem Mittelwert B mit geringerer Genauigkeit als sich vermittelst der in letzterem auftretenden Ordinaten durch Newtonsche Quadratur erzielen lässt; dass er aber den Wert B überhaupt nicht als selbständige Quadraturformel auffasste, geht wol am klarsten daraus hervor, dass er als Resultat „vielen Rechnens“ auch zwei Quadraturformeln mit je 4 zu rationalen Abscissenwerten gehörigen Ordinaten angiebt, von denen zwei beiden gemeinschaftlich sind, und bei denen ich darauf aufmerksam machte[1]), dass ihr Mittelwert B die Cotesische Formel für 6 Ordinaten ist, also wenigstens den Genauigkeitsgrad besitzt, den man mit den in ihm vorkommenden Ordinaten erreichen kann. Eines grossen Rechnungsaufwandes bedarf es hier durchaus nicht Denn lässt man einfach von den Ordinaten einer Cotesischen Formel B eine oder mehrere fort und berechnet nach Newton die Coefficienten für eine

1) Preisarbeit 1891, Manuscript in der Bibliothek der Kgl. Techn. Hochschule in Charlottenburg.

Quadraturformel A mit den übrigen Ordinaten, so erhält man X ohne weiteres in der Form

$$X = \frac{a+1}{a} B - \frac{A}{a}$$

worin a beliebig ist, aber zweckmässig nach einer obigen Bemerkung gewählt wird.

Einer Besprechung der Radauschen Formelpaare [1] will ich eine kurze Uebersicht über die Gaussische Ordinatenwahl vorausschicken.

Nach Gauss sind bekanntlich bestimmte Integrale einer ganzen rationalen Function vom $(2n-1)$ten Grade bei passender Wahl der zugehörigen Werte der unabhängig Veränderlichen schon durch n Functionswerte gegeben. Dieser Satz, den man aus hier nicht in Betracht kommenden Gründen weit überall unter Anwendung der Lagrangeschen Interpolationsformel bewiesen findet, ergiebt sich nebst den Gleichungen für die Werte der Abscisse recht unmittelbar bei Anwendung der Cotesischen Interpolationsformel

$$y = y_0 + (x-x_0)\Delta y_0 + (x-x_0)(x-x_1)\Delta^2 y_0 + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\Delta^3 y_0 + \ldots$$

worin $\Delta^r y_0$ den $r$ten Differenzenquotienten aus den $r+1$ Werten y_0, y_1 bis y_r berechnet, bedeutet, und welche genaue Resultate giebt für ganze rationale Functionen, deren Grad niedriger ist, als die Anzahl der auf der rechten Seite berechneten Glieder. Ihre Integration liefert

$$\int y\,dx = y_0 \int dx + \Delta y_0 \int (x-x_0)\,dx + \Delta^2 y_0 \int (x-x_0)(x-x_1)\,dx + \ldots$$

Will man nun aus n Werten das Integral einer Function von höherem als dem $(n-1)$ten Grade genau berechnen, so muss man so viele der Coefficienten von $\Delta^n y_0$, $\Delta^{n+1} y_0$ etc. als möglich gleichzeitig verschwinden lassen, was nach Jakobi [2] bewirkt wird, wenn man ebensoviele der Integrale

$$\int (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\,dx,$$

---

1) Comptes rendus 1880

2) Crelles Journal, Bd. L

$$\int\int (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\,\partial x^2$$

$$\int\int\int (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\,\partial x^3$$

u. s. f. zwischen denselben Grenzen zum Verschwinden bringt. Von diesen Gleichungen können n durch Disposition über die n Werte x_0 bis x_{n-1} erfüllt werden, wodurch dann offenbar der Grad der genau integrirbaren ganzen rationalen Functionen vom $(n-1)$ten auf den $(2n-1)$ten gehoben wird. Dann aber kann das Integral bei $\Delta^{2n} y_0$ auf keine Weise zum Verschwinden gebracht werden, da dies bei Jakobischer Reduction noch auf die nunmehr unerfüllbare Bedingung

$$\int^{n+1} (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\,\partial x^{n+1} = 0$$

führen würde. Man ersieht hieraus, dass, wenn n Ordinaten in obiger Weise bestimmt worden sind, und der Genauigkeitsgrad der gefundenen Quadraturformel durch neue hinzugenommene Ordinaten erhöht werden soll, hierzu $n+1$ Ordinaten notwendig und ausreichend sind.

Sind von den n Werten nur r disponibel, so kann man dieselben so bestimmen, dass die Integrale bis zum $r$ten einschliesslich verschwinden, d. h. dass die zugehörige Quadraturformel für Functionen vom $(n+r-1)$ten Grade genaue Resultate giebt.

Radau stellte den Gaussschen Formeln für m Ordinaten solche mit $(m+1)$ anderen gegenüber, von welch' letzteren er zwei, nämlich Anfangs- und Endordinate des Intervalls, willkürlich annahm, die übrigen sind nach dem vorher gehenden bestimmt, da die Fehlerordnung die der Gaussschen Formel sein soll.

Er berechnete ferner die ersten Fehlerglieder [illegible] und fand, dass man den Factor α allgemein gleich $\frac{m}{m+1}$ zu [illegible] hat, um d[illegible] der mit B genau integrirten Parabeln [illegible] zu heben. [illegible] ganzen $2m+1$ Ordinaten [illegible] Genauigk[illegible] für die so gewählten Ordinaten [illegible] möglich.

Indessen [illegible] bei anderer Wahl [illegible] von der willkürlichen [illegible] B mit [illegible] Wahl aber [illegible]

Quadraturformel A mit den übrigen Ordinaten, so erhält man X ohne weiteres in der Form

$$X = \frac{\alpha+1}{\alpha} B - \frac{A}{\alpha}$$

worin α beliebig ist, aber zweckmässig nach einer obigen Bemerkung gewählt wird.

Einer Besprechung der Radauschen Formelpaare [1]) will ich eine kurze Uebersicht über die Gausssche Ordinatenwahl vorausschicken.

Nach Gauss sind bekanntlich bestimmte Integrale einer ganzen rationalen Function vom $(2n-1)$ten Grade bei passender Wahl der zugehörigen Werte der unabhängig Veränderlichen schon durch n Functionswerte gegeben. Dieser Satz, den man aus hier nicht in Betracht kommenden Gründen wol überall unter Anwendung der Lagrangeschen Interpolationsformel bewiesen findet, ergiebt sich nebst den Gleichungen für die Werte der Abscisse recht unmittelbar bei Anwendung der Cotesischen Interpolationsformel

$$y = y_0 + (x-x_0)\Delta y_0 + (x-x_0)(x-x_1)\Delta^2 y_0 + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\Delta^3 y_0 + \ldots$$

worin $\Delta^r y_0$ den $r$ten Differenzenquotienten aus den $r+1$ Werten y_0, y_1 bis y_r berechnet, bedeutet, und welche genaue Resultate giebt für ganze rationale Functionen, deren Grad niedriger ist, als die Anzahl der auf der rechten Seite berechneten Glieder. Ihre Integration liefert

$$\int y\partial x = y_0 \int \partial x + \Delta y_0 \int (x-x_0)\partial x + \Delta^2 y_0 \int (x-x_0)(x-x_1)\partial x + \ldots$$

Will man nun aus n Werten das Integral einer Function von höherem als dem $(n-1)$ten Grade genau berechnen, so muss man so viele der Coefficienten von $\Delta^n y_0$, $\Delta^{n+1} y_0$ etc. als möglich gleichzeitig verschwinden lassen, was nach Jakobi [2]) bewirkt wird, wenn man ebensoviele der Integrale

$$\int (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\partial x,$$

---

1) Comptes rendus 1880 p. 913.

2) Crelles Journal, Bd. I.

$$\int\int (x-x_0)(x-x_1)\ .\ .\ .\ (x-x_{n-1})\,\partial x^2$$

$$\int\int\int (x-x_0)(x-x_1)\ .\ .\ .\ (x-x_{n-1})\,\partial x^3$$

u. s. f. zwischen denselben Grenzen zum Verschwinden bringt. Von diesen Gleichungen können n durch Disposition über die n Werte x_0 bis x_{n-1} erfüllt werden, wodurch dann offenbar der Grad der genau integrirbaren ganzen rationalen Functionen vom $(n-1)$ten auf den $(2n-1)$ten gehoben wird. Dann aber kann das Integral bei $\Delta^{2n}y_0$ auf keine Weise zum Verschwinden gebracht werden, da dies bei Jakobischer Reduction noch auf die nunmehr unerfüllbare Bedingung

$$\int^{n+1} (x-x_0)(x-x_1)\ .\ .\ .\ (x-x_{n-1})\,\partial x^{n+1} = 0$$

führen würde. Man ersieht hieraus, dass, wenn n Ordinaten in obiger Weise bestimmt worden sind, und der Genauigkeitsgrad der gefundenen Quadraturformel durch neue hinzugenommene Ordinaten erhöht werden soll, hierzu $n+1$ Ordinaten notwendig und ausreichend sind.

Sind von den n Werten nur r disponibel, so kann man dieselben so bestimmen, dass die Integrale bis zum $r$ten einschliesslich verschwinden, d. h. dass die zugehörige Quadraturformel für Functionen vom $(n+r-1)$ten Grade genaue Resultate giebt.

Radau stellte den Gaussschen Formeln für m Ordinaten solche mit $(m+1)$ anderen gegenüber, von welch' letzteren er zwei, nämlich Anfangs- und Endordinate des Intervalls, willkürlich annahm; die übrigen sind nach dem vorher gehenden bestimmt, da die Fehlerordnung die der Gaussschen Formel sein soll.

Er berechnete ferner die ersten Fehlerglieder beider Formeln und fand, dass man den Factor α allgemein gleich $\frac{m}{m+1}$ zu nehmen hat, um den Grad der mit B genau integrirten Parabeln über $2m-1$ zu heben. Da er im ganzen $2m+1$ Ordinaten benutzt, so ist die Genauigkeit wenigstens für die so gewählten Ordinaten so gross als möglich.

Indessen ist es klar, dass bei anderer Wahl der $m+1$ Ordinaten, insbesondere, wenn man von der willkürlichen Festsetzung zweier von ihnen absieht, Formeln B mit viel höherer Genauigkeit sich aufstellen lassen. Bei geeigneter Wahl aller $m+1$ Ordinaten

kann man zum Beispiel eine Formel X aus ihnen bilden, welche denselben Genauigkeitsgrad und überdies dieselben Verhältnisse zwischen den drei ersten Fehlergliedern wie die Gaussche Formel A aufweist. Dürfen ferner auch p von den m Gaussschen Ordinaten in die Complementärformel eintreten, so kann man durch Wahl der $m+1$ anderen Ordinaten $p+3$ Verhältnisse übereinstimmend machen. Setzt man jedoch für $p = m$ die $p+2$ Proportionen und $2m-1$ sonstigen Gleichungen an, so wird die Complementärformel identisch mit der Gaussschen —, der Factor α erhält den Wert -1 und in der Gleichung

$$A - A = (1-1)B$$

wird B unbestimmt. Am bequemsten gelangen wir zu der günstigsten Complementärformel wieder durch die obige Betrachtung. Wir haben gesehen, dass $m+1$ Ordinaten erforderlich sind, um die Genauigkeit einer Gaussschen Formel mit m Ordinaten zu steigern, und die stets aus m gegebenen und $m+1$ zu wählenden Ordinaten eine Formel hergestellt werden kann, welche Functionen vom $(3m+1)$ten Grade genau integrirt.

Ist also A die Gausssche Formel mit m Ordinaten, B die verjüngte Formel mit $2m+1$ Ordinaten und Genauigkeitsgrad $3m+1$, so giebt es eine unendliche Anzahl von Formeln X mit im allgemeinen $2m+1$ Ordinaten, worunter m Gausssche, welche den Genauigkeitsgrad $2m-1$ besitzen. Die letzteren haben also geringeren Genauigkeitsgrad als vermittelst ihrer Ordinaten erzielt werden könnte. Dieser Uebelstand kommt indessen in Wegfall, wenn man über α wieder so disponirt, dass in X von den $2m+1$ Ordinaten eine oder zwei nicht auftreten. Bei unserer Formel spielt auch die aus Gauss' Kritik der Cotesischen Formeln zu entnehmende Tatsache eine Rolle, dass der Genauigkeitsgrad von Quadraturformeln, deren Ordinaten symmetrisch im Intervall stehen, stets durch eine ungerade Zahl dargestellt wird, ein Satz, welcher sich übrigens leicht mit Hülfe der Cotesischen Interpolationsformel und der Jakobischen Reduction beweisen lässt Hiernach ist der Genauigkeitsgrad unserer Formel, wenn $3m+1$ eine gerade, also m eine ungerade Zahl ist, nicht $3m+1$, sondern $3m+2$.

Der Wert von Formelpaaren überhaupt darf nicht überschätzt werden. Die Beibringung eines strengen Beweises, dass die beiden Näherungen den wahren Integralwert wirklich einschliessen, wird fast ausnahmslos ausserordentlich schwierig und zeitraubend sein. Mit der Anzahl der Fehlerglieder, die in A, aber nicht in B auftreten, wächst zwar im allgemeinen die Wahrscheinlichkeit, dass die

Einschliessung erfolgt, zugleich aber auch das Missverhältniss zwischen der Differenz der Näherungswerte und dem wirklichen Fehler des Mittelwertes.

Zur Erläuterung vorstehender Ausführungen mögen folgende Rechnungsresultate dienen. Die zweckmässigste Complementärformel zu Gauss' Formel mit 3 Ordinaten auf eine Function $f(x)$ im Intervall -1 bis $+1$ angewendet, lautet:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = 0{,}202\,538\,961\,83\,[f(-0{,}960\,491\,268\,71) + f(+0{,}960\,491\,268\,71)] + 0{,}776\,815\,854\,70\,[f(-0{,}434\,243\,749\,24) + f(+0{,}434\,243\,749\,24)] + 0{,}041\,290\,366\,93\,[f(0)]$$

Hier ist $\alpha = 1{,}069\,200\,05000$ zu nehmen.

Für den $\log\text{nat}\,2 = 0{,}693\,147\,180\,56$ findet man mit 3 Gauss'schen Ordinaten

$$A = 0{,}693\,121\,693\,12$$

mit obiger Formel

$$X = 0{,}693\,171\,018\,27$$

als Mittelwert mit 7 Ordinaten

$$B = 0{,}693\,147\,18049$$

Radau's Complementärformel mit 4 Ordinaten giebt den Näherungswert

$$X = 0{,}693\,181\,81818$$

den Mittelwert (mit $\alpha = \frac{1}{4}$)

$$B = 0{,}693\,147\,46099$$

Radau's Mittelwert mit 11 Ordinaten, a. a. O. von ihm selbst mitgeteilt, ist

$$B = 0{,}693\,147\,18070$$

also noch immer ungenauer als der obige mit 7 Ordinaten.

Obgleich der Genauigkeitsgrad der Gaussschen Formel mit 7 Ordinaten um 2 höher ist, als der der oben aufgestellten, so ist infolge kleinerer Fehlergliedcoefficienten der letzteren die numerische Grösse des Fehlers bei beiden nur wenig unterschieden, dann die Gausssche Formel mit 7 Ordinaten ergiebt

$$\log\text{nat}\,2 = 0{,}693\,147\,180\,54$$

IX.

Ueber eine Behandlung einer Curve 4. Ordnung und der allgemeinen Curve 3. Ordnung mittelst Kegelschnittcoordinaten.

Von

Hermann Oppenheimer,

Dr. ph. in Hamburg.

In den diesjährigen Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg habe ich eine neue Methode der Behandlung des Kegelschnitts erörtert, die auf folgenden Erwägungen beruht:

Drei Paare entsprechender Punkte in zwei perspectivischen ebenen Systemen liegen auf einem Kegelschnitt K. Solche sich selbst in beiden Systemen entsprechenden Kegelschnitte K giebt es also ∞^3.

Durch zwei Paare sich entsprechender Punkte gehen an einen dieser K zwei andere, K', die ihn doppelt berühren. Hält man nun einen K und irgend ein Punktpaar $A_1 - A_2$ fest, so besteht zwischen den K doppelt berührenden Kegelschnitten K' durch $A_1 - A_2$ und den Punktpaaren auf K einerseits und den Tangenten und Punkten von K anderseits eine vollkommene Analogie, wenn wir den Punkten die Punktpaare, den Tangenten die doppelt berührenden Kegelschnitte entsprechen lassen; der Verbindungslinie zweier Punkte entspricht sodann ein sich selbst entsprechender K' durch $A_1 - A_2$, der zwei Punktpaare verbindet und dem Schnittpunkt zweier Tangenten dasjenige Punktpaar, das zwei doppelt berührende K' ausser $A_1 - A_2$ gemeinsam haben.

Ich habe in der erwähnten Note an der Hand von Beispielen ausgeführt, wie sich sämtliche Sätze zwischen den Punkten und

Tangenten von K auf die Punktpaare und doppelt berührenden Kegelschnitte übertragen lassen. Ich will diese neuen Coordinaten kurz „Kegelschnittcoordinaten" nennen und die Kegelschnitte K' durch $A_1 - A_2$, deren Function in unserer Punktpaarebene analog der Function der Geraden in der Punktebene ist, „Kegelschnittstrahl."

Im folgenden will ich eine eigenartige C^4 und die allgemeine C^3 mittelst dieser neuen Coordinaten behandeln.

1.

Beziehen wir zwei Büschel sich selbst entsprechender K projectivisch aufeinander, so erzeugen sie im allgemeinen eine C^4. Fasse ich einen der beiden Büschel als Kegelschnittstrahlenbüschel auf, betrachte also die C^4 als erzeugt durch einen Kegelschnittbüschel und einen Kegelschnittstrahlenbüschel, so kann ich dieselbe damit in Analogie mit der allgemeinen C^3 bringen, die ja erzeugt wird von einem Kegelschnittbüschel und einem projectivischen Strahlenbüschel. Ich werde also auch alle Sätze zwischen Punkten und Tangenten der C^3 auf die Punktpaare und doppelt berührenden Kegelschnitte der C^4 übertragen dürfen. — Dabei ist noch zu bemerken, dass ein beliebiges Punktpaar der C^4 als dasjenige ausgezeichnete Punktpaar $A_1 - A_2$ gewählt werden kann, durch das wir das Kegelschnittnetz legen, welches mit dem Geradennetz der Punktebene in Analogie stehen soll. Es mögen zur Erläuterung einige Uebertragungen von Sätzen der C^3 angeführt werden — wir greifen als das ausgezeichnete Punktpaar irgend ein Punktpaar $A_1 - A_2$ der C^4 heraus.

a) Durch irgend ein Punktpaar $M_1 - M_2$ der Ebene gehen sechs Kegelschnittstrahlen, die die C^4 in einem Punktpaar berühren.

b) Irgend ein Kegelschnittstrahl K_1 schneidet auf der C^4 noch Punktpaare $B_1 - B_2$, $C_1 - C_2$, $D_1 - D_2$ aus; die drei Kegelschnittstrahlen, die resp. in $B_1 - B_2$, $C_1 - C_2$, $D_1 - D_2$ die C^4 berühren, schneiden je ein weiteres Punktpaar, resp $B_1' - B_2'$, $C_1' - C_2'$, $D_1' - D_2'$ auf der C^4 aus; $B_1' - B_2'$, $C_1' - C_2'$, $D_1' - D_2'$ liegen auf einem und demselben Kegelschnitt K_2. K_2 ist die Begleiterin von K_1 (cf. Salmon-Fiedler 5. Kap. Art. 50).

c) Es giebt neun Kegelschnittstrahlen, die die C^4 in je einem Punktpaar osculiren. Verbinden wir zwei dieser Inflexionspunktpaare durch einen Kegelschnittstrahl, so geht derselbe durch ein drittes Inflexionspunktpaar.

So lässt sich die ganze Theorie der C^3 auf diese C^4 übertragen.

Anmerkung. Man könnte fragen, ob die sprachliche C^4 die allgemeine C^4 vom Geschlechte 3 ist, ob also umgekehrt jede C^4 sich selbst entsprechende Curve in zwei projectivischen und involutorisch liegenden ebenen Systemen sein kann. Dass das nicht der Fall ist, folgt z B. aus der Lage unserer C zum Collineationscentrum P: von P gehen vier einfache Tangenten an die C^4, deren Berührungspunkte auf p liegen, und 4 Doppeltangenten, die in je einem Punktpaar tangiren. Bei der allgemeinen C^4 werden vier Doppeltangenten im allgemeinen nicht einen Schnittpunkt haben.

2.

Zwei Büschel sich selbst entsprechender K mögen zu Basispunkten resp. die Punktpaare $A_1—A_2$, $B_1—B_2$ und $A_1'—A_2'$, $B_1'—B_2'$ haben. Liegen $A_1—A_2$ und $A_1'—A_2'$ auf einem und demselben Strahle durch P — die andern beiden Punktpaare aber nicht —, und beziehen wir die beiden Büschel in der Weise projectivisch aufeinander, dass die beiden zerfallenen Curven, von denen der Strahl $(A_1 — A_2, A_1' - A_2')$ ein Teil ist, sich selbst entsprechen, dann ist dieser Strahl ein Teil der C^4; der Rest ist eine C^3. Fassen wir nun den einen Kegelschnittbüschel, etwa den der $K(A_1—A_2, B_1—B_2)$ als Büschel von Kegelschnittstrahlen auf, so werden wir die Punktpaare dieser C^3 und die sie doppelt berührenden Kegelschnittstrahlen in Analogie setzen dürfen mit ihren Punkten und Tangenten.

Die sprachliche C^3 ist eine in beiden Systemen sich selbst entsprechende Curve. Es ist von Interesse zu untersuchen, ob diese C_3 besondere Eigenschaften hat, oder ob nicht umgekehrt jede allgemeine C^3 eine sich selbst entsprechende Curve zweier perspectivischen und involutorischen Systeme sein kann.

Diese Frage erledigt sich durch folgende Erwägungen:

Irgend zwei einander entsprechende Curven der beiden Büschel mögen sich in den Punktpaaren $C_1 — C_2$, $C_1'—C_2'$ schneiden.

Dann ist offenbar das Collineationscentrum P der beigeordnete Rest zu $C_1 — C_2$, $C_1'—C_2'$: denn irgend ein Kegelschnitt durch diese zwei Punktpaare trifft die C^3, die ebenso wie der Kegelschnitt eine sich selbst entsprechende Curve ist, in einem weiteren Punktpaar. Die Verbindungslinien aller Paare entsprechender Punkte gehen aber durch das Collineationscentrum. Nun schneiden sich aber die Ver-

bindungslinien $C_1 C_2$ und $C_1' C_2'$ der vier Punkte, von denen P beigeordneter Rest ist, selbst in P. Das ist nur möglich, wenn P Inflexionspunkt der C^3 ist Das steht mit folgender Eigenschaft aller sich selbst entsprechender Curven im Einklang.

Von dem Collineationscentrum P aus können wir zwei Arten von Tangenten an dieselben legen: einfache Tangenten, deren Berührungspunkte auf der Centralachse liegen, und deren Zahl also gleich der Ordnung der Curve ist, und $2n$fache Tangenten, die allemal in Punktpaaren berühren.

Da für unsere C^3 $2n$fache Tangenten nicht in Betracht kommen, gehen also von P ausser der Tangente, die in P berührt, drei Tangenten an die C^3, deren Berührungspunkte auf der Collineationsachse p liegen. Nun wissen wir aber umgekehrt aus der Theorie C^3 (Salmon-Fiedler, Theorie der Curven Art. 171—172), dass ein so vereigenschaftetes Paar von Elementen, wie das Collineationscentrum P und die Achse p ein Inflexionspunkt und die ihm zugehörige harmonische Polare sind: von einem Inflexionspunkt gehen an die C^3 drei Tangenten (ausser der Inflexionstangente), deren Berührungspunkte auf der harmonischen Polare liegen, irgend ein Strahl durch den Inflexionspunkt schneidet in einem weiteren Paar von Punkten, die durch die harmonische Polare harmonisch von dem Inflexionspunkt getrennt werden u. s. w.

Wir kommen also zu folgendem Resultate:

„Jede C^3 ist sich selbst entsprechende Curve in neun Paaren perspectivisch und involutorisch liegender ebener Systeme, nämlich in den Systemen, die einen Inflexionspunkt und die zugehörige harmonische Polare zu Collineationscentrum und Collineationsachse haben."

Damit hat unsere neue Methode der Behandlung der C^3 eine erhöhte Bedeutung gewonnen.

Wir wollen zur Veranschaulichung dieselben Sätze, die wir von der C^3 auf die C^4 übertragen haben, nun auch für die C^3 anführen. Das ausgezeichnete Punktpaar $A_1 - A_2$ kann beliebig in der Ebene innerhalb oder ausserhalb der C^3 angenommen werden (weil ich ja von dem Büschel der Kegelschnittstrahlen $K(A_1 - A_2, B_1 - B_2)$ das Punktpaar $A_1 - A_2$ ausserhalb der C^3 oder das Punktpaar $B_1 - B_2$ auf der C^3 als das ausgezeichnete Punktpaar wählen kann:

a) Durch irgend ein Punktpaar $M_1 - M_2$ der Ebene gehen sechs Kegelschnittstrahlen, die die C^3 in einem Punktpaare berühren.

b) Irgend ein Kegelschnittstrahl K_1 schneidet auf der C^3 drei Punktpaare $B_1 - B_2$, $C_1 - C_2$, $D_1 - D_2$ aus. Die drei Kegelschnittstrahlen, die die C^3 resp. in $B_1 - B_2$, $C_1 - C_2$, $D_1 - D_2$ berühren, schneiden je ein weiteres Punktpaar, resp. $B_1, - B_2'$, $C_1' - C_2'$, $D_1' - D_2'$ auf der C_3 aus; $B_1' - B_2'$, $C_1' - C_2'$, $D_1' - D_2'$ liegen auf einem und demselben Kegelschnitt K_2, K_2 ist die Begleiterin von K_1.

c) Es giebt 9 Kegelschnittstrahlen, die die C^3 in je einem Punktpaare osculiren. Verbinden wir zwei dieser Inflexionspunktpaare durch einen Kegelschnittstrahl, so geht dieselbe durch ein drittes Inflexionspunktpaar.

Hamburg, Januar 1894.

X.

Miscellen.

1.

Projective Lösung einer Aufgabe über die Schraubenlinie.

Die geodätische Linie auf dem Cylinder ist durch zwei Punkte A und B bestimmt, wenn zugleich die Anzahl n der vollen Umgänge gegeben ist, die der eine Punkt machen muss, um in den anderen zu gelangen. Müsste der Punkt A um die Cylinderachse um den Winkel w gedreht und hierauf um a gehoben werden, um nach B zu gelangen, so ergibt sich die Ganghöhe h der Schraubenlinie aus

$$h = \frac{360a}{360n + w}$$

wobei w in Graden eingesetzt werden müsste.

Constructiv, ohne jede Rechnung, lässt sich die Aufgabe wie folgt lösen:

Es sei Fig. 1. $AMNO$ die abgewickelte Mantelfläche des Cylinders, B der Punkt, in welchen man von A aus nach n Umläufen gelangen soll. Ist AC der erste Umgang der Schraubenlinie in der Abwickelung, also

$$MC = h$$

die Ganghöhe, so erhält man den durch B gehenden Schraubengang, wenn man

$$AD = nh$$

macht, und D mit B verbindet. Bei willkürlicher Wahl des AC wird aber BD nicht parallel zu AC sein, und nur, wenn dies stattfindet, die Aufgabe gelöst sein.

Bezeichnet man den Schnittpunkt von DC mit der verlängerten AM mit P, so ist P bei der Variirung des h ein fester Punkt, denn bezeichnet man den Umfang AM des Cylinders mit u, so ist

$$MP = \frac{u}{n-1}$$

In Folge dessen ist bei Variirung des h die Punktreihe D perspectiv zu jener C. Zieht man durch B immer eine Parallele zu AC, welche AO in D' schneidet, so ist Strahlenbüschel $A(C \ldots)$ congruent jenem $B(D' \ldots)$, daher Punktreihe D' projectiv mit jener C, und demnach nach früherem auch mit jener D. Fällt D mit D' zusammen, so ist $BD' \parallel AC$, und demnach die Aufgabe gelöst. Man hat daher nur den im Endlichen befindlichen Doppelpunkt der beiden ähnlichen Punktreihen D und D' zu suchen. Dazu benötigt man noch ein Paar homologe Punkte. Diese sind aber A und A', wenn $BA' \parallel AM$ gezogen wird. Schneidet die verlängerte $A'B \ldots MN$ in A'', ist $D'D'' \parallel AM$, so ist der Schnittpunkt S der Verbindungslinien AA'', DD'' das Centrum der Perspectivität der Punktreihen $AD \ldots$ und $A''D'' \ldots$, daher Δ der verlangte Doppelpunkt, wenn $S\Delta \parallel AM$. Die durch A zu ΔB gezogene Parallele schneidet hierauf auf MN, von M ausgerechnet, die verlangte Ganghöhe ab.

Wien, im März 1893.

Wilhelm Ruff.

2.

Ueber eine Erzeugungsweise der Hyperbel als Enveloppe.

Ein Kreis und zwei parallele gerade Linien, in derselben Ebene liegend, sind gegeben. In dem Kreise wird eine Sehne von gegebener Länge gezeichnet, und durch deren Endpunkte zu einer bestimmten Richtung Parallele gezogen, wodurch ein Parallelogramm entsteht, dessen Diagonalen eine Hyperbel einhüllen, wenn die Sehne von constanter Länge variirt.

Beweis. Es seien Fig 1. G und L die parallelen geraden Linien, K der Kreis, R die gegebene Richtung, Man zeichne zunächst jene Sehnen AB und DC von gegebener Länge, die auf der Richtung R senkrecht stehen. Hierauf ist $AD \parallel CB \parallel R$ und es entsteht das Parallelogramm $EFHJ$, von dessen Diagonalen EH und

JF später gezeigt werden soll, dass sie die Asymptoten obiger Hyperbel sind. Ist ferner MN irgend eine der Sehnen von constanter Länge, welche bekanntlich einen Kreis K' berühren, so schneidet diese die Sehnen AB und CD, beziehungsweise deren Verlängerungen in den Punkten O und P. Zieht man durch die letzteren Parallele zu R, so erhält man auf den Diagonalen JF und EH, beziehungsweise auf ihrer Verlängerung die Schnittpunkte O' und P', von deren Verbindungslinie sogleich gezeigt werden soll, dass sie eine Tangente jener Hyperbel ist, deren Asymptoten die Diagonalen JF und EH sind.

Da MN eine variirende Tangente des Kreises K' ist, so schneidet sie die festen Tangenten AB und DC desselben Kreises in den projectiven Punktreihen O und P. Durch die Parallelen zu R werden diese projectiven Punktreihen auf die Diagonalen JF und EH übertragen daher ist auch die Punktreihe O' proj. P'. Die Verbindungslinien der homologen Punkte O' und P' derselben hüllen demnach einen Kegelschnitt ein, der auch die Träger JF und EH berührt. Fällt O' in den Schnittpunkt T' der Träger, so deckt sich die Sehne MN mit jener AB, daher fällt P und mithin auch P' in's Unendliche. Es liegt daher der Berührungspunkt der Kegelschnittstangente EH im Unendlichen, sie ist eine Asymptote und der Kegelschnitt selbst eine Hyperbel. Aus ähnlichen Gründen ist JF die zweite Asymptote. Es erübrigt nur noch zu zeigen, dass $O'P'$ auch eine Diagonale des Parallelogramms ist, welches man erhält, wenn man durch M und N Parallele zu R zieht und diese mit G und L combinirt.

Zu dem Ende hat man zu zeigen, dass die in Figur 1. der grösseren Deutlichkeit wegen nicht gezogenen Verbindungslinien MQ und NS parallel sind zu R. Vermöge der Parallelen G und L findet die Proportion statt:

$$QO' : O'S = O'F : JO' \qquad 1)$$

Weil $AJ \parallel OO' \parallel BF$ jene:

$$O'F : JO' = OB : OA$$

daher mittelst 1)

$$QO' : O'S = OB : OA \qquad 2)$$

Des Kreises K wegen findet aber die Proportion statt:

$$OB : OA = MO : ON$$

daher mittelst 2)

$$QO' : O'S = MO : ON$$

woraus folgt, dass $MQ \parallel OO' \parallel NS \parallel R$ w. z. b. w.

Diese Erzeugungsweise der Hyperbel lässt sofort erkennen, dass die Contur der orthogonalen Projection der durch Drehung einer Geraden um eine zu ihr windschiefe Achse entstehenden Umdrehungsfläche auf eine zu letzterer parallele Ebene eine Hyperbel ist. In diesem Falle steht aber R senkrecht auf G und L.

Wien, im März 1893.

Wilhelm Ruff.

3.

Neuer Satz über die Cykloide.

Wenn zwei Kreise einen dritten Kreis, den Grundkreis, in demselben Punkte berühren, und sie rollen auf dem Grundkreise so, dass ihre Mittelpunkte auf verschiedene Seiten der ursprünglich gemeinschaftlichen Centrallinie zuliegen kommen, so soll gesagt werden, dass die Kreise nach verschiedenen Seiten oder entgegengesetzt rollen.

Der Halbmesser des Grundkreises soll im folgenden immer mit + bezeichnet werden. Der Radius des Rollkreises wird mit + oder − bezeichnet, je nachdem sein Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Grundkreises auf derselben Seite des gemeinschaftlichen Berührungspunktes liegt oder nicht.

Wenn die algebraische Summe der Halbmesser der Rollkreise gleich ist dem Halbmesser des Grundkreises, so sollen die Rollkreise Ergänzungskreise heissen und es ergibt sich der Satz:

„Rollen die Ergänzungskreise entgegengesetzt, so beschreibt der gemeinschaftliche Berührungspunkt stets eine und dieselbe Cykloide."

Zu Zwecken des Beweises soll der Halbmesser des Grundkreises mit r und jene der Rollkreise mit r_1 und r_2 bezeichnet werden, und er wird in zwei Teile zerfallen, in jenen für die arithmetische und in den für die algebraische Summe, und soll synthetisch geliefert werden.

a) Für die arithmetische Summe. In diesem Falle sind die Rollkreise Fig. 1, k_1 und k_2 kleiner als der Grundkreis k, und ihre

Mittelpunkte m_1 und m_2 liegen zu derselben Seite des Berührungspunktes a mit dem Mittelpunkte m des Grundkreises.

Es rolle nun k_1 so, dass der Punkt b seines Umfanges nach c in den Grundkreis fällt, was dann der Fall ist, wenn

$$\text{arc}\,ac = \text{arc}\,ab$$

Der Mittelpunkt von k_1 kommt dabei nach m_1', also rollt k_1 nach rechts. Beschreibt man von m aus mit mb einen Kreisbogen, so schneidet dieser bekanntlich die neue Lage k_1' des Rollkreises in dem Punkte p der Cykloide, die der Berührungspunkt a mit k_1 beschreibt.

Nun soll gezeigt werden, dass a auch durch entgegengesetztes Rollen von k_2 nach p gelangt. Zu dem Ende ziehe man $md \parallel m_1'p$ und $pm_2' \parallel mc$. Nach m_2' müsste der Mittelpunkt m_2 des Rollkreises k_2 gelangen, wenn letzterer entgegengesetzt zu k_1 gerollt würde, denn es ist

$$dm_2' = dm - m_2'm = dm - pm_1' = r - r_1 = r_2$$

Auch erkennt man, dass wenn man von m_2' aus mit $m_2'd$ den Kreis k_2' beschreibt, dieser durch p gehen muss, da, vermöge des Parallelogramms

$$m_2'p = mm_1' = r - r_1 = r_2$$

ist, und man wird gezeigt haben, dass p auch ein Punkt der Cykloide des Kreises k_2 ist, wenn man zeigt, dass

$$\text{arc}\,dp = \text{arc}\,da$$

Bezeichnet man den Winkel $dm_2'p$ mit w, so ist

$$\text{arc}\,dp = r_2 w \qquad 1)$$

Es ist aber auch Wkl. $dmc = w$, daher

$$\text{arc}\,dc = rw$$

oder

$$\text{arc}\,da + \text{arc}\,ac = r_1 w + r_2 w \qquad 2)$$

Endlich ist aber auch Wkl. $pm_1'c = w$, daher

$$\text{arc}\,pc = \text{arc}\,ac = r_1 w$$

weshalb sich 2) auf

$$\text{arc}\,da = r_2 w$$

reducirt, woraus mittelst 1) folgt

$$\text{arc}\,dp = \text{arc}\,da \quad \text{w. z. b. w.}$$

Anmerkung. Da der Punkt p nur eine Normale haben kann, ob man ihn zur Cykloide des Kreises k_1 oder k_2 rechnet, so folgt daraus, dass die drei Punkte dpc in einer Geraden liegen müssen, was auch aus dem Parallelogramm $m_2' m m_1' p$ geschlossen werden kann.

b) Für die algebraische Summe. In diesem Falle ist der Rollkreis k_1 grösser als der Grundkreis k, und ihre Mittelpunkte m und m_1 liegen auf derselben Seite vom Berührungspunkte a. Der Mittelpunkt m_2 des Rollkreises k_2 liegt dann auf der anderen Seite von a. Wir lassen nun k_1 so lange rollen, bis der Punkt b seines Umfanges nach c auf den Grundkreis fällt, was eintritt, wenn

$$\text{arc}\, ac = \text{arc}\, ab$$

m_1 kommt dabei nach m_1' und k_1 in die Lage k_1'. Beschreibt man von m aus mit mb einen Kreisbogen, bis dieser k_1' in p schneidet, so ist p ein Punkt der Cykloide, die a beim Rollen von k_1 beschreibt. Zieht man durch m eine Parallele zu $m_1'p$, so schneidet diese k in d und die durch p zu mc gezogene Parallele in m_2'. Nach m_2' muss nun der Mittelpunkt von k_2 kommen, wenn k_2 entgegengesetzt k_1 rollt, denn

$$m_2' d = m_2' m - md = m_1' p - md = r_1 - r = r_2$$

Da aber

$$m_2' p = m m_1' = r_1 - r = r_2$$

so muss der von m_2' aus mit $m_2 d$ beschriebene Kreis auch durch p gehen, und man hat bewiesen, dass p auch ein Punkt der Cykloide des Punktes a mit dem Rollkreise k_2 ist, wenn man zeigt, dass

$$\text{arc}\, dp = \text{arc}\, ad$$

Bezeichnet man den Winkel $p m_1' c$ mit w, so ist

$$\text{arc}\, pc = \text{arc}\, ab = \text{arc}\, ac = r_1 w \qquad 1)$$

$$\text{arc}\, ac = \text{arc}\, ad + \text{arc}\, dc$$

und da Winkel dmc auch gleich w ist, mittelst 1)

$$\text{arc}\, ad + r w = r_1 w$$

daraus

$$\text{arc}\, ad = (r_1 - r) w = r_2 w \qquad 2)$$

Endlich ist aber auch Winkel $p m_2' d = w$, daher

$$\text{arc}\, pd = r_2 w$$

und mittelst 2)

$$\text{arc}\, pd = \text{arc}\, ad \quad \text{w. z. b. w.}$$

Anmerkung. Auch hier müssen p, d und c in einer Geraden liegen, da p nur eine Normale haben kann.

Aus dem oben bewiesenen Satze folgt, dass man eine jede Cykloide vom gegebenen Rollkreise durch einen zweiten, von dem ersten im allgemeinen verschiedenen Rollkreis erzeugen kann, wenn die algebraische Summe der Halbmesser beider gleich ist dem Halbmesser des Grundkreises. Für das technische Zeichnen ist dieser Umstand von Wichtigkeit, weil man einen grossen Kreis durch einen kleineren ersetzen kann. Auch ist die sogenannte Pericykloide hiermit von selbst erledigt.

Wilhelm Rulf.

4.

Ueber Transformation und numerische Lösung der kubischen Gleichung.

§ 1. Die Gleichung

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

behält ihre Form bei Substitution

$$x=\frac{\alpha y+\beta}{y+\gamma}$$

und erlangt hinsichtlich der 3 unabhängigen Parameter α, β, γ dieselbe Allgemeinheit wie nach beliebig oft wiederholter Substitution. Wir können daher zur Vereinfachung der Betrachtung aller weitern Untersuchung die specielle Substitution

$$x=\alpha y+\beta$$

vorausgehen lassen. Dadurch geht Gl. (1) über in

$$y^3+Ay^2+By+C=0$$

wo

$$A=\frac{3\beta+a}{\alpha};\quad B=\frac{3\beta^2+2a\beta+b}{\alpha^2};\quad C=\frac{\beta^3+a\beta^2+b\beta+c}{\alpha^3}$$

Durch reelle α, β lassen sich die Bedingungen erfüllen:

$$A=0;\quad B=\pm 1;\quad C=-u$$

nämlich durch die Werte:

$$\beta=-\tfrac{1}{3}a;\quad \alpha^2=\pm(b-\tfrac{1}{3}a^2):\quad u=(-\tfrac{2}{27}a+\tfrac{1}{3}ab-c):\alpha^3$$

Hiermit ist x, welches als Lösung der gegebenen kubischen Gl. (1) Function dreier Grössen a, b, c war, linear in einer Function einer Variabeln

$$y = \varphi(u)$$

dargestellt, und man hat:

$$x = \sqrt{\pm(b - \tfrac{1}{3}a^2)}\,\varphi(u) - \tfrac{1}{3}a$$

Diese Function hat folgende Eigenschaften.

1) Es ist $\varphi(-u) = -\varphi(u)$. Demzufolge beschränkt sich das Bereich der zu berechnenden Werte auf positive Argumente.

2) Für das obere Zeichen wächst $\varphi(u)$ mit u beständig von 0 bis ∞, folglich hat es nur einen reellen Wert.

3) Ist $\varphi(u) = y_0$ überhaupt einer der 3 Werte, so sind die beiden andern unabhängig von den Coefficienten der Gleichung eine Function von y_0; denn man hat:

$$y^2 + y_0 y + y_0^2 \pm 1 = 0$$

Dies gibt, wofern y_0 reell, für oberes Zeichen immer, für unteres, solange

$$y_0^2 > \tfrac{1}{3} \qquad (2)$$

ist, imaginäre y.

Die transformirte Gleichung lautet nun:

$$y^3 \pm y = u \qquad (3)$$

§ 2. Der Fall des untern Zeichens lässt sich durch die Substitution

$$y = \frac{\gamma}{z} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

wofern

$$y = \sqrt{\frac{u}{\sqrt{3}} - \frac{2}{9}}$$

reell ist, auf den des obern reduciren. Die Gleichung

$$y^3 - y = 0$$

geht dann über in

$$z^3 + z = v = \frac{\gamma}{\sqrt{3}}$$

Bedingung der Realität ist

$$u > \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

wie auch der Cardanische Wurzelausdruck zeigt, und diese Grenze stimmt mit der obigen (2) überein; denn man findet:

$$u = y_0^3 - y_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

§ 3. Wir gehen nun von der Gl. (3) aus und führen sie durch die allgemeinste Substitution

$$y = \frac{\alpha z + \beta}{z + \gamma}$$

auf die gleiche Form

$$z^3 + \varepsilon z = v \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

zurück. Es ergeben sich die Bedingungen:

$$(3\alpha^2 \pm 1)\beta = (3u \mp 2\alpha)\gamma \tag{4}$$

$$2\alpha\beta^2 \pm 2\beta\gamma - (3u \mp \alpha)\gamma^4 = \varepsilon(\alpha^3 \pm \alpha - u) \tag{5}$$

$$\beta^3 \pm \beta\gamma^3 - \gamma^3 u = (\alpha^3 \pm \alpha - u)v \tag{6}$$

Gl. (4) sei zerlegt in

$$\beta = \frac{3u \mp 2\alpha}{\varrho} \qquad \gamma = \frac{3\alpha^2 \pm 1}{\varrho} \tag{7}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\Gamma = 3\alpha^2 \pm 1; \quad \Delta = \alpha(\alpha^2 \pm 1) - u$$

so ist Δ Factor beider Seiten der Gl. (5) und (6). nachdem darin die Werte (7) eingesetzt sind, und man findet:

$$\varrho^2 = 3\varepsilon(9\alpha\Delta - \Gamma^2)$$

$$v = \frac{27(\alpha\Gamma - \Delta)\Delta - 2\Gamma^3}{\varrho^3}$$

§ 4. Um von dieser Transformation Anwendung auf die numerische Lösung der kubischen Gleichung zu machen, wollen wir annehmen, es sei die Function $\varphi(u)$ für oberes Zeichen durch eine Tafel von $u = 0$ bis $u = 1$ bekannt, und deren Gebrauch auf das weitest mögliche Intervall der u ausdehnen. Nun ist

$$\varrho^2 = 3(3\alpha^2 - 1 - 9\alpha u) \tag{8}$$

Um nicht durch die Unterscheidung positiver und negativer Werte dieses Ausdrucks gehindert zu sein, schreiben wir $-u$ für u Dann handelt es sich um Untersuchung der Function

$$v = \psi(u) = \frac{-2(9\alpha^2 + 1) + 27\alpha(\alpha^2 - 1)u - 27u^2}{[3(3\alpha^2 - 1) + 27\alpha u]^{\frac{3}{2}}} \tag{9}$$

Die Gleichung, welche deren Maxima und Minima bestimmt, lautet:

$$9\alpha u^2+(9\alpha^4+3\alpha^2-4)u-2\alpha(\alpha^2+1)(3\alpha^2+2)=0$$

woraus als positive Wurzel:

$$u=\frac{2}{9}\,\frac{3\alpha^2+2}{\alpha} \tag{10}$$

Die negative Wurzel dieser Gleichung fällt ausser Betracht. Die positive ergibt ein positives Maximum, bis zu welchem v wächst, bevor es beständig und ins unendliche abnimmt. Für α wählen wir den grössten einziffrigen Wert, für welchen dieses Maximum <1 ist; dieser ist $\alpha=7$. Dann ist von $u=1$ an über jenen Wert

$$u=\frac{298}{63}$$

der dem grössten v entspricht, hinaus, v positiv <1 und, bis $u=9927$, >-1.

Will man also $-y=\varphi(u)$, welches für $u<1$ durch die Tafel bekannt ist, für

$$1<u<9927$$

finden, so berechnet man

$$v=\frac{-884+9072u-27u^2}{\{3(146+63u\}^{\frac{1}{2}}} \tag{11}$$

und sucht zu v, dessen absoluter Wert stets <1 ist, in derselben Tafel den Functionswert

$$z=\varphi(v)$$

dann ist

$$\varphi(u)=\frac{\alpha\varphi(v)+\beta}{\varphi(v)+\gamma} \tag{12}$$

Sei z. B. nach erster Transformation die kubische Gleichung

$$y^3+y=-100$$

Dann erhält man nach Gl. (S) für $\alpha=7$:

$$\varrho^3-3(146+63\,.\,100)=19338$$

und, wenn man für ϱ die negative Wurzel wählt, nach Gl. (7)

$$\beta=\frac{314}{\sqrt{19338}}=2{,}2580;\quad \gamma=-\frac{148}{\sqrt{19338}}=-1{,}0643$$

ferner nach Gl. (10)

$$v=0{,}23663\ldots$$

und aus der Tafel

$$\varphi(v)=0{,}25221$$

Dies in Gl. (12) eingesetzt gibt:

$$\varphi(100) = -4{,}5698$$

was vom wahren Werte nahezu um 0,000,05 abweicht.

Durch Vergrösserung von α kann man das Intervall der u über die obere Grenze 9927 hinaus ins unbegrenzte erweitern, während es nach unten zu freilich aufhört bis 1 zu reichen. Setzt man nämlich $u = \alpha^3$, so wird nach Gl. (9)

$$v = -\frac{27\alpha^4 + 18\alpha^2 + 2}{(27\alpha^4 + 9\alpha^2 - 3)^{\frac{3}{2}}}$$

für $\alpha = \infty$ unendlich klein. Soll sich also das Intervall der u, wo $-1 < v < 1$ ist, nach oben und unten zu über irgend einen Wert $u = u_1$ hinaus erstrecken, so braucht man nur α nahe bei $u_1^{\frac{1}{3}}$ zu wählen.

§ 5. Vom Gebrauch der Tafel für $y^3 + y = u$ ist nun allein der Fall ausgeschlossen, wo die Gl. (1) 3 reelle Wurzeln hat. Diese reducirt sich nach § 1. auf

$$y^3 - y = 0$$

und zwar ist alsdann

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}} < u < \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Sofern wir nur positive u berücksichtigen, lässt sich die Auflösung durch eine Tafel der Function

$$y = \varphi_1(u)$$

im Umfang von $u = 0$ bis $u = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, entsprechend den Werten $y=1$ bis $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$, darstellen. Einer Erweiterung wie in § 4. bedarf es hier nicht.

Die angegebene Wurzel ist die einzig positive; die zwei negativen liegen zwischen -1 und 0, getrennt durch den Wert $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, welcher dem Maximum u entspricht. Ihre Werte sind, wenn $y = y_0$ in der Tafel steht:

$$-\tfrac{1}{2}y_0 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - 3y_0^2}$$

R. Hoppe.

5.

Bedingung, unter der 4 von einem Punkte aus gesehene Punkte in einem Raume liegen.

Sieht man von einem Punkte O aus 2 Punkte P_1 und P_2, so ist der Winkel P_1OP_2 messbar und seine Grösse unabhängig von allen andern Punkten. Durch OP_1P_2 wird eine Ebene bestimmt.

Sieht man zugleich einen dritten Punkt P_3, so liegt dieser dann und nur dann in derselben Ebene, wenn einer der 3 Winkel P_1OP_2, P_1OP_3, P_2OP_3 gleich der Summe der beiden andern ist. Andernfalls bestimmen die 4 Punkte $OP_1P_2P_3$ einen Raum (von 3 Dimensionen). Wir nennen eine solche dreifache Mannigfaltigkeit eine Dreidehnung.

Sieht man nun zugleich einen vierten Punkt P_4, so sind 6 Winkel

$$P_1OP_2, \quad P_2OP_3, \quad P_3OP_1, \quad P_3OP_4, \quad P_1OP_4 \quad P_2OP_4$$

deren Cosinus wir bzhw. mit

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon, \quad \zeta \tag{1}$$

bezeichnen, und deren Sinus mit

$$\alpha', \quad \beta', \quad \gamma', \quad \delta', \quad \varepsilon', \quad \zeta'$$

sämtlich unabhängig von einander gegeben. Liegt nun P_4 in demselben Raume $OP_1P_2P_3$, so ist nach der hier geltenden sphärischen Trigonometrie das System der 4 Strahlen OP_1, OP_2, OP_3, OP_4, welches wir die Ecke $P_1P_2P_3P_4$ nennen, bestimmt durch je 5 der 6 Grössen (1), und die sechste durch eine Relation mit ihnen verbunden. Indem wir die von den 6 Winkelebenen gebildeten Winkel in nicht miszuverstehender Weise mit je 3 der 4 Punkte bezeichnen, ergibt sich jene Relation in der Form

$$P_1P_4P_3 = \pm P_1P_4P_3 \pm P_2P_4P_3$$

und nach sphärisch trigonometrischem Ausdruck der Flächenwinkel durch die Seitenwinkel der dreikantigen Ecken, d. i. in den Grössen (1):

$$\Delta = 0$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\Delta = 1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 - \varepsilon^2 - \zeta^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\varepsilon^2 + \gamma^2\zeta^2$$
$$+ 2(\alpha\beta\gamma + \beta\delta\zeta + \alpha\varepsilon\zeta + \gamma\delta\varepsilon) - 2(\beta\varepsilon\gamma\zeta + \gamma\zeta\alpha\delta + \alpha\delta\beta\varepsilon)$$

Demnach ist $\Delta = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung, damit 4 von einem Punkte aus gesehene Punkte mit dem Auge in einer linearen Dreidehnung liegen.

Allgemein, d. h. nicht bedingt durch $\Delta = 0$, bestimmen die die Grössen (1) ein System von 4 Strahlen in der linearen Vierdehnung. Seien

$$a_k, \quad b_k, \quad c_k, \quad d_k \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

die Richtungscosinus der 4 Strahlen gegen 4 orthogonale Axen; dann hat man:

$$\left.\begin{aligned} a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2 &= \alpha \\ a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 + d_1d_3 &= \gamma \\ a_1a_4 + b_1b_4 + c_1c_4 + d_1d_4 &= \varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 + d_2d_3 &= \beta \\ a_2a_4 + b_2b_4 + c_2c_4 + d_2d_4 &= \zeta \\ a_3a_4 + b_3b_4 + c_3c_4 + d_3d_4 &= \delta \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Um die 6 Grössen, welche mit der willkürlichen Axenlage willkürlich bleiben, auf einfachste Art zu bestimmen, sei OP_1 die a Axe, OP_1P_2 die ab Ebene und $OP_1P_2P_3$ der abc Raum; dann ist

$$a_1 = 1; \quad b_1 = c_1 = d_1 = c_2 = d_2 = d_3 = 0$$

die Gl. (2) werden:

$$a_2 = \alpha; \quad a_3 = \gamma; \quad a_4 = \varepsilon$$

und die Gl. (3):

$$\alpha\gamma + b_2b_3 = \beta; \quad \alpha\varepsilon + b_2b_4 = \zeta; \quad \gamma\varepsilon + b_3b_4 + c_3c_4 = \delta$$

woraus:

$$b_2 = \alpha'; \quad b_3 = \frac{\beta - \alpha\gamma}{\alpha'}; \quad b_4 = \frac{\zeta - \alpha\varepsilon}{\alpha'}$$

$$c_3 = \frac{\sqrt{\Gamma}}{\alpha'^2}; \quad c_4 = \frac{\Theta}{\alpha'\sqrt{\Gamma}}; \quad d_4 = \sqrt{\frac{\Delta}{\Gamma}} \quad .$$

$$\Gamma = 1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma$$

$$\Theta = \delta\alpha'^2 - \beta\zeta - \gamma\varepsilon + \alpha(\beta\varepsilon + \gamma\zeta)$$

und zwar drückt d_4 den Normalabstand des Endpunkts der Strecke 1 auf dem Strahle OP_4 von dem Raume $OP_1P_2P_3$ aus. Dies bestätigt das bereits gewonnene Resultat, wonach $\Delta = 0$ die Bedingung dafür ist, dass die 4 Strahlen in einem Raume liegen.

R. Hoppe.

6.

Entwickelung von $\sin E_m(\varepsilon, \varphi)$ in eine nach Potenzen von $\sin\varphi_m$ fortschreitende Reihe.

Setzt man in der Bürmann'schen Reihe

$$f(x) - f(a) = [\varphi(x) - \varphi(a)]A_1 + \frac{1}{1 \cdot 2}[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 A_2 + \ldots$$

wo

$$A_1 = \left\{\frac{f'(x)}{\varphi'_1(x)}\right\} x = a, \quad A_2 = \left\{\frac{{}_1A_1'}{\varphi'(\varphi')}\right\} x = a \quad \text{u. s. w.}$$

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{m} E(\varepsilon, \varphi)\right)$$

wo

$$E(\varepsilon, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi$$

ferner

$$\varphi(x) = \sin\frac{\varphi}{m}$$

so erhält man, da $f(a) = \varphi(a) = 0$ für $a = 0$ ist:

$$\sin\left(\frac{1}{m} E(\varepsilon, \varphi)\right) = \sin\frac{\varphi}{m} - \frac{m^2\varepsilon^2\left(\sin\frac{\varphi}{m}\right)^3}{3!} + \frac{m^4(4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4)\left(\sin\frac{\varphi}{m}\right)^5}{5!} - \ldots$$

Für $m = 1$ geht diese Reihe über in

I) $$\sin E(\varepsilon, \varphi) = \sin\varphi - \frac{\varepsilon^2 \sin^3\varphi}{3!} + \frac{(4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4)\sin^5\varphi}{5!} - \ldots$$

dieselbe lässt sich also leicht aus der Reihe

$$E(\varepsilon, \varphi) = \varphi - \frac{\varepsilon^2\varphi^3}{3!} + \frac{(4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4)\varphi^5}{5!} - \ldots$$

ableiten. (T. VIII, Seite 378.)

Die Recursionsformel für die letztere ist

$$F_{(\varphi=0)}{}^{m+2} = z^{m+2} = (2m_2 - m_1)\varepsilon^2 z^m - (2m_4 - m_3)2^2\varepsilon^2 z^{m-2} + (2m_6 - m_5)2^4\varepsilon^2 z^{m-4} - (2m_8 - m_7)2^6\varepsilon^2 z^{m-6} + (2m_{10} - m_9)2^8\varepsilon^2 z^{m-8} - \ldots$$

wie aus dem binomischen Satze für die Differentialquotienten eines Products folgt, da

$$\varepsilon^2 \sin\varphi \cos\varphi \, F(\varphi)' = -(1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi) \, F(\varphi)''$$

Statt $\sin\varphi$ kann man in Reihe I auch $\frac{\varepsilon+\cos v}{1+\varepsilon\cos v}$ setzen, wo v die wahre Anomalie bezeichnet, wenn $\cos v$ zwischen den Grenzen $-\varepsilon$ und 1 genommen wird.

Da

$$\frac{dE(\varepsilon,\ \varphi)}{d\varphi} = (1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{1/2}$$

also, wenn man $E(\varepsilon,\ \varphi)$ kurz mit E bezeichnet

$$\frac{d\varphi}{dE} = \frac{1}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{1/2}}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dE^2} = \frac{\varepsilon^2\sin\varphi\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \cdot \frac{d\varphi}{dE} = \frac{\varepsilon^2\sin\varphi\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^2} \text{ u. s. w.}$$

so ergiebt sich nach der Taylor'schen oder auch nach der Bürmann-schen Reihe

II) $$\varphi = E + \frac{\varepsilon^2 E^3}{3!} + \frac{1}{5!}(13\varepsilon^4 - 4\varepsilon^2)E^5 + \ldots$$

Für $\varepsilon = 0$ wird diese Reihe

$$\varphi = E$$

für $\varepsilon = 1$ wird sie

$$\varphi = \arcsin E = E + \frac{E^3}{3!} + \frac{3^2 E^5}{5!} + \ldots$$

$$= E + \frac{1E^3}{1.2.3} + \frac{1.3E^5}{2\ \ 4.5} + \ldots$$

Da E in letzterem Falle $\leqq 1$, so muss Reihe II convergiren.

Nach der Bürmann'schen Reihe erhält man ferner

$$\sin\varphi = \sin E + \frac{\varepsilon^2\sin^3 E}{3!} + \frac{(13\varepsilon^4 - 4\varepsilon^2)\sin^5 E}{5!} + \ldots$$

eine Reihe welche sich leicht aus II) ableiten lässt.

Setzt man $\sin(\sin E) = \sin E_1$, $\sin(\sin\varphi) = \sin\varphi_1$ u. s. w., so geht I) über in

$$\sin E_n = \sin\varphi_n - \frac{\varepsilon^2\sin^3\varphi_n}{3!} + \ldots$$

Da

$$\frac{\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}{m} = \frac{\varphi}{m} - \frac{\varepsilon^2\varphi^3}{2!\,m} + \frac{(4\varepsilon^2-3\varepsilon^4)\varphi^5}{4!\,m} - \ldots$$

so erhält man für $n = 3$ und $m = 9$

III) $$\sin E_3 = \frac{8+\sin\varphi_3\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi_4}}{9}\sin\varphi_3 - \frac{6\varepsilon^2\sin^3\varphi_3}{3!\,9}$$
$$+\frac{4(4\varepsilon^2-3\varepsilon^4)\sin^5\varphi_3}{5!\,9} - \frac{2(16\varepsilon^2-60\varepsilon^4+45\varepsilon^6)}{7!\,9}\sin^7\varphi_3 + 0$$
$$+\frac{2(256\varepsilon^2-16320\varepsilon^4+105840\varepsilon^6-189000\varepsilon^8+99225\varepsilon^{10})}{11!\,9}\sin^{11}\varphi_3$$
$$-\ldots$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist $\varphi_3 < \frac{\pi}{4}$, und Reihe I giebt durch Summirung der ersten 4 Glieder für den Sinus des Ellipsenquadranten eine Genauigkeit geringsten Falls bis 4, Reihe III unter denselben Bedingungen für $\sin E_3$ eine solche von 7 Decimalstellen, wenn die halbe grosse Achse $a = 1$ gesetzt wird.

Wenn E sehr nahe an $\frac{\pi}{2}$ liegt, so kann man

$$\cos E = \sqrt{1-\sin^2 E} = \sqrt{1-(1-x)^2}$$

oder annähernd $= \sqrt{2x}$ berechnen, um für E eine grössere Genauigkeit zu erhalten.

Luckenwalde. C. Benz.

7.

Recursionsformel zur Rectification der Ellipse. T. VII. S. 378.

Aus dem binomischen Satze für die Differentialquotienten eines Products folgt, da

$$\varepsilon^2\sin\varphi\cos\varphi\,F^{I}(\varphi) = -(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)\,F^{II}(\varphi)$$

ist:

$$F^{(m+2)}(\varphi=0) = (2m_2-m_1)\,\varepsilon^2 v^m - (2m_4-m_3)\,2^2\varepsilon^2 v^{m-2}$$
$$+(2m_8-m_5)\,2^4\varepsilon^2 v^{m-4} - (2m_6-m_7)\,2^6\varepsilon^2 v^{m-6}$$
$$+(2m_{10}-m_9)\,2^8\varepsilon^2 v^{m-8} - \ldots$$

C. Benz.

8.

Reihe zur numerischen Berechnung eines Ellipsenbogens.

Es ist für jeden Wert von m_1, wenn

$$E = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi$$

$$m_1 E = m_1\varphi - \frac{\varepsilon^2 m_1 \varphi^3}{3!} + \frac{(4\varepsilon^2-3\varepsilon^4)}{5!} m_1\varphi^5 - \ldots$$

(Vergl. „Anwendung des Taylor'schen Satzes zur Rectification der Ellipse") oder:

1) $$m_1 E = m_1\varphi - \frac{\varepsilon^2 (m_1\varphi)^3}{3!\, m_1^2} + \frac{(4\varepsilon^2-3\varepsilon^4)}{5!\, m_1^4} (m_1\varphi)^5 - \ldots$$

und vermittelst der Bürmann'schen Reihe für $m_1\varphi \leqq \frac{\pi}{2}$

2) $$\sin(m_1 E) = \sin(m_1\varphi) - \frac{\varepsilon^2(\sin(m_1\varphi))^3}{3!\, m_1^2} + \frac{(4\varepsilon^2-3\varepsilon^4)\,(\sin(m_1\varphi))^5}{5!\, m_1^4} - \ldots$$

(Vergl. „Entwickelung von sin E_n in eine nach Potenzen von sin φ_n fortschreitende Reihe", wo $\frac{1}{m}$ statt m_1 gesetzt und auch die Recursionsformel angegeben ist.)

Es ist nämlich, wenn

$$\frac{dE}{d\varphi} = E^{\mathrm{I}} = \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}$$

u. s. w., für $\varphi = 0$

$$E^{\mathrm{I}} = 1, \quad E^{\mathrm{II}} = 0, \quad E^{\mathrm{III}} = -\varepsilon^2, \quad E^{\mathrm{IV}} = 0, \quad E^{\mathrm{V}} = 4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4$$

und in der Bürmann'schen Reihe, ebenfalls für $\varphi = 0$,

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = E^{\mathrm{III}} = -\varepsilon^2, \quad A_4 = 0$$

$$A_5 = 9 - 9 + \frac{9E^{\mathrm{III}}}{m_1^2} - \frac{9E^{\mathrm{III}}}{m_1^2} + \frac{E^{\mathrm{V}}}{m_1^4} = \frac{E^{\mathrm{V}}}{m_1^4} = \frac{4\varepsilon^2-3\varepsilon^4}{m_1^4}$$

Man kann also Reihe 2) aus Reihe 1) dadurch ableiten, dass man $\sin(m_1\varphi)$ für $m_1\varphi$ setzt. Wiederholt man das Verfahren unter der Bedingung, dass auch $m_2, m_3 \ldots m_\nu$ je $\leqq \frac{\pi}{2}$, indem man

$\sin(m_1 E)$ durch E_{m_1}, $\sin(m_1 \varphi)$ durch φ_{m_1}, ferner $\sin(m_2 \sin(m_1 E))$ durch $E_{m_1 m_2}$, $\sin[m_2 \sin(m_1 \varphi)]$ durch $\varphi_{m_1 m_2}$ u. s. w. bezeichnet, so erhält man

$$3)\quad E_{m_1 m_2 \ldots m_\nu} = \varphi_{m_1 m_2 \ldots m_\nu} - \frac{\varepsilon^2 (m_1 m_2 \ldots m_\nu)^2}{3!\, m_1^2 \cdot m_2^2 \ldots m_\nu^2} + \ldots$$

und für

$$m_1 \varphi = m_2 = m_3 = \ldots = m_\nu = \frac{\pi}{2}$$

$$4)\quad E_{m_1 \left(\frac{\pi}{2}\right)_2 \ldots \left(\frac{\pi}{2}\right)_\nu} = 1 - \frac{\varepsilon^2 \cdot \varphi^2}{3! \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]^\nu} + \frac{(4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4) \cdot \varphi^4}{5! \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\right]^\nu} - \frac{(16\varepsilon^2 - 60\varepsilon^4 + 45\varepsilon^6)}{7! \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^6\right]^\nu} \varphi^6 + \ldots$$

Der Convergenzquotient dieser Reihe ist $< \frac{\varphi^2}{\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]^\nu}$, dieselbe also in Bezug auf diesen Ausdruck in gewissem Sinne in beliebigem Grade convergent. Bei der Berechnung muss aber stets das 2. Glied berücksichtigt werden, da E eine Function von φ und ε ist. Die Berechnung gilt zunächst für die halbe grosse Achse $a = 1$. Für andere Werte hat man schliesslich den Wert von E mit a zu multipliciren.

Luckenwalde, den 16. März 1894.

C. Benz.

9.

Bemerkungen zur Summenformel für die Potenzreihe der natürlichen Zahlen

1.

Bezeichnen wir die Potenzreihe der natürlichen Zahlen $1^x + 2^x + 3^x + \ldots + n^x$ mit $f(x)$, so ist bekanntlich

$$(2r+1) f(2r) = n^{2r+1} + \tfrac{1}{2}\binom{2r+1}{1} n^{2r} + \binom{2r+1}{2} B_2 n^{2r-1} - \binom{2r+1}{4} B_4 n^{2r-3} \pm \ldots + (-1)^{r-1} \binom{2r+1}{2r} B_{2r} n \quad (1)$$

und

$$(2r+2)f(2r+1) = n^{2r+2} + \tfrac{1}{2}\binom{2r+2}{1}n^{2r+1} + \binom{2r+2}{2}B_2 n^{2r} - \binom{2r+2}{4}B_4 n^{2r-2} \pm \ldots + (-1)^{r-1}\binom{2r+2}{2r}B_{2r}n^2 \quad (2)$$

worin B_2, B_4 . . . die Bernoulli'schen Zahlen bedeuten. Diese Ausdrücke lassen sich in einfacher Weise mit Hülfe der Gleichung

$$(n+1)^{x+1} = \binom{x+1}{1}f(x) + \binom{x+1}{2}f(x-1) + \ldots + \binom{x+1}{x}f(1) + n + 1 \quad (3)$$

ableiten, welche es ermöglicht $f(x)$ durch $f(x-1)$, $f(x-2)$, . . . $f(1)$ zu bestimmen. Dabei ergeben sich für die Bernoulli'schen Zahlen die recurrenten Beziehungen

$$\binom{2r+1}{1}B_{2r} - \binom{2r+1}{3}B_{2r-2} + \binom{2r+1}{5}B_{2r-4} \mp \ldots + (-1)^{r-1}\binom{2r+1}{2r-1}B_2 = (-1)^{r-1}\frac{2r-1}{2} \quad (4)$$

und

$$\binom{2r+2}{2}B_{2r} - \binom{2r+2}{4}B_{2r-2} + \binom{2r+2}{6}B_{2r-4} \mp \ldots + (-1)^{r-1}\binom{2r+2}{2r}B_2 = (-1)^{r-1} \cdot r \quad (5)$$

Wie die Darstellungen von $f(2r)$ und $f(2r+1)$ erkennen lassen, ist für alle Werte von r mit Ausnahme von null

$$\frac{df(2r+1)}{dn} = (2r+1)f(2r) \quad (6)$$

und es würde sich durch Betrachtung von $f(2r)$ und $f(2r-1)$ ebenso leicht erweisen lassen. dass

$$\frac{df(2r)}{dn} = 2rf(2r-1) + (-1)^{r-1}B_{2r} \text{ sein muss.} \quad (7)$$

Hiernach ist es möglich, mit $f(1)$ beginnend, die Ausdrücke für $f(2)$, $f(3)$ u. s. f. nach den Regeln der Integration zu finden. Aus jeder Reihe mit geradem Argument bekommt man nach diesem Verfahren bis auf einen constanten Factor sämtliche Glieder der folgenden Reihe, aus jeder Reihe mit ungeradem Argument alle Glieder mit Ausschluss des letzten in n. Der Coefficient dieses Gliedes ist gleich der abwechselnd mit dem positiven und negativen Vorzeichen versehenen folgenden Bernoulli'schen Zahl. So findet sich

$$
\begin{aligned}
f(1) &= \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\\
f(2) &= \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\\
f(3) &= \frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2\\
f(4) &= \frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n\\
f(5) &= \frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2\\
f(6) &= \frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n\\
f(7) &= \frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2\\
f(8) &= \frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\frac{2}{3}n^7-\frac{7}{15}n^5+\frac{2}{9}n^3-\frac{1}{30}n\\
f(9) &= \frac{1}{10}n^{10}+\frac{1}{2}n^9+\frac{3}{4}n^8-\frac{7}{10}n^6+\frac{1}{2}n^4-\frac{3}{20}n^2\\
f(10) &= \frac{1!}{11}n^{11}+\frac{1}{2}n^{10}+\frac{5}{6}n^9-n^7+n^5-\frac{1}{2}n^3+\frac{5}{66}n\\
f(11) &= \frac{1}{12}n^{12}+\frac{1}{2}n^{11}+\frac{11}{12}n^{10}-\frac{11}{8}n^8+\frac{11}{6}n^6-\frac{11}{8}n^4\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\frac{5}{12}n^2
\end{aligned}
\tag{8}
$$

2.

Bei geraden Exponenten schliessen die Reihen mit n, bei ungeraden mit n^2, es enthalten also sämtliche Reihen den Factor n. Die Gleichung (3) zeigt, dass ausserdem noch in sämtlichen f der Factor $n+1$ enthalten sein muss.

Wir wollen nun nachweisen, dass $f(2r)$ ferner noch durch $2n+1$ und $f(2r+1)$ durch $n(n+1)$ teilbar sein muss, und dass sowol $\frac{f(2r)}{n(n+1)(2n+1)}$ als auch $\frac{f(2r+1)}{n^2(n+1)^2}$ nach Potenzen von $n(n+1)$ fortschreitende Reihen bilden. Es wird sich alsdann $f(2r)$ darstellen lassen als $f(2)$ multiplicirt mit einer Function von $f(1)$ und $f(2r+1)$ als eine Function von $f(1)$ allein. In der Tat können die Gleichungen (8) umgeformt werden in

$$
\begin{aligned}
f(1) &= \frac{n(n+1)}{2}\\
f(2) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
f(3) &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}\\
f(4) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{30}[3n(n+1)-1]\\
f(5) &= \frac{n^2(n+1)^2}{12}[2n(n+1)-1]\\
f(6) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{42}[3n^2(n+1)^2-3n(n+1)+1]\\
f(7) &= \frac{n^2(n+1)^2}{24}[3n^2(n+1)^2-4n(n+1)+2]\\
f(8) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{90}[5n^3(n+1)^3-10n^2(n+1)^2\\
&\qquad +9n(n+1)-3]\\
f(9) &= \frac{n^2(n+1)^2}{20}[2n^3(n+1)^3-5n^2(n+1)^2+6n(n+1)-3]\\
f(10) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{66}[3n^4(n+1)^4-10n^3(n+1)^3\\
&\qquad +17n^2(n+1)^2-15n(n+1)+5]\\
f(11) &= \frac{n^2(n+1)^2}{24}[2n^4(n+1)^4-8n^3(n+1)^3\\
&\qquad +17n^2(n+1)^2-20n(n+1)+10]
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

3.

Unsere Behauptung ist in aller Vollständigkeit bewiesen, wenn sich zeigen lässt, dass $f(2r+1)$ dargestellt werden kann als Function von $n(n+1)$. Nach (6) ist $f(2r)$ bis auf den Factor $\frac{1}{2r+1}$ gleich dem Differentialquotienten von $f(2r+1)$ nach n. Wenn nun $f(2r+1)$ eine Function von $n(n+1)$ ist, muss $f(2r)$ gleich einer ebensolchen Function sein, multiplicirt mit $\frac{dn(n+1)}{dn}$ oder $2n+1$, wie behauptet worden. Da ferner nach (2) die Function $f(2r+1)$ teilbar ist durch n^2, muss sie ausserdem noch den Factor $(n+1)^2$ enthalten. Diese letztere Eigenschaft kann auch aus dem Umstande gefolgert werden, dass der Differentialquotient von $f(2r+1)$ d. h. $(2r+1)f(2r)$, wie wir wissen, durch $n+1$ teilbar ist. Dass $f(2r)$

den Factor $2n+1$ enthält, lässt sich auch direct aus der Formel nachweisen, indem man zeigt, dass $f(2r)$ für $n = -\frac{1}{2}$ verschwindet. Dieser Nachweis führt auf die bekannte Beziehung

$$\binom{2r+1}{1} 2^{2r} B_{2r} - \binom{2r+1}{3} 2^{2r-2} B_{2r-2} \pm \ldots$$
$$+(-1)^r \binom{2r+1}{2r+1} 2^0 \cdot B_0 = (-1)^{r-1}(2r+1) \qquad (10)$$

Es handelt sich also um den Nachweis, dass $f(2r+1)$ eine reine Function von $n(n+1)$ ist. Derselbe ist erbracht, wenn sich beweisen lässt, dass $f(2r+1)$ für $n = a$ und $n = -(a+1)$ stets denselben Wert annimmt, was auch a sein mag. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass, wenn eine ganze rationale Function von n diese Eigenschaft hat, sie sich muss darstellen lassen als Function von $n(n+1)$.

Wir wollen beim Beweise, insofern wir n als Veränderliche ansehen, die Function mit $f(n)$ notiren und erstens voraussetzen, dass dieselbe für $n = a$ und für $n = -(a+1)$ denselben Wert k annimmt. Dann muss

$$f(n) = (n-a) f_1(n) + k \quad \text{und} \quad f(n) = (n+a+1) f_2(n) + k$$

sein, woraus folgt, dass

$$(n-a) f_1(n) = (n+a+1) f_2(n)$$

also $f_1(n)$ durch $n+a+1$ und $f_2(n)$ durch $n-a$ teilbar ist. Darum stellt sich $f(n)$ auch dar als

$$f(n) = (n-a)(n+a+1) f_3(n) + k = [n(n+1) - a^2 - a] f_3(n) + k$$

Wir nehmen jetzt zweitens an, dass $f(n)$ auch für $n = b$ und $n = -(b+1)$ denselben Wert erhält. Da $n(n+1)$ für beide Werte von n sich nicht ändert, muss $f_3(n)$ dieselbe Eigenschaft haben und sich darum darstellen als

$$f_3(n) = [n(n+1) - b^2 - b] f_4(n) + l$$

woraus

$$f(n) = [n(n+1) - a^2 - a][n(n+1) - b^2 - b] f_4(n)$$
$$+ [n(n+1) - a^2 - a] l + k$$

Soll $f(n)$ auch für $n = c$ und $n = -(c+1)$ denselben Wert besitzen, so muss dasselbe für $f_4(n)$ der Fall sein, und

$$f_4(n) = [n(n+1) - c^2 - c] - f_5(n) + m \text{ sein.}$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten wir, da der Grad der Functionen $f_1(n)$, $f_2(n)$, . . . beständig abnimmt, schliesslich für $f(n)$ eine Darstellung als Function von $n(n+1)$.

4.

Wir setzen nunmehr in $f(2r+1)$ für n erst den Wert a, dann $-(a+1)$ ein. Im ersten Falle ergiebt sich bis auf den Factor $2r+2$ die Reihe

$$a^{2r+2}+\tfrac{1}{2}\binom{2r+2}{1}a^{2r+1}+\binom{2r+2}{2}B_2a^{2r}-\binom{2r+2}{4}B_4a^{2r-2}\pm\ldots$$
$$+(-1)^{r-1}\binom{2r+2}{2r}B_{2r}a^2$$

im andern Falle die Reihe

$$(a+1)^{2r+2}-\tfrac{1}{2}\binom{2r+2}{1}(a+1)^{2r+1}+\binom{2r+2}{2}B_2(a+1)^{2r}$$
$$-\binom{2r+2}{4}B_4(a+1)^{2r-2}\pm\ldots+(-1)^{r-1}\binom{2r+2}{2r}B_{2r}(a+1)^2$$

Wir entwickeln die zweite Reihe nach Potenzen von a und zeigen, dass die Coefficienten der Reihe noch mit denjenigen der ersten Reihe übereinstimmen. Die Identität der Coefficienten von a^{2r+2} ist klar, ebenso von a^{2r+1}. Für a^{2r-2s} ergiebt sich bei der ersten Reihe $(-1)^s\binom{2r+2}{2r+2}B_{2s+2}$, bei der zweiten dagegen

$$\binom{2r+2}{2s+2}-\tfrac{1}{2}\binom{2r+2}{1}\binom{2r+1}{2s+1}+\binom{2r+2}{2}\binom{2r}{2s}B_2$$
$$-\binom{2r+2}{4}\binom{2r-2}{2s-2}B_4\pm\ldots+(-1)^s\binom{2r+2}{2s+2}\binom{2r-2s}{0}B_{2s+2}$$

Diese beiden Coefficienten sind gleich, wenn

$$0=\binom{2r+2}{2s+2}-\tfrac{1}{2}\binom{2r+2}{1}\binom{2r+1}{2s+1}+\binom{2r+2}{2s+2}\Big[\binom{2s+2}{2s}B_2$$
$$-\binom{2s+2}{2s-2}B_4\pm\ldots+(-1)^{s-1}\binom{2s+2}{2}B_{2s}\Big]$$

ist. Die Klammer ist aber nach (5) gleich s, wonach sich die Identität nach kurzer Berechnung ergiebt.

Für die Coefficienten der ungeraden Potenzen von a ergiebt die erste Reihe bis auf denjenigen von a^{2r+1} den Wert null. Bei der zweiten kommt für $a^{2r-2s+1}$ die Reihe

$$\binom{2r+2}{2s+1}-\tfrac{1}{2}\binom{2r+2}{1}\binom{2r+1}{2s}+\binom{2r+2}{2}\binom{2r}{2s-1}B_2$$
$$-\binom{2r+2}{4}\binom{2r-2}{2s-3}B_4\pm\ldots+(-1)^{s-1}\binom{2r+2}{2s}\binom{2r-2s+2}{1}B_{2s}$$

oder

$$\binom{2r+2}{2s+1}-\tfrac{1}{2}\binom{2r+2}{1}\binom{2r+1}{2s}+\binom{2r+2}{2s+1}\Big[\binom{2s+1}{2s-1}B_2$$
$$-\binom{2s+1}{2s-3}B_4\pm\ldots+(-1)^{s-1}\binom{2s+1}{1}B_{2s}\Big]$$

Die Klammer ergiebt aber nach (4) den Wert $\frac{2s-1}{2}$. Setzen wir diesen Wert ein, so kommt nach geringer Umformung der Wert null.

Damit ist bewiesen, dass $f(2r+1)$ für $n=a$ und $n=-(a+1)$ denselben Wert annimmt und sich darstellt als Function von $n(n+1)$.

Was die Reihe $f(2r)$ anlangt, so würde sich auf gleiche Art zeigen lassen, dass sie für a und $-(a+1)$ gerade entgegengesetzte Werte annimmt. Dieses geht aber auch aus der Tatsache hervor, dass $f(2r)$ gleich $2n+1$ mal einer Function von $n(n+1)$ ist. Während diese letztere Function für a und $-(a+1)$ denselben Wert behält, kehrt sich $2n+1$ in sein Gegenteil.

Stephan Glaser.

Berlin, den 10. Februar 1894.

I.

Anwendung eines Abbildungsprincips zur Untersuchung von Curven zweiten Grades.

Von

Stephan Glaser.

Einleitung.

Es soll im Folgenden eine bekannte lineare Substitution, welche bei speciellen Aufgaben der Ellipse wiederholt verwendet worden ist, der Abbildung der ganzen Ebene zu Grunde gelegt und zur Untersuchung sämtlicher Curven zweiten Grades benutzt werden. Es handelt sich um die Substitution

$$x = a\xi, \quad y = b\eta$$

vermöge welcher die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sich in den Kreis vom Radius 1, die Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sich in die gleichseitige Hyperbel abbildet. Jedem Punkte der einen Ebene entspricht ein Punkt der andern und umgekehrt, und es ist die Abbildung so geartet, dass parallele Linien sich wieder in parallele Linien abbilden und das Verhältniss jeder Strecke zu ihrem Bilde nur abhängig ist von der Richtung, also für parallele Geraden

I.

§ 1.

Erklärung des Princips.

Gegeben sei eine Ellipse mit den Halbaxen a und b, um den Coordinatenanfangspunkt 0 als Mittelpunkt beschrieben. Bezeichnen wir die Coordinaten eines beliebigen Punktes mit (x, y) und die seines Bildes mit (ξ, η), so geschieht die Abbildung nach der Substitution

$$x = a\xi, \quad y = b\eta$$

Der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

selbst entspricht dann der Kreis

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$

jedem Punkte innerhalb der Ellipse entspricht ein Punkt innerhalb des Kreises, jedem Punkte ausserhalb der Ellipse ein Punkt ausserhalb des Kreises. Die Construction des zu einem Punkte des Kreises gehörigen Punktes der Ellipse kann in der folgenden Weise geschehen: Man zeichne um 0 noch zwei weitere Kreise mit den Radien a und b, verbinde 0 mit dem gegebenen Punkte und verlängere diese Verbindungslinie bis zum Schnitt mit den beiden Kreisen in A und B. Hat der gegebene Punkt die Coordinaten $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$, so sind die Coordinaten von A gleich $a\cos\varphi$ und $a\sin\varphi$, die von B gleich $b\cos\varphi$ und $b\sin\varphi$. Dann liefert die erste Coordinate von A combinirt mit der zweiten von B den zugehörigen Punkt der Ellipse. Man hat also nur durch A eine Parallele zur y axe, durch B eine solche zur x axe zu ziehen; der Schnittpunkt derselben ist der gesuchte Punkt der Ellipse. Natürlich kann man ebenso leicht zu jedem Punkte der Ellipse den zugehörigen des Kreises finden.

Es mag noch erwähnt werden, dass man durch Combination der zweiten Coordinate von A mit der ersten von B einen zweiten Punkt erhält, der eine wichtige Bedeutung für die Ellipse hat. Die Verbindungslinie von 0 mit diesem Punkte giebt nämlich die Richtung der Normalen an. Man erhält also zu jedem Punkte des Kreises gleichzeitig den zugehörigen Punkt der Ellipse und die Richtung der Normalen in diesem Punkte und umgekehrt zu jedem Punkte der Ellipse die Richtung der Normalen und den entsprechenden Punkt des Kreises.

Nur wenig complicirter wird die Construction, wenn es sich darum handelt, zu einem beliebigen Punkte (ξ, η) den zugehörigen Punkt (x, y) zu finden. Hat der gegebene Punkt die Polarcoordinaten $\varepsilon\cos\varphi$ und $\varepsilon\sin\varphi$, so construire man zu dem mit ihm auf demselben Radiusvector gelegenen Kreispunkt $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ den zugehörigen Punkt der Ellipse, verbinde beide mit einander und ziehe zu der Verbindungslinie durch den gegebenen Punkt eine Parallele, welche den Radiusvector nach dem Punkte der Ellipse oder die Verlängerung desselben in dem gesuchten Punkte (x, y) schneidet.

Will man umgekehrt zu einem gegebenen Punkte (x, y) den zugehörigen Punkt (ξ, η) finden, so suche man zu dem mit ihm auf demselben Radiusvector liegenden Ellipsenpunkte den zugehörigen Kreispunkt, verbinde beide mit einander und ziehe zu der Verbindungslinie durch den gegebenen Punkt eine Parallele, welche den Radiusvector nach dem Kreispunkt oder die Verlängerung desselben in dem gesuchten Punkte (ξ, η) schneidet.

§ 2.

Eigenschaften der Abbildung.

Schon aus den bisherigen Angaben geht hervor, dass sämtlichen Punkten einer durch 0 gehenden Geraden wieder Punkte einer durch 0 gehenden Geraden entsprechen, und dass die Abbildung eine ähnliche ist, insofern sich an dem Verhältniss der Entfernung mehrerer Punkte derselben Geraden bei der Abbildung nichts ändert. Wir wollen jetzt die Abbildung beliebiger Geraden näher untersuchen.

Heisst die Gleichung der geraden Linie

$$lx + my + n = 0$$

so gilt für das Bild derselben

$$al\xi + bm\eta + n = 0$$

Wir erhalten also wieder eine Gerade, die im allgemeinen gegen die erste um einen gewissen Winkel gedreht erscheint und einen andern Abstand von 0 hat. Nur wenn die gegebene Linie parallel ist einer der beiden Axen, ist das Bild derselben parallel. Stellt

$$l'x + m'y + n' = 0$$

eine zweite zur ersten parallele Gerade dar, so muss sich l zu l' wie m zu m' verhalten. Das Abbild der zweiten Geraden ist aber

$$al'\xi + bm'\eta + n' = 0$$

und es verhält sich auch al zu al' wie bm zu bm', d. h. die beiden Bilder laufen auch parallel.

Wir gewinnen damit den Satz:

„Die Abbilder paralleler Geraden sind wieder parallel."

Dieser Satz kann sogleich zur Ableitung einer weiteren Eigenschaft benutzt werden. Denken wir uns auf der ersten Geraden eine Reihe von Punkten P_1, P_2, P_3 u. s f. bestimmt, ziehen durch 0 eine Parallele und fixiren auf derselben eine zweite der ersten entsprechende Reihe von Punkten Q_1, Q_2, Q_3 u. s. f., so dass

$$P_1P_2 = Q_1Q_2, \quad P_2P_3 = Q_2Q_3$$

u. s. f. wird. Verbinden wir dann P_1 mit Q_1, P_2 mit Q_2 u. s. f., so laufen diese Verbindungslinien sämtlich parallel. Dasselbe muss nach dem obigen Satze aber auch für das Abbild dieses ganzen Systems von Linien gelten, woraus folgt, dass auch dort die Abschnitte der ersten Geraden gleich den entsprechenden der zweiten sein müssen, oder dass die Abschnitte der ersten Geraden sich unter einander ebenso verhalten wie die der zweiten. Nun wissen wir aber schon, dass bei einer durch 0 gehenden Geraden die Abschnitte des Bildes sich genau so verhalten wie die Abschnitte der Geraden selbst. Daher der Satz:

„Für Abschnitte paralleler Geraden ist das Verhältniss zum Bilde constant."

Dieses constante Verhältniss lässt sich leicht bestimmen; dasselbe hängt allein von der Richtung der Parallelen ab. Zur Bestimmung desselben wählen wir natürlich die durch 0 gehende Parallele, welche mit der positiven x axe den Winkel α bilden möge, und nehmen auf derselben zwei Punkte $(r_1\cos\alpha,\ r_1\sin\alpha)$ und $(r_2\cos\alpha,\ r_2\sin\alpha)$ an, deren Entfernung also gleich $\pm(r_1 - r_2)$ ist. Für die Abbilder der beiden Punkte ergeben sich die Coordinaten $\left(\frac{r_1}{a}\cos\alpha,\ \frac{r_1}{b}\sin\alpha\right)$ und $\left(\frac{r_2}{a}\cos\alpha, \frac{r_2}{b}\sin\alpha\right)$. Die Entfernung wird dann

$$\pm(r_1 - r_2)\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}}$$

Es verhält sich demnach jede Strecke zu ihrem Bilde wie 1 zu

$$\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}}$$

Wir können noch einen zweiten Ausdruck ableiten, indem wir vom Bilde ausgehen. Dasselbe sei um den Winkel φ gegen die positive x axe geneigt, die beiden Punkte seien $(s_1 \cos\varphi,\ s_1 \sin\varphi)$ und $(s_2 \cos\varphi,\ s_2 \sin\varphi)$, ihre Entfernung $\pm(s_1 - s_2)$. Dann ergeben sich als Coordinaten der Punkte selbst: $(a s_1 \cos\varphi,\ b s_1 \sin\varphi)$ und $(a s_2 \cos\varphi,\ b s_2 \sin\varphi)$, und die Entfernung derselben wird:

$$\pm(s_1 - s_2)\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}$$

Es verhält sich demnach jede Strecke zu ihrem Bilde auch wie

$$\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} \text{ zu } 1.$$

Beide Wurzelausdrücke spielen bei vielen, die Ellipse betreffenden Aufgaben eine Rolle und haben eine geometrische Bedeutung. Nehmen wir als einen der beiden Punkte den Mittelpunkt O selbst, als den andern einen Punkt der Ellipse, so ergiebt sich, dass der reciproke Wert des ersten Ausdrucks die Länge des zugehörigen Radiusvectors darstellt, ausgedrückt durch die Functionen des Winkels α, den derselbe mit der positiven x axe bildet, während der zweite Ausdruck selbst denselben Radiusvector darstellt, ausgedrückt durch die Functionen des Winkels φ, welchen der correspondirende Radius des Kreises mit der x axe bildet. Da beide Ausdrücke nur die Quadrate der Winkelfunctionen enthalten, nehmen sie für Supplementwinkel denselben Wert an, woraus der Satz folgt:

„Für zwei sich schneidende Geraden ist das Verhältniss ihrer Abschnitte zum Bilde nur dann dasselbe, wenn sie gleiche Neigung zur Axe haben."

Wir betrachten jetzt 2 senkrechte Geraden, gehörig zu den Winkeln φ und $90^0 + \varphi$. Die entsprechenden Verhältnisszahlen sind dann $\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}$ und $\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$, und die Summe der Quadrate ist gleich $a^2 + b^2$. Wir wollen nun allgemein 2 Geraden in Bezug auf die Ellipse conjugirt nennen, wenn ihre Bilder senkrecht zu einander stehen. Dann lässt sich der Satz formuliren:

„Für 2 conjugirte Geraden ist die Summe der Quadrate der entsprechenden Verhältnisszahlen constant gleich $a^2 + b^2$."

Nehmen wir speciell 2 conjugirte Halbmesser, so stellen die Verhältnisszahlen die Längen der Halbmesser selbst dar, und der Satz spricht die bekannte Tatsache aus, dass die Summe der Quadrate zweier conjugirten Halbmesser constant gleich $a^2 + b^2$ ist.

Von Curven mögen an dieser Stelle in Bezug auf ihre Abbildung

nur diejenigen Ellipsen betrachtet werden, welche der gegebenen ähnlich sind und dieselbe Richtung der Hauptaxen haben. Die Gleichung einer solchen ist

$$\frac{(x-x')^2}{a^2}+\frac{(y-y')^2}{b^2}=s^2$$

aus welcher sich für das Abbild ergiebt

$$(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2=s^2$$

Wir finden damit:

„Alle Ellipsen, welche der gegebenen ähnlich sind und dieselbe Richtung der Axen haben, liefern bei der Abbildung Kreise, und umgekehrt muss auch jede Curve, deren Abbildung einen Kreis liefert, eine der gegebenen ähnliche Ellipse mit gleicher Richtung der Axen sein."

Jede andere Ellipse und ebenso der Kreis liefert wieder eine Ellipse, deren Hauptaxen später bestimmt werden sollen.

Ein weiteres, für die Verwendbarkeit des Princips wichtiges Gesetz finden wir, wenn wir den Ausdruck für den Inhalt eines durch 3 beliebige Punkte bestimmten Dreiecks aufstellen. Haben die Punkte die Coordinaten (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), so wird der Inhalt dargestellt durch:

$$J=\pm\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}$$

wo das Zeichen so zu wählen ist, dass der Ausdruck positiv wird. Bilden wir nun das Dreieck nach unserm Princip ab und nennen die entsprechenden Punkte der Abbildung (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3), so wird

$$J=\pm\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & a\xi_1 & b\eta_1\\ 1 & a\xi_2 & b\eta_2\\ 1 & a\xi_3 & b\eta_3\end{vmatrix}=\pm\tfrac{1}{2}ab\begin{vmatrix}1 & \xi_1 & \eta_1\\ 1 & \xi_2 & \eta_2\\ 1 & \xi_3 & \eta_3\end{vmatrix}=ab\,.\,J'$$

wenn wir mit J' den Inhalt des Bildes bezeichnen. Da sich jedes beliebige Flächenstück in eine Summe von Dreiecken zerlegen lässt, ist damit der Satz gefunden:

„Der Inhalt einer jeden Figur ist gleich ab mal dem Inhalt des Bildes."

§ 3.

Anwendung zur Ableitung der Eigenschaften der Ellipse.

Wir wollen jetzt mit Hülfe unseres Princips die Eigenschaften der Ellipse aus den bekannten Eigenschaften des Kreises ableiten. Die gegebene Ellipse selbst wird dabei als Abbildungscurve genommen, so dass ihr der Kreis entspricht; senkrechten Linien beim Kreise entsprechen conjugirte Linien bei der Ellipse.

Fundamentaleigenschaften der Ellipse.

Was zunächst die Gestalt der Curve angeht, so ergeben sich sofort die folgenden Eigenschaften:

Wie beim Kreise wird auch bei der Ellipse jeder Durchmesser durch den Anfangspunkt halbirt. Zwei Durchmesser sind aber nur dann gleich, wenn sie denselben Winkel mit der Axe bilden, da nur in diesem Falle die entsprechenden Verhältnisszahlen gleich sind. Alle der einen Axe parallele Sehnen der Ellipse werden durch die andere senkrechte Axe halbirt, da auch ihre Bilder parallel der einen Axe laufen und durch die andere senkrechte halbirt werden. Aus dem Gesagten geht hervor, dass die Ellipse eine zu den Axen symmetrische Curve sein muss.

Beim Kreise werden aber nicht nur die Sehnen, welche parallel einer der Hauptaxen sind, durch die andere halbirt, sondern es liegen stets die Mittelpunkte paralleler Sehnen, welches auch ihre Richtung sein mag, auf dem senkrechten Durchmesser. Daher müssen die Mittelpunkte paralleler Sehnen der Ellipse auf dem conjugirten Durchmesser liegen.

Da ferner beim Kreise die Tangente senkrecht zum Radius nach dem Berührungspunkt steht, so müssen bei der Ellipse die Tangente und der Radiusvector zum Berührungspunkt conjugirt sein, d. h. die Tangente muss dem conjugirten Durchmesser parallel laufen.

Wie die Kreisfläche durch je zwei senkrechte Durchmesser, so wird auch die Fläche der Ellipse durch je 2 conjugirte Durchmesser in vier gleiche Teile geteilt.

Wie schon erwähnt, sind die zu den Winkeln φ und $90^0+\varphi$ gehörigen Halbmesser der Ellipse gleich

$$\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi} \quad \text{und} \quad \sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}$$

Diese selben Wurzelausdrücke sind es aber auch, mit welchen man die Abschnitte der zu den gewählten Kreisradien parallelen Geraden multipliciren muss, um die entsprechenden Abschnitte der zu den Halbmessern der Ellipse parallelen Geraden zu erhalten. Da nun die Gleichung des Kreises unabhängig von der Lage der rechtwinkligen Axen ist, so muss dasselbe auch für die entsprechende in schiefwinkligen Coordinaten ausgedrückte Gleichung der Ellipse gelten.

Zieht man von einem Punkte ausserhalb des Kreises die beiden Tangenten und verbindet die Berührungspunkte, so steht die Verbindungslinie senkrecht zur Centrale. Bei der Ellipse muss die entsprechende Linie der Centrale conjugirt sein, also parallel der Tangente laufen, welche sich im Schnittpunkt der Centrale und der Curve ziehen lässt. Da sich bei der Abbildung an dem Verhältniss der Abschnitte derselben Geraden nichts ändert, so wird bei der Ellipse wie beim Kreise die Centrale durch die Peripherie und den Schnittpunkt mit der Verbindungslinie der Berührungspunkte harmonisch geteilt. Ferner müssen die Berührungspunkte, das Centrum und der Punkt, von dem aus die Tangenten gezogen sind, auf einer Ellipse liegen, welche der gegebenen ähnlich ist und die gleiche Richtung der Axen besitzt. Das von den beiden Tangenten und der Ellipse begrenzte Flächenstück hat denselben Inhalt für alle Punkte, welche auf einer concentrischen, der gegebenen ähnlichen Ellipse gleicher Axenrichtung liegen. Dasselbe wird von der Centrale halbirt.

Alle Sehnen, welche eine innere concentrische und ähnliche Ellipse berühren, werden durch den Berührungspunkt halbirt, und die abgeschnittenen Segmente sind sämtlich gleich gross.

Die Mittelpunkte aller von einem gegebenen Punkte der Peripherie aus gezogenen Sehnen liegen auf einer ähnlichen Ellipse, welche durch den Mittelpunkt geht und die gegebene Ellipse in dem Punkte berührt. Die zu den verschiedenen Punkten der Peripherie gehörigen Ellipsen sind congruent, ihre Halbaxen sind gleich der Hälfte der Halbaxen der gegebenen Ellipse. Alle diese Eigenschaften lassen sich unmittelbar aus den entsprechenden des Kreises ablesen.

Für alle durch denselben Punkt gezogenen Secanten des Kreises ist das Product der bis zur Peripherie gemessenen Abschnitte constant. Bei der Ellipse kann dieser Satz nur gelten für solche Secanten, welche mit der Axe gleiche Winkel bilden. Ebenso ist das Quadrat der Tangente nur dann gleich dem Product aus den Abschnitten der Secante, wenn beide gleiche Neigung zur Axe haben.

Auch der Satz von der Gleichheit der Peripheriewinkel über demselben Bogen lässt auf weitere Eigenschaften der Ellipse schliessen. In dem speciellen Falle, dass der Bogen gleich dem Halbkreis ist, muss der Peripheriewinkel ein Rechter sein, woraus für die Ellipse der Satz folgt:

Verbindet man irgend einen Punkt des Umfangs mit den Endpunkten eines Durchmessers, so sind die Verbindungslinien conjugirt. Im Falle eines beliebigen Bogens muss man dem Satze erst eine andere Fassung geben, um die correspondirende Eigenschaft der Ellipse zu erkennen.

Man ziehe die zu den Schenkeln des jedesmaligen Peripheriewinkels parallelen Tangenten und bestimme den Schnittpunkt derselben. Für alle Peripheriewinkel über demselben Bogen liegen dann diese Schnittpunkte auf einem zum gegebenen concentrischen Kreise. In dieser Form kann der Satz sogleich auf die Ellipse übertragen werden und besagt dann, dass die Schnittpunkte der zu den Schenkeln des Peripheriewinkels parallelen Tangenten für alle Peripheriewinkel über demselben Bogen auf einer concentrischen und ähnlichen Ellipse liegen. Ueberhaupt spricht die Gleichheit zweier Winkel beim Kreise für die Ellipse die Tatsache aus, dass die Schnittpunkte der zu den Schenkeln jedes Winkels parallelen Tangenten auf einer concentrischen und ähnlichen Ellipse liegen.

Ein- und umbeschriebene Parallelogramme.

Alle dem Kreise einbeschriebenen Parallelogramme sind Rechtecke. Daher müssen die Seiten jedes der Ellipse einbeschriebenen Parallelogramms conjugirt sein. Sind die Diagonalen auch conjugirt, so enspricht demselben beim Kreise das einbeschriebene Quadrat, dessen Inhalt constant gleich 2 ist. Der Inhalt eines jeden einbeschriebenen Parallelogramms mit conjugirten Durchmessern als Diagonalen muss daher constant gleich $2ab$ sein. Der Inhalt des dem Kreise einbeschriebenen Quadrats ist aber grösser als der Inhalt eines jeden andern einbeschriebenen Parallelogramms. Es muss darum auch bei der Ellipse das einbeschriebene Parallelogramm mit conjugirten Durchmessern als Diagonalen ein Maximum sein. Mit derselben Leichtigkeit lässt sich erkennen, dass der Inhalt eines beliebigen einbeschriebenen Parallelogramms gleich dem Inhalt desjenigen einbeschriebenen Parallelogramms ist, dessen Diagonalen conjugirte Durchmesser zu den Diagonalen des gegebenen sind.

Soviel über die einbeschriebenen Parallelogramme.

Was die umbeschriebenen Parallelogramme angeht, so sind dieselben beim Kreise sämtlich Rhomben, ihre Diagonalen stehen senkrecht auf einander und laufen parallel den Seiten des Rechtecks der Berührungspunkte. Daher müssen die Diagonalen des der Ellipse umbeschriebenen Parallelogramms conjugirt sein und parallel laufen den Seiten des Parallelogramms der Berührungspunkte. Sind die Seiten selbst auch conjugirt, so erhalten wir das Parallelogramm, welches dem umbeschriebenen Quadrat des Kreises entspricht. Letzteres hat aber stets denselben Inhalt 4 und ist kleiner als jedes andere umbeschriebene Parallelogramm.

Deshalb haben alle der Ellipse umbeschriebenen Parallelogramme, deren Seiten conjugirt sind, den gleichen Inhalt $4ab$, und zwar ist derselbe kleiner als der jedes andern umbeschriebenen Parallelogramms.

Dieser Satz kann auch in der folgenden Weise abgeleitet werden.

Wir betrachten einen dem Kreise umbeschriebenen Rhombus und das einbeschriebene Rechteck der Berührungspunkte. Der Winkel, welchen die eine Diagonale des Rhombus mit der Seite bildet, sei ϑ. Dann ist der Inhalt des Rhombus gleich $\frac{2}{\sin\vartheta\cos\vartheta}$, der Inhalt des Rechtecks gleich $4\sin\vartheta\cos\vartheta$, das Product der beiden Inhalte constant gleich 8. Deswegen ist bei der Ellipse das Product aus dem Inhalt eines umbeschriebenen Parallelogramms und dem Inhalt des Parallelogramms der Berührungspunkte gleich $8a^2b^2$. Nun ist aber der Inhalt des einbeschriebenen Parallelogramms ein Maximum und zwar gleich $2ab$, wenn die Diagonalen desselben conjugirt sind. Dann sind aber auch die Seiten des umbeschriebenen conjugirt, und da das Product der Inhalte constant ist, muss in diesem Falle der Inhalt des umbeschriebenen Parallelogramms $4ab$ ein Minimum sein.

Es mag hier noch ein Satz für das beliebige einbeschriebene Viereck hinzugefügt werden, welcher für die spätere Entwicklung von Wichtigkeit ist. Es handelt sich um den Satz: Verlängert man die Gegenseiten eines Kreisvierecks bis zum Schnitt, so stehen die Halbirungslinien der entstandenen Winkel auf einander senkrecht. Für die Ellipse lautet der entsprechende Satz: Zieht man zu den Gegenseiten eines einbeschriebenen Vierecks die parallelen Tangenten, verlängert dieselben bis zum Schnitt und verbindet die Schnittpunkte mit dem Mittelpunkt, so sind diese Verbindungslinien conjugirt. Ist das eine Paar Gegenseiten parallel, so läuft auch die entsprechende Verbindungslinie derselben parallel und der conjugirte Durchmesser halbirt die parallelen Gegenseiten. Die zu den nicht

parallelen Seiten eines einbeschriebenen Trapezes parallel gezogenen Tangenten schneiden sich demnach in einem Punkte, welcher auf der Verlängerung der Verbindungslinie der Mitten der beiden Grundlinien liegt.

Ist auch das andere Paar von Gegenseiten parallel, so laufen beide Verbindungslinien den Seiten parallel, woraus in Uebereinstimmung mit dem Früheren folgt, dass die Seiten eines einbeschriebenen Parallelogramms conjugirt sein müssen.

Quadratur der Ellipse.

Aus der Formel für den Inhalt des Kreises folgt für die Ellipse

$$J = \pi \, . \, ab$$

Jeder Ellipsensector ist ferner gleich $\frac{ab}{2}\varphi$, worin φ den von den zugehörigen Bildstrahlen eingeschlossenen Winkel bedeutet (ausgedrückt durch den Bogen des Kreises vom Radius 1).

Der Inhalt des von den Radienvectoren und der Sehne begrenzten Dreiecks ist gleich $\frac{ab}{2}\sin\varphi$, das Segment also gleich $\frac{ab}{2}(\varphi - \sin\varphi)$.

Hierin muss nun noch φ und $\sin\varphi$ durch die Dimensionen der Ellipse und die Lage der Secante näher bestimmt werden. Ist die Gleichung der Secanten

$$lx + my + n = 0$$

so hat ihr Abbild die Gleichung

$$al\xi + bm\eta + n = 0$$

und der Winkel φ ist bestimmt durch die Entfernung dieser Geraden vom Kreismittelpunkt. Dieselbe ist bekanntlich

$$s = \frac{\pm n}{\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2}}$$

Dann wird

$$\frac{\varphi}{2} = \arccos s$$

und

$$\tfrac{1}{2}\sin\varphi = \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = s\sqrt{1-s^2}$$

Also wird das Segment gleich $ab \, . \, [\arccos s - s\sqrt{1-s^2}]$.

Dasselbe ist constant für alle Secanten, welche die mit der gegebenen concentrische und ähnliche Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=s^2$$

berühren.

§ 4.

Abbildung der Hyperbel und Aufgabe der relativen Maxima und Minima.

Bisher wurde nur von der Abbildung der Ellipse gesprochen. In derselben Weise lässt sich nun auch die Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

abbilden und liefert dabei die gleichseitige Hyperbel

$$\xi^2-\eta^2=1$$

Genau so wie wir mit Hülfe unseres Abbildungsprincips die Eigenschaften des Kreises auf die Ellipse übertrugen, können wir auch die Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel auf die beliebige Hyperbel übertragen. Der Unterschied liegt nur darin. dass der Kreis ein einfaches geometrisches Gebilde ist, dessen Fundamentaleigenschaften mit den elementarsten Hülfsmitteln erkannt werden können, während die gleichseitige Hyperbel ebenso gut wie die ungleichseitige zur Erforschung ihrer Eigenschaften der Anwendung analytischer Methoden bedarf. Immerhin bietet aber doch die Behandlung der gleichseitigen Hyperbel geringere Schwierigkeiten wie die der ungleichseitigen. Dazu kommt noch, dass viele Eigenschaften der Ellipse, welche ihrerseits direct vom Kreise übertragen wurden, sich wieder auf die Hyperbel übertragen lassen. Die Ellipse und ursprünglich der Kreis wird so der Ausgangspunkt für manche Lehrsätze in Bezug auf die Hyperbel, deren Richtigkeit dann nachträglich an der gleichseitigen Hyperbel analytisch festgestellt werden kann.

Handelt es sich aber um Aufgaben, welche auch beim Kreise auf analytischem Wege gelöst werden müssen, so ist für beide Arten von Curven der Grad der Schwierigkeit derselbe, und zwar können solche Aufgaben bis zu einem gewissen Punkte gemeinsam behandelt werden, indem man der Betrachtung die Gleichung

$$\xi^2+\varepsilon\eta^2=1$$

zu Grunde legt und erst wenn die allgemeine Lösung gefunden ist, die Unterscheidung der beiden Fälle

$$\varepsilon = +1 \quad \text{und} \quad \varepsilon = -1$$

vornimmt. Eine solche Methode bietet auch den Vorteil, dass sie das Gemeinsame beider Arten von Curven wie das Unterscheidende und den eigentlichen Grund dafür klar erkennen lässt.

Es soll im Folgenden eine besonders geeignete Aufgabe dieser Art in aller Vollständigkeit behandelt werden. Es handelt sich um die Untersuchung der Dreiecke, deren eine Ecke fest gegeben ist, während die beiden andern auf einer Curve zweiten Grades wandern. Man soll unter diesen Dreiecken dasjenige vom grössten Inhalt bestimmen. Der feste Punkt kann dabei jede beliebige Lage haben, darf also auch auf der Curve selbst angenommen werden.

Wir behandeln die Aufgabe in der Weise, dass wir dieselbe zunächst allgemein für die Curve

$$\xi^2 + \varepsilon \eta^2 = 1$$

lösen, dann für ε nach einander die Werte $+1$ und -1 substituiren und die gewonnenen Resultate mit Hülfe des Abbildungsprincips auf die beliebige Curve übertragen. Der Fall der Parabel erledigt sich dann von selbst, da diese als Grenze einer Ellipse angesehen werden kann, deren Mittelpunkt ins Unendliche gerückt ist.

Der feste Punkt sei

$$Q_1 = (\xi_1, \eta_1)$$

die beiden veränderlichen seien

$$Q_2 = (\xi_2, \eta_2) \quad \text{und} \quad Q_3 = (\xi_3, \eta_3)$$

und zwar sei die Bezeichnung so gewählt, dass wenn man sich in Q_1 aufstellt und in den von $Q_1 Q_2$ und $Q_1 Q_3$ gebildeten Winkel hineinsieht, die Seite $Q_1 Q_2$ rechts, die Seite $Q_1 Q_3$ links liegt, beide also dieselbe Lage zu einander haben wie die positive x- und $y$axe. Dann wird der Inhalt des Dreiecks $Q_1 Q_2 Q_3$ dargestellt durch

$$J = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Delta \qquad (1)$$

Da es bei der Untersuchung auf einen constanten Factor nicht ankommt, betrachten wir weiterhin nur die Determinante Δ. Die-

selbe soll ein Maximum werden, während gleichzeitig die Bedingungen erfüllt sind:

$$\xi_2^2+\varepsilon\eta_2^2=1 \quad \text{und} \quad \xi_3^2+\varepsilon\eta_3^2=1$$

Bezeichnen wir mit λ_2 und λ_3 zwei unbestimmte Multiplicatoren, so lauten die Bedingungen des Maximums:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_2}+\lambda_2\xi_2=0, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial\eta_2}+\varepsilon\lambda_2\eta_2=0, \quad \xi_2^2+\varepsilon\eta_2^2=1 \\ &\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_3}+\lambda_3\xi_3=0, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial\eta_3}+\varepsilon\lambda_3\eta_3=0, \quad \xi_3^2+\varepsilon\eta_3^2=1 \end{aligned} \tag{2}$$

Combiniren wir die Glieder sämtlicher Horizontalreihen der Determinante mit den adjungirten Elementen der beiden letzten Horizontalreihen, so erhalten wir nach den Sätzen aus der Theorie der Determinanten das folgende System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0&=(31)+\xi_1\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_2}+\eta_1\frac{\partial\Delta}{\partial\eta_2}, & 0&=(12)+\xi_1\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_3}+\eta_1\frac{\partial\Delta}{\partial\eta_3} \\ \Delta&=(31)+\xi_2\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_2}+\eta_2\frac{\partial\Delta}{\partial\eta_2}, & 0&=(12)+\xi_2\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_3}+\eta_2\frac{\partial\Delta}{\partial\eta_3} \\ 0&=(31)+\xi_3\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_2}+\eta_3\frac{\partial\Delta}{\partial\eta_2}, & \Delta&=(12)+\xi_3\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_3}+\eta_3\frac{\partial\Delta}{\partial\eta_3} \end{aligned} \tag{3}$$

sofern $\begin{vmatrix}\xi_3 & \eta_3\\ \xi_1 & \eta_1\end{vmatrix}$ mit (31) und $\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi_2 & \eta_2\end{vmatrix}$ mit (12) bezeichnet wird.

Setzen wir hierin die Ausdrücke für die Differentialquotienten, welche sich aus den Bedingungen des Maximums ergaben, ein, so kommt

$$\begin{aligned} \Delta&=(31)-\lambda_2, & 0&=(31)-\lambda_2(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2) \\ & & 0&=(31)-\lambda_2(\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3) \\ \Delta&=(12)-\lambda_3, & 0&=(12)-\lambda_3(\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1) \\ & & 0&=(12)-\lambda_3(\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3) \end{aligned} \tag{4}$$

Daraus folgt zunächst, dass die Klammerausdrücke constant sind. Wir setzen

$$\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2=\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3=\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1=-\frac{1}{\varrho} \tag{5}$$

Ferner kommt

$$(31)\lambda_3=(12)\lambda_2$$

Setzen wir hierin die sich aus (4) ergebenden Werte

$$\lambda_2 = (31) - \Delta \quad \text{und} \quad \lambda_3 = (12) - \Delta$$

ein, so erhalten wir nach Division mit Δ die Gleichung

$$(31) = (12) \tag{6}$$

und deshalb ist

$$\lambda_2 = \lambda_3 = -(12) - (23) = -(23) - (31) \text{ und } \frac{1}{\varrho} = \frac{(31)}{(23)+(31)} \tag{7}$$

Diese analytischen Resultate lassen folgende Schlüsse zu:

$Q_2 Q_3$ ist parallel der Polaren zu Q_1, $Q_1 Q_2$ parallel der Tangente in Q_3 und $Q_1 Q_3$ parallel der Tangente in Q_2, oder die Geraden $0Q_1$ und $Q_2 Q_3$, $0Q_2$ und $Q_1 Q_3$, $0Q_3$ und $Q_1 Q_2$ sind conjugirt. Verbinden wir Q_1 mit 0 und verlängern bis zum Schnitt mit $Q_2 Q_3$ in R_1, verbinden wir ferner Q_2 mit 0 und verlängern bis R_2, Q_3 mit 0 und verlängern bis R_3, suchen wir endlich den Schnittpunkt S der Polaren zu Q_1 mit $0Q_1$, so muss R_1 die Sehne $Q_2 Q_3$, R_2 die zu $Q_1 Q_3$ gehörige und R_3 die zu $Q_1 Q_2$ gehörige Sehne der Curve halbiren; ferner muss

$$0S : 0R_1 = 0Q_2 : 0R_2 = 0Q_3 : 0R_3 = \pm\varrho$$

sein, je nachdem $\varrho \gtrless 0$ ist, d. h. je nachdem der Mittelpunkt 0 auf den Strecken SR_1, $Q_2 R_2$, $Q_3 R_3$ oder auf der Verlängerung derselben liegt.

Die Gleichung (6) bedeutet geometrisch, dass die Teildreiecke $0Q_1 Q_2$ und $0Q_1 Q_3$ denselben Inhalt haben. Dies versteht sich nach dem Vorhergesagten von selbst, da beide Dreiecke dieselbe Grundlinie $0Q_1$ haben und gleich hoch sind.

Wir fahren nun in der analytischen Behandlung der Aufgabe fort und gehen über zur Berechnung von ϱ und Δ. Wie sich herausstellt, hangen diese nur von dem Werte des Ausdrucks $\xi_1^2 + \varepsilon\eta_1^2$ ab, den wir im Folgenden mit σ bezeichnen wollen. Ferner wollen wir für $\lambda_2 = \lambda_3$ die gemeinsame Bezeichnung λ gebrauchen.

Zunächst leiten wir eine Beziehung zwischen λ und ϱ ab:

Aus (7) findet sich

$$2\lambda = -\Delta - (23)$$

ferner ist nach (4)

$$-\frac{\lambda}{\varrho} = (12)$$

woraus

$$-\frac{2\lambda}{\varrho} = \Delta - (23)$$

Addition ergiebt

$$\lambda\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)=-(23) \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda}{\varrho}=-(23)\frac{1}{\varrho-1}$$

Dann finden wir direct aus der Determinante, indem wir die Glieder der zweiten und dritten Verticalreihe mit den adjungirten Elementen der ersten verbinden:

$$0=\xi_1(23)+(\xi_2+\xi_3)(12) \quad \text{und} \quad 0=\eta_1(23)+(\eta_2+\eta_3)(12)$$

oder

$$\xi_1(23)=\frac{\lambda}{\varrho}(\xi_2+\xi_3) \quad \text{und} \quad \eta_1(23)=\frac{\lambda}{\varrho}(\eta_2+\eta_3)$$

oder endlich

$$\xi_1=-\frac{1}{\varrho-1}(\xi_2+\xi_3) \quad \text{und} \quad \eta_1=-\frac{1}{\varrho-1}(\eta_2+\eta_3)$$

Diese Ausdrücke substituiren wir in den Ausdruck

$$\xi_1^2+\varepsilon\eta_1^2=\sigma$$

und erhalten

$$\varrho^2-\varrho=\frac{2}{\sigma} \tag{8}$$

welche Gleichung es ermöglicht, zu jedem σ das zugehörige ϱ zu finden.

Mit dem Werte von ϱ ist aber die Construction des maximalen Dreiecks gegeben. Man verbinde Q_1 mit 0 und zeichne die Polare zu Q_1, welche $0Q_1$ oder die Verlängerung in S schneidet. Ist nun ϱ positiv, so liegt R_1 auf der Verlängerung von $0S$ über 0 hinaus, im andern Falle auf $0S$ selbst oder auf der Verlängerung über S hinaus; ferner ist

$$0S:0R_1=\pm\varrho$$

Die Punkte Q_2 und Q_3 erhält man endlich, indem man durch R_1 zur Polare die Parallele zieht, welche die Curve in den gesuchten Punkten trifft.

Es war

$$2\lambda=-\Delta-(23)$$

ferner

$$\frac{\lambda}{\varrho}=-(23)\frac{1}{\varrho-1}$$

Setzen wir den Wert von λ, der sich aus der zweiten Gleichung ergiebt, in die erste ein, so wird

$$2(23)\frac{\varrho}{\varrho-1} = \Delta + (23) \quad \text{oder} \quad \Delta = (23)\frac{\varrho+1}{\varrho-1}$$

worin (23) noch unbestimmt ist. Dann ist aber

$$2(31) - 2(12) = \Delta - (23) = \frac{2\Delta}{\varrho+1}$$

also

$$(31) - (12) = \frac{\Delta}{\varrho+1}$$

Was die Berechnung von (23) angeht, so wird

$$\varepsilon(23)^2 = \begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_2 & \varepsilon\eta_2 \\ \xi_3 & \varepsilon\eta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_2^2 + \varepsilon\eta_2^2, & \xi_2\xi_3 + \varepsilon\eta_2\eta_3 \\ \xi_2\xi_3 + \varepsilon\eta_2\eta_3, & \xi_3^2 + \varepsilon\eta_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & -\frac{1}{\varrho} \\ -\frac{1}{\varrho}, & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{\varrho^2}$$

also

$$(23) = \frac{\sqrt{\varepsilon(\varrho^2-1)}}{\varrho} \tag{9}$$

Setzen wir diesen Wert ein, so kommt die Determinante

$$\Delta = \frac{\varrho+1}{\varrho-1}\frac{\sqrt{\varepsilon(\varrho^2-1)}}{\varrho} \tag{10}$$

welche zerfällt in die drei Unterdeterminanten

$$(23) = \frac{\sqrt{\varepsilon(\varrho^2-1)}}{\varrho}, \quad (31) - (12) = \frac{1}{\varrho-1}\frac{\sqrt{\varepsilon(\varrho^2-1)}}{\varrho}$$

Der Inhalt des maximalen Dreiecks wird

$$I = \tfrac{1}{2}\frac{\varrho+1}{\varrho-1}\frac{\sqrt{\varepsilon(\varrho^2-1)}}{\varrho} \tag{11}$$

Da der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv sein muss, so kann die Aufgabe für $\varepsilon = +1$ nur dann eine Lösung haben, wenn $\varrho^2 > 1$ ist, für $\varepsilon = -1$ dagegen nur, wenn $\varrho^2 < 1$ ist.

Damit ist die allgemeine Behandlung der Aufgabe beendet. Wir gehen nunmehr zu dem Falle der Ellipse $\varepsilon = +1$ über.

§ 5.

Weitere Behandlung im Falle der Ellipse.

Im Falle der Ellipse $\varepsilon = +1$ stellt

$$\sigma = \xi_1^2 + \eta_1^2$$

das Quadrat der Entfernung des Punktes Q_1 von 0 dar, welches wir mit s^2 bezeichnen wollen. Die Gleichung (8), an die wir unsere nächste Betrachtung anzuknüpfen haben, konnte auch direct aus der Figur abgeleitet werden. Ist nämlich ϱ positiv, so verhält sich

$$0Q_1Q_2 : Q_1Q_2Q_3 = 0R_3 : R_3Q_3 = 1 : \varrho + 1$$

woraus

$$0Q_1Q_2 = \frac{I}{\varrho+1} \quad \text{oder} \quad (12) = \frac{\Delta}{\varrho+1}$$

$$0Q_1Q_3 : Q_1Q_2Q_3 = 0R_2 : R_2Q_2 = 1 : \varrho + 1$$

woraus

$$0Q_1Q_3 = \frac{I}{\varrho+1} \quad \text{oder} \quad (31) = \frac{\Delta}{\varrho+1}$$

Dann wird

$$(23) = \Delta - \frac{2\Delta}{\varrho+1} = \Delta\frac{\varrho-1}{\varrho+1}$$

oder geometrisch

$$0Q_2Q_3 = Q_1Q_2Q_3\,\frac{\varrho-1}{\varrho+1}$$

Andrerseits aber haben wir

$$0Q_2Q_3 : Q_1Q_2Q_3 = 0R_1 : Q_1R_1 = 1 : s^2\varrho + 1$$

denn es ist

$$0Q_1 = s^2 \,.\, 0S \quad \text{und} \quad 0S : 0R_1 = \varrho$$

Folglich wird

$$0Q_2Q_3 = Q_1Q_2Q_3 \cdot \frac{1}{s^2\varrho + 1}$$

Vergleichen wir diesen Wert mit dem obigen, so folgt

$$\frac{\varrho-1}{\varrho+1} = \frac{1}{s^2\varrho+1} \quad \text{oder} \quad s^2 - \varrho = \frac{2}{s^2}$$

Aehnlich im Falle $\varrho < 0$.

Wir erhalten also in der Tat wieder dieselbe Gleichung zur Bestimmung von ϱ wie im vorigen Paragraphen. Dieselbe liefert die beiden Werte

$$\varrho = \frac{s \pm \sqrt{s^2+8}}{2s} \qquad (12)$$

welche die Lage des Punktes R_1 bestimmen. Es kommt nun darauf an, die verschiedenen Lagen des Punktes R_1 für die verschiedenen Werte von s zu verfolgen. Der Quotient $\pm\frac{1}{\varrho}$ giebt das Verhältniss von $0R_1$ zu $0S$ an, also das Verhältniss von $0R_1$ zu einer Strecke, die sich selbst mit s ändert. Wir wollen statt dessen das Verhältniss zu einer Strecke betrachten, die für die verschiedenen Werte von s gleich bleibt und wählen als solche den Kreisradius $0T = 1$ selbst. Da

$$0T = s \cdot 0S$$

ist, so wird

$$0R_1 = \pm\frac{1}{\varrho s}$$

Das obere Zeichen gilt, wenn ϱ positiv ist, das untere, wenn ϱ negativ ist. Im ersten Falle liegt R_1 auf der Verlängerung von $Q_1 0$ über 0 hinaus, im zweiten Falle auf $Q_1 0$ selbst oder auf der Verlängerung über Q_1 hinaus. Wenn wir der Strecke $0R_1$ selbst das positive oder negative Zeichen beilegen, je nachdem R_1 auf der einen oder andern Seite von 0 liegt, so können wir die letzte Gleichung auch einfacher schreiben:

$$0R_1 = \frac{1}{\varrho s} = \frac{2}{s \pm \sqrt{s^2+8}}$$

Es fragt sich zunächst, ob und in welchem Falle beiden Werten von $0R_1$ eine Lösung der Aufgabe entspricht. Der eine Wert ist stets positiv und bedeutet, dass R_1 auf der Verlängerung über 0 hinaus liegt; der andere negative bestimmt einen Punkt R_1 auf der Seite von Q_1 selbst. Beiden Werten entspricht aber eine Lösung der Aufgabe nur dann, wenn R_1 innerhalb des Kreises liegt, wenn also $\frac{2}{s \pm \sqrt{s^2+8}}$ dem absoluten Werte nach unter 1 liegt. Wie man sich überzeugt, ist der grösste Wert, den der Ausdruck für das obere Zeichen annehmen kann, der Wert $\frac{1}{\sqrt{2}}$, und zwar wird dieser erreicht für $s = 0$; für $s = 1$ wird der Ausdruck gleich $\frac{1}{2}$ und für $s = \infty$ gleich 0. Dem ersten Werte $\frac{2}{s+\sqrt{s^2+8}}$ entspricht also stets eine Lösung der Aufgabe. Der andere Ausdruck $\frac{2}{s-\sqrt{s^2+8}}$ wird für $s = 0$ gleich $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, für $s = 1$ gleich -1 und ist für jeden Wert von s, der über 1 liegt, absolut grösser als die Einheit. Dem zweiten Werte von $0R_1$ entspricht daher nur in dem Falle

eine Lösung, dass Q_1 innerhalb des Kreises liegt. Es existiren demnach 2 Dreiecke maximalen Inhalts, wenn Q_1 innerhalb des Kreises, die Aufgabe hat aber nur eine Lösung, wenn Q_1 ausserhalb liegt.

Dieses Resultat stimmt auch mit der am Schlusse des vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung überein, dass für $\varepsilon = +1$ die Aufgabe nur dann lösbar ist, wenn $\varrho^2 > 1$ ist; denn wie sich aus (12) ergiebt, ist für das obere Zeichen ϱ stets positiv und grösser als 1, was auch der Wert von s sein mag, für das untere Zeichen dagegen ist ϱ stets negativ und dem absoluten Werte nach nur dann grösser als 1, wenn $\sqrt{s^2+8} - s > 2s$ oder $\sqrt{s^2+8} > 3s$ oder $1 > s^2$ ist, d. h. wenn Q_1 innerhalb des Kreises liegt.

Bezeichnen wir mit $\frac{w}{2}$ den Winkel, welchen die Richtung von Q_1 nach 0 mit $0Q_2$ oder $0Q_3$ bildet, so wird

$$\cos\frac{w}{2} = \frac{2}{s \pm \sqrt{s^2+8}}$$

und die Teildreiecke werden

$$0Q_1Q_2 = 0Q_1Q_3 = \frac{s}{2}\sin\frac{w}{2}, \quad 0Q_2Q_3 = \pm\tfrac{1}{2}\sin w$$

während der Inhalt des maximalen Dreiecks

$$I = \pm s\sin\frac{w}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sin w = \pm\sin\frac{w}{2}\left(s + \cos\frac{w}{2}\right)$$

wird. Dabei gilt das obere Zeichen, wenn $w < 180^0$ ist, das untere, wenn $w > 180^0$ ist.

Gehen wir nun die verschiedenen Lagen von Q_1 der Reihe nach durch.

Liegt Q_1 ausserhalb des Kreises, so giebt es nur eine Lösung. Man construire sich entweder den Punkt R_1 nach der Gleichung

$$0R_1 = \frac{2}{s + \sqrt{s^2+8}}$$

und ziehe durch R_1 eine Senkrechte zu Q_1R_1, welche die Curve in Q_2 und Q_3 trifft, oder man berechne den Winkel $\frac{w}{2}$ aus der Gleichung

$$\cos\frac{w}{2} = \frac{2}{s + \sqrt{s^2+8}}$$

und trage denselben in 0 an die Verlängerung von $Q_1 0$ nach beiden Seiten ab. Q_2 und Q_3 sind dann die Schnittpunkte der Schenkel mit der Curve.

Rückt Q_1 in die Peripherie, so wird

$$0R_1 = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \cos\frac{w}{2} = \tfrac{1}{2}$$

also

$$\frac{w}{2} = 60^0 \quad \text{und} \quad I = \tfrac{1}{4}\sqrt{3}$$

Das Dreieck $Q_1Q_2Q_3$ ist dann gleichseitig. Das grösste Dreieck, dessen Ecken sämtlich auf der Peripherie liegen, ist demnach das gleichseitige.

Liegt Q_1 innerhalb, so existiren 2 Maxima. Für das grössere liegt der Punkt R_1 auf der Verlängerung von $Q_1 0$ über 0 hinaus, für das kleinere auf der Seite von Q_1 selbst. Rückt Q_1 an 0 heran, so nähern sich die beiden Maxima und erreichen denselben Wert, wenn Q_1 auf 0 fällt. In diesem Falle wird der eine Wert von $\frac{w}{2}$ gleich 45^0, der andere gleich 135^0, und die entsprechenden Werte von $0R_1$ sind $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Wir erhalten also 2 rechtwinklige Dreiecke, die gegenüber liegen und für welche 0 der Scheitel des rechten Winkels wird. Eigentlich kann nun aber, sofern 0 und Q_1 zusammenfallen, nicht mehr von der Richtung der Geraden $0Q_1$ gesprochen oder vielmehr es kann jede beliebige Richtung als solche angenommen werden. Damit stimmt das geometrische Resultat überein, dass es in diesem Falle unendlich viele Maxima giebt. Jedes von 2 senkrechten Radien des Kreises und der zugehörigen Sehne gebildete Dreieck entspricht den Bedingungen des Maximums.

Es ist klar, dass der Wert des Maximums gleich ist für alle Punkte Q_1, welche auf einem concentrischen Kreise liegen, und dass derselbe mit wachsender Entfernung zunimmt, wenn es sich um das in jedem Falle existirende, zum oberen Zeichen der Wurzel gehörige Maximum handelt, dagegen abnimmt, wenn es sich um das zweite, nur für innere Punkte vorhandene handelt.

Damit ist auch die Lösung der folgenden Aufgabe gegeben: Es sollen die Dreiecke untersucht werden, von welchen eine Ecke sich auf einer Geraden bewegt, während die beiden andern auf der Peripherie des Kreises wandern. Zu jedem Punkte der Geraden gehört ein maximales Dreieck, und dieses relative, auf den einzelnen Punkt

bezügliche Maximum erreicht seinen kleinsten Wert für den Punkt, in welchem das Lot von 0 aus die Gerade trifft.

Durchschneidet die Gerade den Kreis, so existirt ausserdem für jeden Punkt, welcher innerhalb des Kreises liegt, noch ein zweites Maximum, und dieses zweite relative Maximum hat seinen grössten Wert in dem Fusspunkte des Lotes.

Nunmehr wollen wir die gewonnenen Resultate auf die Ellipse übertragen. Der feste Punkt heisse P_1, die beiden andern P_2 und P_3. Wir gelangen dann zu folgenden Sätzen:

Beim maximalen Dreieck sind die Geraden P_2P_3 und $0P_1$, P_1P_2 und $0P_3$, P_1P_3 und $0P_2$ conjugirt. Die Dreiecke $0P_1P_2$ und $0P_1P_3$ haben denselben Inhalt. Legen wir durch P_1 eine concentrische und ähnliche Ellipse und bezeichnen wir das Verhältniss der Halbaxen dieser Ellipse zu denjenigen der gegebenen Ellipse mit s, so dass

$$s^2 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

wird, bezeichnen wir ferner den Punkt, in welchem P_10 oder die Verlängerung die Seite P_2P_3 trifft, mit V_1 und den Punkt, in welchem dieselbe die Ellipse trifft, mit W, so ist das Verhältniss

$$\frac{0V_1}{0W} = \frac{2}{s \pm \sqrt{s^2+8}}$$

und damit der Punkt V_1 bestimmt.

Liegt P_1 ausserhalb der Ellipse, so gilt nur das obere Zeichen, man erhält nur einen Punkt V_1 auf der Verlängerung von P_10. Zieht man durch denselben die zu $0P_1$ conjugirte Gerade, so trifft diese die Ellipse in den gesuchten Punkten P_2 und P_3. Der Inhalt ist gleich $ab\sin\frac{w}{2}\left(s+\cos\frac{w}{2}\right)$, sofern

$$\cos\frac{w}{2} = \frac{2}{s+\sqrt{s^2+8}}$$

gesetzt wird.

Liegt P_1 innerhalb, so giebt es 2 maximale Dreiecke; der dem oberen Zeichen entsprechende Punkt V_1 liegt wiederum auf der Verlängerung von P_10, der andere auf der Seite von P_1 selbst. Die beiden Inhalte sind $\pm ab\sin\frac{w}{2}\left(s+\cos\frac{w}{2}\right)$, worin

$$\cos\frac{w}{2} = \frac{2}{s \pm \sqrt{s^2+8}}$$

ist. Der erste Wert ist stets grösser als der zweite bis auf den singulären Fall, in welchem P_1 auf 0 fällt.

Liegt P_1 auf der Peripherie, so ist

$$\frac{0V_1}{0W} = \frac{1}{2}, \quad \frac{w}{2} = 60^0, \quad I = \frac{3}{4}ab\sqrt{3}$$

Rückt P_1 in 0, so ist

$$\frac{0V_1}{0W} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

die beiden Maxima haben denselben Wert $\frac{1}{2}ab$.

In Wirklichkeit aber giebt es in diesem Falle unendlich viele Lösungen.

Bewegt sich P_1 auf einer Geraden, so gehört zu jedem Punkte der Geraden ein maximales Dreieck; dieses relative Maximum erreicht seinen kleinsten Wert für denjenigen Punkt der Geraden, in welchem eine concentrische und ähnliche Ellipse dieselbe berührt oder im Fusspunkte der durch 0 zu derselben conjugirt gezogenen Geraden. Ist die Gleichung der Geraden

$$lx + my + n = 0$$

so ist der zugehörige Wert von s nach § 3 gleich $\frac{\pm n}{\sqrt{a^2l^2+b^2m^2}}$. Schneidet die Gerade die Ellipse, so existirt für jeden Punkt innerhalb der Ellipse noch ein zweites Maximum, und dieses erreicht seinen grössten Wert für denselben Punkt der Geraden.

§ 6.

Weitere Discussion im Falle der Hyperbel.

Wir gehen jetzt zu dem Falle der Hyperbel $\varepsilon = -1$ über. In diesem Falle kann der Ausdruck für σ, der für $\varepsilon = +1$ stets positiv war und das Quadrat der Entfernung des Punktes Q_1 vom Mittelpunkte darstellte, jeden beliebigen positiven und negativen Wert annehmen. Es ist $\sigma > 1$ für alle Punkte Q_1, welche in den von der Curve begrenzten Raumstücken liegen, durch welche die y axe nicht hindurchgeht, $\sigma = 1$ für Punkte auf der Hyperbel selbst, $1 > \sigma > 0$ für Punkte zwischen der Hyperbel und den Asymptoten,

so nähern sich auch die beiden Werte von ϱ, die beiden Punkte R_1 rücken auf einander zu und fallen schliesslich zusammen.

Entfernt sich Q_1 auf einer durch 0 gehenden Geraden immer weiter von 0, so wird σ numerisch beständig grösser, der eine Wert von ϱ nähert sich der Einheit, der andere der Null. Da unter derselben Voraussetzung $0S$ abnimmt, so muss der eine Punkt R_1 sich dem Punkte 0 nähern. Doch kann nicht ohne Weiteres behauptet werden, dass der andere Punkt sich immer von 0 entfernt.

Um hierüber ins Klare zu kommen, ist es nötig den Wert von $0R_1$ durch den Winkel, den die Gerade $0R_1$ mit einer der Axen bildet, und durch ξ_1 oder η_1 selbst auszudrücken, und für wachsendes ξ_1 oder η_1 zu verfolgen. Die Untersuchung ergiebt, dass in der Tat der zweite Punkt R_1 sich beständig von 0 entfernt.

Zu bemerken ist noch, dass bei dieser Bewegung des Punktes Q_1 sowol der Wert des Maximums wie der des Minimums zunimmt.

Fassen wir die gewonnenen Resultats zusammen, so lautet die Lösung im Falle der Hyperbel: Für jeden Punkt Q_1, welcher innerhalb des von der Hyperbel

$$\xi^2 - \eta^2 = 1$$

begrenzten Raumes liegt, in welchem $\xi_1^2 - \eta_1^2 > 1$ ist, existirt ein Maximum, für jeden Punkt Q_1, welcher innerhalb des von der Hyperbel

$$\eta^2 - \xi^2 = 8$$

begrenzten Raumes liegt, in welchem $\eta_1^2 - \xi_1^2 > 8$ ist, existirt sowol ein Maximum als auch ein Minimum, dagegen hat die Aufgabe keine Lösung für alle übrigen Punkte des Raumes.

Es ist selbstverständlich, dass der Wert des Maximums oder Minimums derselbe bleibt für alle Punkte, für welche σ constant ist d. h. für alle Punkte, welche auf einer mit

$$\xi^2 - \eta^2 = 1 \quad \text{oder mit} \quad \eta^2 - \xi^2 = 8$$

ähnlichen und concentrischen Hyperbel liegen.

Auch hier wollen wir die weitere Aufgabe anknüpfen, die Dreiecke zu untersuchen, von welchen eine Ecke auf einer beliebigen Geraden sich bewegt, während die beiden andern auf der gleichseitigen Hyperbel

$$\xi^2 - \eta^2 = 1$$

wandern.

Durchschneidet die Gerade einen Zweig der gegebenen Hyperbel zweimal, so giebt es für jeden Punkt der Sehne ein Maximum, und dieses relative Maximum erreicht seinen grössten Wert in dem Punkte, in welchem eine concentrische und ähnliche Hyperbel die Sehne berührt d. h. in ihrem Mittelpunkte.

In diesem Falle trifft aber die Gerade jeden Zweig der Hyperbel

$$\eta^2 - \xi^2 = 8$$

nur einmal, und es gehört zu jedem Punkte der Geraden, für welchen $\eta_1^2 - \xi_1^2 > 8$ ist, ein Maximum und ein Minimum, deren Werte beide um so mehr zunehmen, je weiter Q_1 auf der Geraden fortrückt. Für die Schnittpunkte der Geraden mit der Hyperbel dagegen fallen beide zusammen.

Durchschneidet die Gerade einen Zweig der Hyperbel

$$\eta^2 - \xi^2 = 8$$

zweimal, so existirt für jeden Punkt der Sehne ein Maximum und ein Minimum, und es erreichen beide den grössten Wert in dem Punkte, in welchem eine ähnliche und concentrische Hyperbel die Sehne berührt d. h. in ihrem Mittelpunkte. Die Gerade durchschneidet dann jeden Zweig der gegebenen Hyperbel nur einmal, und es existirt für jeden Punkt $\xi_1^2 - \eta_1^2 > 1$ ein Maximum, dessen Wert beständig zunimmt, wenn Q_1 auf der Geraden weiter rückt.

Sollte die Gerade eine der beiden Hyperbeln überhaupt nicht treffen, so gilt nur das in Bezug auf die andere Gesagte.

Damit ist die Aufgabe für den Fall der gleichseitigen Hyperbel

$$\zeta^2 - \eta^2 = 1$$

gelöst, und wir müssten nun dazu übergehen, die gewonnenen Resultate der Reihe nach mit Hülfe unseres Abbildungsprincips auf die beliebige Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

zu übertragen. Wir wollen uns aber diesmal, um lästige Wiederholungen zu vermeiden, ganz kurz fassen und uns auf die Bemerkung beschränken, dass sämtliche Sätze auch als für die beliebige Hyperbel geltend ausgesprochen werden können, sofern nur überall für σ der Wert $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}$ substituirt wird.

§ 7.

Behandlung der Parabel.

Wir kommen jetzt zum letzten Falle der Parabel. Wie schon gesagt, kann jede Parabel angesehen werden als Grenze einer Schar von Ellipsen oder Hyperbeln, deren einer Scheitelpunkt festgehalten wird, während die Dimensionen derselben sich so ändern, dass der andere Scheitelpunkt und mit ihm der Mittelpunkt ins Unendliche rückt. Beide Halbaxen nehmen dabei zu, doch muss das Wachstum durch die Bestimmung geregelt sein, dass sich der Quotient $\frac{b^2}{a}$ einer festen Grenze nähert. Die Lösung unserer Aufgabe muss sich demnach für den Fall der Parabel aus den bisherigen Ergebnissen ableiten lassen. Wir wollen dabei von der Ellipse ausgehen.

Es ist klar, dass das für jeden äusseren Punkt der Ellipse vorhandene einzige Maximum mit den Dimensionen der Ellipse selbst grösser wird und schliesslich über jedes Mass hinauswächst. Bei inneren Punkten gilt dasselbe von demjenigen maximalen Dreieck, welches sich auf das obere Wurzelzeichen bezieht. Anders aber liegt die Sache bei dem zweiten, dem negativen Vorzeichen entsprechenden Maximum; dasselbe wird sich einer ganz bestimmten Grenze nähern, und für diese müssen dieselben Sätze gelten wie für die Ellipse.

Bei der Parabel

$$y^2 = 2px$$

existirt demnach nur dann ein Maximum, wenn P_1 innerhalb des von der Curve begrenzten Raumes liegt, durch den die x axe hindurchgeht. Ferner muss beim maximalen Dreieck P_2P_3 parallel der Polaren zu P_1 oder parallel der Tangente in dem Punkte W sein, in welchem P_1O d. h. die durch P_1 zur x axe parallele Gerade die Curve trifft. P_1P_2 ist parallel der Tangente in P_3, P_1P_3 parallel der Tangente in P_2.

Da der Wert

$$s^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

sich bei dem angegebenen Wachstum von a und b der Einheit nähert, so wird ϱ sich den beiden Werten 2 und -1 nähern, von denen hier nur der zweite in Betracht kommt. Bezeichnen wir den Punkt, in welchem die Verlängerung von OP_1 die Seite P_2P_3 trifft, mit V_1, so ist

$$\frac{0V_1}{0W} = \frac{-1}{\varrho s}$$

und dieser Quotient nähert sich dem Werte $+1$. Daraus ist aber nicht zu entnehmen, dass die Punkte V_1 und W an der Grenze zusammenfielen; da nämlich beide Strecken immer grösser werden, so wird sich ihr Quotient auch dann der Einheit nähern, wenn dieselben verschieden sind, sofern nur ihre Differenz unter einer bestimmten endlichen Grösse gelegen bleibt.

Um darüber Aufschluss zu erhalten, welcher Grenzlage sich der Punkt V_1 nähert, müssen wir das Verhältniss von solchen Strecken betrachten, die mit wachsenden Dimensionen der Ellipse nicht selbst ins Ungemessene wachsen.

Wird der Schnittpunkt der Polaren mit $0P_1$ wieder mit S bezeichnet, so gelten die folgenden Proportionen:

$$0W : 0S = s : 1$$
$$0W : 0V_1 = -\varrho s : 1$$

woraus

$$SW : 0W = 1 - s : s$$
$$V_1W : 0W = \varrho s + 1 : \varrho s$$

also

$$\frac{SW}{V_1W} = \frac{(1-s)\varrho}{\varrho s + 1}$$

$$0P_1 : 0W = s : 1$$
$$0W : 0V_1 = -\varrho s : 1$$

woraus

$$P_1W : 0W = 1 - s : 1$$
$$V_1W : 0W = \varrho s + 1 : \varrho s$$

also

$$\frac{P_1W}{V_1W} = \frac{(1-s)\varrho s}{\varrho s + 1}$$

Daraus folgt zunächst, dass

$$P_1W : SW = s$$

ist. Im Falle der Parabel muss demnach

$$P_1W = SW$$

sein d. h. die Strecke vom Punkte P_1 bis zum Schnittpunkt der Polaren durch die Curve halbirt werden. Ferner wird das Verhältniss $P_1W : V_1W$ bis auf den Factor ϱs, der sich dem Werte -1 nähert, dargestellt durch den Quotienten

$$\frac{1-s}{\varrho s+1} = \frac{2(1-s)}{s+2-\sqrt{s^2+8}}$$

dessen Grenzwert für ein bis zur Einheit anwachsendes s aufgesucht werden muss. Durch Erweiteren mit $s+2+\sqrt{s^2+8}$ und Heben mit $1-s$ geht derselbe über in den Ausdruck $-\frac{1}{2}[s+2+\sqrt{s^2+8}]$, der für $s=1$ den Grenzwert -3 erreicht. Der Quotient $\frac{P_1W}{V_1W}$ nähert sich daher dem Werte 3, d. h. für die Parabel ist

$$V_1W = \tfrac{1}{3}P_1W$$

Es ergiebt sich demnach für die Parabel die folgende Construction: Man ziehe zurch P_1 eine Parallele zur x axe, welche die Curve in W trifft, teile P_1W in 3 gleiche Teile und construiren durch den ersten Teilpunkt von W aus gerechnet eine Parallele zur Tangente im Punkte W, welche die Parabel in den gesuchten Ecken P_2 und P_3 des maximalen Dreiecks trifft.

Der Inhalt lässt sich am bequemsten direct aus der Figur ableiten. Es wird

$$W = \left(\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right), \quad V_1 = \left(\frac{y_1^2+px_1}{3p}, y_1\right)$$

Die Gleichung einer zur Tangente in W parallelen Geraden lautet:

$$yy_1 - px = k$$

Soll dieselbe durch V_1 gehen, so muss

$$k = \frac{2y_1^2 - px_1}{3} = -\tfrac{2}{3}w + px_1$$

sein, sofern der stets negative Ausdruck

$$y_1^2 - 2px_1 = -w$$

gesetzt wird. Für die Parallele P_2P_3 kommt daher die Gleichung

$$yy_1 - px = -\tfrac{2}{3}w + px_1$$

aus welcher sich

$$2px = 2yy_1 + \tfrac{4}{3}w - 2px_1$$

ergiebt. Setzen wir diesen Wert in die Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2px$$

ein, so erhalten wir für die Ordinate der beiden Schnittpunkte P_2 und P_3 die Bedingung:

$$y^2 - 2yy_1 = \tfrac{1}{3}w - 2px_1$$

welche durch die beiden Werte

$$y = y_1 \pm \sqrt{y_1^2 + \tfrac{1}{3}w - 2px_1} = y_1 \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{3w}$$

befriedigt wird. Darum muss der Abstand der Punkte P_2 und P_3 von P_1V_1 gleich der Wurzelgrösse $\frac{1}{3}\sqrt{3w}$ sein. Da ferner die Entfernung P_1V_1 gleich

$$x_1 - \frac{y_1^2 + px_1}{3p} = \frac{w}{3p}$$

ist, so wird der Inhalt jedes der beiden Dreiecke $P_1P_2V_1$ und $P_1P_3V_1$ gleich $\frac{w}{18p}\sqrt{3w}$ und der Inhalt des maximalen Dreiecks $P_1P_2P_3$

$$J = \frac{w}{9p}\sqrt{3w}$$

Derselbe ist ausser von p nur noch von der Grösse w abhängig und bleibt deswegen gleich für alle Punkte P_1, welche auf der congruenten Parabel

$$y^2 = 2px - w = 2p\left(x - \frac{w}{2p}\right)$$

liegen, die gegen die gegebene um die Strecke

$$P_1W = \frac{w}{2p}$$

nach der Richtung der positiven $x$axe verschoben erscheint. Bewegt sich P_1 auf einer Geraden, welche die Parabel in 2 Punkten durchschneidet, so existirt für jeden Punkt der Sehne ein maximales Dreieck, und dieses relative Maximum erreicht seinen grössten Wert in dem Punkte, in welchem eine der gegebenen congruente Parabel mit gleicher Hauptaxe die Sehne berührt, d. h. im Mittelpunkte derselben.

II.

§ 8.

Uebertragung der Sätze von den merkwürdigen Punkten des Dreiecks.

Wie in § 4. bereits angedeutet wurde, bietet die Anwendung unseres Princips hauptsächlich zwei Vorteile. Erstens ist es mit Hülfe desselben möglich, alle Aufgaben, welche die Curven zweiten Grades betreffen, auf die Untersuchung der einen Gleichung

$$\xi^3 + \varepsilon\eta^2 = 1$$

zurückzuführen. Zweitens gestattet dasselbe es, sämtliche Eigenschaften des Kreises sofort auf die Ellipse zu übertragen, wodurch man zu einer Reihe von Sätzen gelangt, die ihrerseits wieder der Verallgemeinerung auf beliebige Kegelschnitte fähig sind.

Nachdem in § 3. die Fundamentaleigenschaften des Kreises auf die Ellipse übertragen worden, sind wir, ohne uns auf eine Verallgemeinerung der Resultate einzulassen, in den letzten Paragraphen sogleich dazu übergegangen, ein Beispiel der ersten Art ausführlich zu behandeln. Auch jetzt wollen wir von der Uebertragung der für die Ellipse gewonnenen Eigenschaften auf beliebige Curven absehen, da dieselbe nur bekannte Resultate ergiebt; nur soviel mag gesagt sein, dass fast sämtliche in § 4. angeführten Sätze eine Ausdehnung auf beliebige Kegelschnitte zulassen. Wir wollen statt dessen zu einer Reihe von Sätzen in Bezug auf die Ellipse übergehen, welche sich unmittelbar aus den Eigenschaften der merkwürdigen Punkte des Dreiecks ergeben, und welche dann als Ausgangspunkt für weitere, sämtliche Curven zweiten Grades betreffende Sätze dienen sollen.

Wir legen der Betrachtung eine Ellipse und ein derselben einbeschriebenes Dreieck zu Grunde. Die Abbildung liefert wieder ein Dreieck und den umbeschriebenen Kreis desselben.

Den Mitteltransversalen des einen Dreiecks entsprechen wieder die Mitteltransversalen des andern, nicht aber entsprechen den Höhen des einen die Höhen des andern; vielmehr entsprechen den Höhen des Abbilds bei der Ellipse die durch die Ecken zu den gegenüberliegenden Seiten conjugirt gezogenen Geraden. Die Höhen des Dreiecks schneiden sich aber in einem Punkte. Daher der Satz: Die durch die Ecken eines der Ellipse einbeschriebenen Dreiecks zu den Gegenseiten conjugirt gezogenen Geraden schneiden sich in einem Punkte.

Ferner muss der obere Abschnitt der conjugirten Ecktransversalen doppelt so gross sein als die Verbindungslinie des Mittelpunktes der umbeschriebenen Ellipse mit der Mitte der Gegenseite.

Der Schnittpunkt der conjugirten Ecktransversalen, der Schwerpunkt und der Mittelpunkt der umbeschriebenen Ellipse müssen desgleichen auf einer geraden Linie liegen, und es teilt der Schwerpunkt den Abstand der beiden andern Punkte im Verhältniss von 2 : 1.

Ferner liegen die drei Fusspunkte der conjugirten Ecktransversalen, die drei Mitten der Seiten und die drei Mitten der oberen

Abschnitte der Ecktransversalen auf einer der umbeschriebenen ähnlichen Ellipse gleicher Axenrichtung. Der Mittelpunkt dieser Ellipse halbirt die Verbindungslinie des Mittelpunktes der umbeschriebenen Ellipse und des Schnittpunktes der conjugirten Ecktransversalen. Die Halbaxen derselben sind gleich der Hälfte der Halbaxen der umbeschriebenen Ellipse.

Nun lassen sich aber unendlich viele Ellipsen zeichnen, welche durch die Ecken eines gegebenen Dreiecks gehen; es giebt unendlich viele Punkte, welche als Mittelpunkt einer solchen Ellipse angenommen werden können. Doch kann nicht jeder beliebige Punkt als solcher angenommen werden, wol aber lässt sich, wie später begründet werden wird, um jeden beliebigen Punkt als Mittelpunkt eine und nur eine Mittelpunktscurve zweiten Grades (Ellipse oder Hyperbel) beschreiben, welche durch die gegebenen 3 Punkte hindurchgeht.

Dass der erste Teil der obigen Lehrsätze auch für die Hyperbel gelten muss, kann man schon daraus ersehen, dass dieselben ganz unabhängig davon sind, ob der betreffende Punkt Mittelpunkt einer Ellipse ist oder nicht. Es lässt sich mit Hülfe des Proportionallehrsatzes und der Sätze von den Schwerpunktstransversalen sofort die Richtigkeit der folgenden Sätze erweisen:

Verbindet man einen beliebigen Punkt mit den Mitten der Seiten eines Dreiecks und zieht durch die Ecken Parallelen, so schneiden sich diese in einem Punkte, welcher mit dem ersten Punkte und dem Schwerpunkte des Dreiecks auf einer Geraden liegt, und es teilt der Schwerpunkt die Entfernung der beiden andern im Verhältniss von 2: 1. Ferner ist der obere Abschnitt jeder Parallelen doppelt so gross als die Verbindungslinie des Punktes mit der Mitte der Seite, welche der betreffenden Ecke gegenüber liegt.

Hiernach lässt sich vermuten, dass auch die weiteren Sätze allgemeine Gültigkeit besitzen und die beschriebenen 9 Punkte stets auf einer Mittelpunktscurve zweiten Grades liegen, welche derjenigen ähnlich ist, welche sich um den gegebenen Punkt als Mittelpunkt durch die Ecken des Dreiecks zeichnen lässt, dass ferner die Halbaxen der einen gleich der Hälfte der Halbaxen der anderen sind, und der Mittelpunkt der Curve die Verbindungslinie des gegebenen Punktes mit dem Schnittpunkte der conjugirten Ecktransversalen halbirt. Der Beweis wird an einer späteren Stelle erbracht werden.

Als weitere merkwürdige Punkte des Dreiecks werden der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises und der Schnittpunkt der Ecktransversalen nach den Berührungspunkten der anbeschriebenen Kreise genannt.

Dem einbeschriebenen Kreise entspricht hier die einbeschriebene ähnliche Ellipse, deren Mittelpunkt in der folgenden Weise gefunden wird. Man verlängere die Verbindungslinie des Mittelpunktes der umbeschriebenen Ellipse mit den Mitten der Seiten bis zum Schnitt mit der Ellipse und ziehe durch die Schnittpunkte Parallelen zu den Seiten des Dreiecks. Dieselben schliessen ein ähnliches Dreieck ein, welchem die gegebene Ellipse einbeschrieben ist. Verbindet man die Ecken dieses Dreiecks mit dem Mittelpunkt der Ellipse und zieht durch die Ecken des gegebenen Dreiecks Parallelen dazu, so treffen sich diese in einem Punkte, und dieser Punkt ist der Mittelpunkt der dem gegebenen Dreieck einbeschriebenen ähnlichen Ellipse. Zieht man durch diesen Punkt Parallelen zu den erst genannten Verbindungslinien, so schneiden diese die Seiten des Dreiecks in den gesuchten Berührungspunkten.

Will man den Mittelpunkt der einer Seite anbeschriebenen ähnlichen Ellipse construiren, so verfahre man wie vorhin, nur verlängere man die Verbindungslinie mit der Mitte der betreffenden Seite über den Mittelpunkt der Curve hinaus bis zum Schnitt mit der Ellipse und ziehe die Parallelen, welche dieses Mal ein ähnliches Dreieck einschliessen, welchem die gegebene Ellipse anbeschrieben ist. Die weitere Construction verläuft wie oben.

Uebertragen wir jetzt die Sätze vom Kreise auf die Ellipse, so erhalten wir die folgenden Resultate:

Die Ecktransversale zum Berührungspunkte der der Gegenseite anbeschriebenen ähnlichen Ellipse ist parallel der Verbindungslinie der Mitte dieser Seite mit dem Mittelpunkte der einbeschriebenen Ellipse.

Die Ecktransversalen zu den Berührungspunkten der drei anbeschriebenen Ellipsen schneiden sich in einem Punkte, und es ist der obere Abschnitt jeder Transversale doppelt so gross als die Verbindungslinie des Mittelpunktes der einbeschriebenen Ellipse mit der Mitte der berührten Seite.

Ferner liegen der Schnittpunkt der Ecktransversalen nach den Berührungspunkten der anbeschriebenen ähnlichen Ellipsen, der Schwerpunkt und der Mittelpunkt der einbeschriebenen Ellipse auf einer Geraden, und es teilt der Schwerpunkt den Abstand der beiden andern Punkte im Verhältniss von 2 : 1.

Diese letzten Sätze verstehen sich eigentlich nach dem Früheren von selbst, sofern als bewiesen angenommen wird, dass die Ecktransversalen nach den Berührungspunkten parallel laufen den

Verbindungslinien der Mitten der Seiten mit dem Mittelpunkt der einbeschriebenen Ellipse. Denn zeichnet man um denselben Mittelpunkt die umbeschriebene Curve des Dreiecks, so sind die genannten Transversalen für dieselbe weiter nichts als die durch die Ecken zu den Seiten des Dreiecks conjugirt gezogenen Geraden. Es müssen darum auch wieder die Mitten der oberen Abschnitte dieser Geraden, die Mitten der Seiten und die Berührungspunkte der anbeschriebenen Ellipsen auf einer Curve zweiten Grades liegen, welche derjenigen ähnlich ist, welche sich um den Mittelpunkt der einbeschriebenen Curve durch die Ecken des Dreiecks zeichnen lässt. Doch gilt dieser Satz vorläufig nur, sofern die umbeschriebene Curve selbst wieder eine Ellipse ist.

Weiter ergeben sich noch die folgenden Sätze: Jede Seite des Dreiecks wird durch die Berührungspunkte der ein- und anbeschriebenen Ellipse in drei Abschnitte geteilt, von denen die beiden äusseren gleich sind.

Die Verbindungslinien der Mittelpunkte der anbeschriebenen Ellipsen gehen durch die Ecken des Dreiecks.

Die Verbindungslinie des Mittelpunktes der einbeschriebenen mit dem Mittelpunkte der einer Seite anbeschriebenen Ellipse ist zur Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden andern anbeschriebenen Ellipsen conjugirt und trifft dieselbe in der Ecke des Dreiecks, welche der betreffenden Seite gegenüberliegt.

Wie wir später nachweisen werden, haben auch alle diese auf die ein- und anbeschriebenen Ellipsen bezüglichen Sätze allgemeine Gültigkeit. Nun kann aber im Falle der Hyperbel von einer einbeschriebenen Curve d. h. von einer Curve, welche die 3 Seiten des Dreiecks selbst berührt, überhaupt nicht mehr gesprochen werden, obwol es auch in diesem Falle 4 verschiedene ähnliche Curven giebt, welche die Seiten resp. die Verlängerung derselben berühren. Wir wollen darum von nun ab den Unterschied zwischen ein- und anbeschriebenen Curven als unwesentlich fallen lassen und nur noch von berührenden Curven im allgemeinen reden. Unter dieser Voraussetzung lassen sich die letzten Sätze kürzer dahin formuliren, dass die Verbindungslinie der Mittelpunkte von je zwei berührenden Ellipsen der Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden andern conjugirt ist und sich mit derselben in einer Ecke des Dreiecks schneidet.

Ferner drängt sich die Frage auf, ob die ersten Sätze, bei welchen immer nur vom Mittelpunkt der einbeschriebenen Ellipse

gesprochen wurde, nicht auch für die Mittelpunkte der andern berührenden Curven Gültigkeit haben, und der allgemeine Lehrsatz richtig sein wird: Verbindet man den Mittelpunkt irgend einer der 4 berührenden ähnlichen Curven eines Dreiecks mit den Mitten der Seiten und zieht hierzu Parallelen durch die Ecken, so trifft jede dieser Parallelen die gegenüber liegende Seite des Dreiecks oder die Verlängerung derselben in dem Berührungspunkte derjenigen andern berührenden Curve, deren Mittelpunkt auf der Verbindungslinie der betreffenden Ecke mit dem Mittelpunkt der ersten berührenden Curve liegt. Die Berührungspunkte dieser ersten Curve selbst aber haben von den Mitten der Seiten dieselbe Entfernung wie die genannten Schnittpunkte der Parallelen, doch liegen sie nach der entgegengesetzten Richtung hin.

Dass dieser Satz für den Kreis und also auch für die Ellipse Gültigkeit hat, würde sich mit elementaren Mitteln leicht constatiren lassen, doch sehen wir hier davon ab, da wir denselben später in voller Allgemeinheit beweisen werden.

§ 9.

Um einen beliebigen Punkt als Mittelpunkt einen Kegelschnitt zu construiren, der durch 3 feste Punkte geht.

Bevor wir die Sätze des vorigen Paragraphen in Bezug auf ihre Allgemeingültigkeit prüfen, müssen wir noch eine Untersuchung darüber anstellen, ob sich um jeden beliebigen Punkt O als Mittelpunkt ein Kegelschnitt beschreiben lässt, welcher durch die Ecken eines gegebenen Dreiecks geht.

Gegeben seien die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Der spitze Winkel, um welchen die Axen des gesuchten Kegelschnitts gegen die Axen des gegebenen Systems gedreht sind, sei ϑ; ferner sei der Anfangspunkt selbst der Mittelpunkt der Curve.

Heisst die Gleichung des gesuchten Kegelschnitts

$$\frac{x'^2}{A} + \frac{y'^2}{B} = 1$$

so muss

$$\frac{(x_1 \cos\vartheta + y_1 \sin\vartheta)^2}{A} + \frac{(-x_1 \sin\vartheta + y_1 \cos\vartheta)^2}{B} = 1$$

$$\frac{(x_2 \cos\vartheta + y_2 \sin\vartheta)^2}{A} + \frac{(-x_2 \sin\vartheta + y_2 \cos\vartheta)^2}{B} = 1$$

$$\frac{(x_3\cos\vartheta+y_3\sin\vartheta)^2}{A}+\frac{(-x_3\sin\vartheta+y_3\cos\vartheta)^2}{B}=1$$

sein, woraus ϑ, A und B bestimmt werden können. Nehmen wir aus den beiden letzten Gleichungen $\frac{1}{A}$ und $\frac{1}{B}$ und substituiren in die erste, so ergiebt sich nach geeigneter Zusammenfassung und Reduction

$$\operatorname{tg}(2\vartheta)=-\frac{x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2+x_2^2y_3^2-x_3^2y_2^2+x_3^2y_1^2-x_1^2y_3^2}{(x_1^2+y_1^2)(x_2y_2-x_3y_3)+(x_2^2+y_2^2)(x_3y_3-x_1y_1)+(x_3^2+y_3^2)(x_1y_1-x_2y_2)}$$

Damit ist der Winkel ϑ im allgemeinen eindeutig bestimmt. Die andern Gleichungen liefern dann die Werte von A und B. Die Aufgabe ist also zu lösen und zwar im allgemeinen nur auf eine Art.

Es giebt mehrere Fälle, in welchen die Axenrichtung von vorn herein bekannt ist. Dies ist z. B. der Fall, wenn 0 auf einer Mittelsenkrechten des Dreiecks liegt. In diesem Falle muss diese Senkrechte selbst die neue Axe sein. Analytisch gestaltet sich dann die Sache folgendermassen:

Ist z. B.

$$x_2^2+y_2^2=x_3^2+y_3^2$$

so wird

$$\operatorname{tg}(2\vartheta)=\frac{(x_3^2-x_2^2)(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2)}{(x_2y_2-x_3y_3)(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2)}$$

oder sofern nicht auch

$$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2 \quad \text{ist,}$$

$$\operatorname{tg}(2\vartheta)=\frac{x_3^2-x_2^2}{x_2y_2-x_3y_3}$$

woraus

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{y_2+y_3}{x_2+x_3}=-\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}$$

sich ergiebt, welche Ausdrücke in der Tat besagen, dass die Axe die Seite P_2P_3 des Dreiecks halbirt und zu ihr senkrecht steht.

Ist gleichzeitig auch

$$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$$

d. h. ist 0 der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks, so nimmt der Ausdruck für $\operatorname{tg}(2\vartheta)$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Die

umbeschriebene Curve ist in diesem Falle der Kreis, bei welchem allerdings jede beliebige Richtung als Axenrichtung angenommen werden kann.

Rückt 0 in den Mittelpunkt der Strecke P_2P_3, so wird

$$x_3 = -x_2, \quad y_3 = -y_2$$

und der Ausdruck für $\operatorname{tg}(2\vartheta)$ nimmt abermals die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Es kann also wieder jede beliebige Richtung als Axenrichtung angenommen werden, doch hat jetzt unsere Aufgabe zum Unterschied von dem vorigen Falle unendlich viele Lösungen, denn es wird jeder Kegelschnitt, welcher 0 als Mittelpunkt hat und durch P_1 und P_2 geht, von selbst auch durch P_3 gehen.

Zur Lösung weiterer singulären Fälle wollen wir das ursprüngliche Axensystem so annehmen, dass die y axe durch die Mitte der Seite P_2P_3 hindurchgeht. Dann ist

$$x_3 = -x_2$$

zu setzen, und es wird

$$\operatorname{tg}(2\vartheta) = \frac{(x_1^2 - x_2^2)(y_2 + y_3)(y_2 - y_3)}{-(y_2+y_3)[x_1y_1(y_2-y_3) + x_2(x_2^2 - x_1^2 - y_1^2 + y_2y_3)]}$$

Nehmen wir ferner an, dass nicht auch

$$y_3 = -y_2$$

ist, d. h. dass nicht 0 der Mittelpunkt von P_2P_3 ist, in welchem Falle die Aufgabe nach dem Vorhergehenden unendlich viele Lösungen zulässt, so kommt

$$\operatorname{tg}(2\vartheta) = \frac{(x_1^2 - x_2^2)(y_2 - y_3)}{-x_1y_1(y_2-y_3) - x_2(x_2^2 - x_1^2 - y_1^2 + y_2y_3)}$$

Diese Darstellung lässt zunächst erkennen, dass die oben angeführten Fälle die einzigen sind, in denen der Winkel ϑ nicht eindeutig bestimmt werden kann. Der Zähler verschwindet nämlich erstens, wenn

$$y_2 = y_3$$

ist, wenn also 0 auf dem Mittellote von P_2P_3 liegt. Der Nenner reducirt sich dann auf $x_2(x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2)$ und verschwindet, wenn

$$x_2 = 0$$

ist, d. h. wenn 0 der Mittelpunkt von P_2P_3 selbst ist, oder wenn

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

ist, d. h. wenn 0 der Schnittpunkt der 3 Mittellote des Dreiecks ist.

Zweitens verschwindet der Zähler, wenn

$$x_1^2 = x_2^2$$

wenn also P_1 auf einer durch P_2 oder P_3 zur y axe parallel gezogenen Geraden liegt oder wenn 0 auf einer der beiden Geraden liegt, welche durch die Mitten der Seiten P_2P_3 und P_2P_1 respective P_2P_3 und P_3P_1 gezogen werden können.

Nehmen wir an, um einen bestimmten Fall herauszugreifen, es sei

$$x_1 = x_2$$

so wird der Nenner $x_1(y_1 - y_2)(y_1 + y_3)$. Da nun in diesem Falle weder

$$x_1 = 0 \quad \text{noch} \quad y_1 = y_2$$

ist, so kann der Nenner nur dann verschwinden, wenn

$$y_1 = -y_3$$

ist, d. h. wenn 0 der Mittelpunkt von P_1P_3 ist. Aehnlich im Falle

$$x_1 = -x_2$$

Damit ist erwiesen, dass der Winkel ϑ stets eindeutig bestimmt ist, wenn nur der Punkt 0 nicht gerade der Schnittpunkt der 3 Mittellote oder die Mitte einer Dreiecksseite ist.

Gleichzeitig erfahren wir aber, wenn wir diese speciellen Fälle ausschliessen, dass für

$$x_1^2 = x_2^2 \quad \text{der Wert} \quad \operatorname{tg}(2\vartheta) = 0$$

ist, dass also die betreffende Halbirungslinie der Seiten die neue Axenrichtung selbst darstellt. In diesem Falle geht die Curve über in ein Paar paralleler Geraden, nämlich in die der neuen Axe parallele Seite des Dreiecks und die durch die gegenüberliegende Ecke dazu gezogene Parallele.

Wenn endlich P_1 auf P_20 oder P_30 oder auf der Verlängerung dieser Strecke, d. h. wenn der Mittelpunkt 0 auf einer Seite des Dreiecks oder der Verlängerung derselben liegt, so artet die Curve in 2 sich schneidende Geraden aus, nämlich in die betreffende Dreiecksseite selbst und die Verbindungslinie von 0 mit dem dritten Eckpunkt. Die neue Axe halbirt den Winkel dieser Geraden.

Wir schliessen hier eine andere Ableitung und Darstellung von von 2ϑ an, welche bei beliebiger Lage von 0 zur Construction dieses Winkels benutzt werden kann.

Wir verbinden zu dem Zwecke 0 mit den Mitten von P_1P_2 und P_2P_3, bezeichnen ferner die Winkel, welche diese Geraden mit der x axe bilden, mit α_3 und α_1 und die Winkel, welche die Seiten P_1P_2 und P_2P_3 selbst mit der x axe bilden, mit β_3 und β_1. Da jede der Verbindungslinien zur entsprechenden Dreiecksseite conjugirt ist, für 2 conjugirte Richtungen aber das Product der trigonometrischen Tangenten ihrer Neigungswinkel zur Axe des Kegelschnitts constant sein muss, so ergiebt sich für ϑ die Bedingung:

$$\operatorname{tg}(\alpha_3 - \vartheta) \cdot \operatorname{tg}(\beta_3 - \vartheta) = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \vartheta) \cdot \operatorname{tg}(\beta_1 - \vartheta)$$

woraus

$$\operatorname{tg}(2\vartheta) = \frac{2(\operatorname{tg}\alpha_3 \operatorname{tg}\beta_3 - \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\beta_1)}{(\operatorname{tg}\alpha_3 + \operatorname{tg}\beta_3)(1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\beta_1) - (\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\beta_1)(1 + \operatorname{tg}\alpha_3 \operatorname{tg}\beta_3)}$$

wird.

Legen wir jetzt die y axe wieder durch die Mitte von P_2P_3, so wird

$$\alpha_1 = 90^0$$

und der Ausdruck reducirt sich auf

$$\operatorname{tg}(2\vartheta) = \frac{2 \operatorname{tg}\beta_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_3 \operatorname{tg}\beta_3 - (\operatorname{tg}\alpha_3 + \operatorname{tg}\beta_3) \operatorname{tg}\beta_1}$$

welcher eine, wenn auch complicirte Construction des Winkels zulässt.

Doch wollen wir uns hier nicht weiter auf dieselbe einlassen, da wir in einem späteren Capitel, wenn erst die Beziehungen zwischen Kreis und beliebigem Kegelschnitt näher erörtert sind, eine Construction kennen lernen werden, welche dieselbe Aufgabe mit den einfachsten Hülfsmitteln löst.

Es erübrigt noch für die verschiedenen Lagen des Punktes 0 die Gestalt der Curve näher zu bestimmen.

Wir fanden, dass die Curve in ein Paar paralleler Geraden ausartet, sobald der Punkt 0 eine der 3 Geraden passirt, welche sich durch die Mitten von je 2 Seiten des Dreiecks zeichnen lassen. Diese die Seiten halbirenden Geraden sind es, an welchen bei stetigem Fortschreiten von 0 der Uebergang von einer Gattung von Curven zur andern sich vollzieht. War dieselbe vorher eine Ellipse, so nimmt mit der Annäherung an eine solche Gerade die eine Axe derselben beständig zu, um endlich über jedes Mass hinaus zu wachsen. Die Ellipse geht dabei in ein Paar paralleler Geraden über.

Entfernt sich, in derselben Richtung fortschreitend, der Punkt 0

wieder von der Geraden, so verwandeln sich die beiden Parallelen in die beiden nach entgegengesetzter Seite gekrümmten Zweige einer Hyperbel.

Eine ebenso wichtige Rolle wie diese die Seiten halbirenden Geraden spielen die Seiten des Dreiecks und die Verlängerungen derselben. Unsere Untersuchung hat ergeben, dass die Curve jedes Mal in ein Paar sich schneidende gerade Linien übergeht, wenn der Punkt O auf seinem Wege durch eine Seite des Dreiecks oder die Verlängerung derselben hindurchgeht. Zufolge der Stetigkeit muss aber sowol vor wie nach diesem Durchgang die Curve eine Hyperbel sein, deren Scheitel bei der Annäherung an die Gerade auf einander zurücken, bis sie zusammenfallen und sich dann wieder von einander entfernen. Doch entfernen sie sich nicht in der Richtung, welche derjenigen, in welcher die Annäherung geschah, entgegengesetzt ist, sondern in einer hierzu senkrechten. Damit im Zusammenhange steht, dass an diesen Stellen die beiden Axen der Hyperbel ihre Rollen wechseln, die reelle zur imaginären und die imaginäre zur reellen wird; dass ferner an diesen Stellen die Verteilung der 3 Ecken des Dreiecks auf die beiden Zweige der Hyperbel eine Aenderung erfährt.

Allen diesen Ueberlegungen lässt sich in Betreff der Art der Curven das Folgende entnehmen:

Wir erhalten eine Ellipse, wenn O sich innerhalb des Dreiecks befindet, welches von den die Seiten halbirenden Geraden umschlossen wird, ferner für alle Punkte innerhalb der Scheitelwinkel dieses Dreiecks. Die umbeschriebene Curve ist eine Hyperbel für alle andern Punkte des Raumes, und zwar liegen sämtliche Ecken des Dreiecks auf einem Zweig der Hyperbel, wenn der Mittelpunkt sich innerhalb eines der 3 Scheitelwinkel des gegebenen Dreiecks befindet, im andern Falle liegen 2 Ecken auf dem einen Zweige, die dritte auf dem andern.

§ 10.

Die ähnliche Curve der 9 Punkte für beliebige Lage des Punktes O.

Wir wollen jetzt die auf umbeschriebene Curven des Dreiecks bezüglichen Sätze, die wir für den Fall der Ellipse aus bekannten planimetrischen Sätzen abgeleitet haben, auf beliebige Kegelschnitte übertragen. Wie bereits ausgeführt worden, handelt es sich dabei hauptsächlich um den Nachweis, dass auch bei beliebiger Annahme des Punktes O die Mitten der Seiten, die Fusspunkte der conjugirten

Transversalen und die Mitten der oberen Abschnitte derselben auf einer ähnlichen Curve liegen, deren Axe gleich der Hälfte der Axen der umbeschriebenen Curve ist.

Die umbeschriebene Curve habe die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\varepsilon\frac{y^2}{b^2}=1$$

Wir bilden dann die ganze Ebene ab und erhalten als Abbild die Curve

$$\xi^2+\varepsilon\eta^2=1$$

und ein derselben einbeschriebenes Dreieck, dessen Eckpunkte die Coordinaten

$$Q_1=(\xi_1,\ \eta_1),\quad Q_2=(\xi_2,\ \eta_2),\quad Q_3=(\xi_3,\ \eta_3)$$

haben mögen. Wir bezeichnen ferner die Mitten der Seiten mit R_1, R_2, R_3, die Fusspunkte der Transversalen mit T_1, T_2, T_3, die Mitten der oberen Abschnitte mit U_1, U_2, U_3, den Schwerpunkt mit S, den Schnittpunkt der Transversalen mit V und den Mittelpunkt der Curve der 9 Punkte mit N.

Es ist dann

$$SV=2\,.\,0S$$

und da N die Strecke $0V$ halbiren soll, so muss

$$0S=2\,.\,SN$$

und

$$N=\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3}{2},\ \frac{\eta_1+\eta_2+\eta_3}{2}\right)$$

sein. Die um N als Mittelpunkt beschriebene ähnliche Curve hat daher die Gleichung

$$\left(\xi-\frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3}{2}\right)^2+\varepsilon\left(\eta-\frac{\eta_1+\eta_2+\eta_3}{2}\right)^2=\tfrac{1}{4}$$

und es ist nachzuweisen, dass diese Curve wirklich durch die angegebenen 9 Punkte hindurchgeht.

Was zunächst die Mitten der Seiten angeht, so ist

$$R_1=\left(\frac{\xi_2+\xi_3}{2},\ \frac{\eta_2+\eta_3}{2}\right)$$

Setzen wir in die Gleichung ein, so ergiebt sich

$$\xi_1^2+\varepsilon\eta_1^2=1$$

welche Gleichung aber erfüllt ist, da (ξ_1, η_1) auf der Curve

$$\xi^2 + \varepsilon\eta^2 = 1$$

liegen soll. Ganz ebenso wird die Sache für R_2 und R_3.

Da

$$V = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3,\ \eta_1 + \eta_2 + \eta_3)$$

ist, so werden ferner die Coordinaten von

$$U_1 = \left(\frac{\xi_2 + \xi_3}{2} + \xi_1,\ \frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + \eta_1\right)$$

deren Substitution wiederum auf die Gleichung

$$\xi_1^2 + \varepsilon\eta_1^2 = 1$$

führt.

Gleichzeitig erfahren wir, dass die relativen Coordinaten von R_1 und U_1 in Bezug auf N dem absoluten Werte nach gleich sind und sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, dass also die Punkte U_1 und V_1 Endpunkte eines Durchmessers sind, dass ihre Verbindungslinie durch N geht und von N halbirt wird. Ebenso muss N auf R_2U_2 und R_3U_3 liegen und diese Linien halbiren.

Dieses Resultat hätte übrigens auch ohne Rechnung direct aus der Figur abgeleitet werden können, wonach es sich dann von selbst verstanden hätte, dass der um N als Mittelpunkt durch R_1, R_2, R_3 gezeichnete Kegelschnitt auch durch U_1, U_2, U_3 gehen muss.

Wir kommen nun zu den Fusspunkten der Transversalen. Die Gleichung von Q_1T_1 lautet:

$$\eta = \eta_1 + (\xi - \xi_1)\frac{\eta_2 + \eta_3}{\xi_2 + \xi_3}$$

Dazu stellen wir die Gleichung der Geraden Q_2Q_3, welche lautet:

$$\eta = \eta_3 + (\xi - \xi_3)\frac{\eta_2 - \eta_3}{\xi_2 - \xi_3}$$

und bestimmen aus beiden ξ und η. Dann kommt:

$$\xi - \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{2} = \frac{1}{2(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)}\left[\eta_1(\xi_3^2 - \xi_2^2) + \xi_1(\xi_2\eta_2 - \xi_3\eta_3)\right]$$

und

$$\eta - \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}{2} = \frac{1}{2(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)}\left[\xi_1(\eta_3^2 - \eta_2^2) + \eta_1(\xi_2\eta_2 - \xi_3\eta_3)\right]$$

und die Bedingungsgleichung wird

$$[\eta_1(\xi_3^2 - \xi_2^2) + \xi_1(\xi_2\eta_2 - \xi_3\eta_3)]^2 + \varepsilon[\xi_1(\eta_3^2 - \eta_2^2) + \eta_1(\xi_2\eta_2 - \xi_3\eta_3)]^2 = (\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)^2$$

deren Bestätigung sich mit Benutzung der Gleichungen für ξ und η leicht bewerkstelligen lässt. Auch dieses Resultat konnte direct aus der Figur abgeleitet werden. Verbindet man die Mitte von R_2R_3 mit N, so trifft diese Linie oder die Verlängerung derselben R_1T_1 in der Mitte und ist selbst zu R_1T_1 conjugirt. T_1 ist also weiter nichts als der Endpunkt der durch R_1 zu R_2R_3 parallelen Sehne. Ebenso muss die Verbindungslinie der Mitte von R_1R_3 mit N oder die Verlängerung die Strecke R_2T_2, und endlich die Verbindungslinie von R_1R_2 mit N oder die Verlängerung die Strecke R_3T_3 halbiren. Es stellt sich demnach heraus, dass die Punkte U und T diejenigen Punkte sind, die man vermöge der Eigenschaften der Mittelpunktscurven stets finden kann, wenn der Mittelpunkt 0 und 3 Punkte der Peripherie R_1, R_2, R_3 gegeben sind. Zu jedem dieser R gehört nämlich erstens der gegenüberliegende Endpunkt U des entsprechenden Durchmessers und zweitens der Endpunkt T der durch ihn zur Gegenseite parallelen Sehne.

Nachdem der Nachweis erbracht ist, dass sämtliche 9 Punkte auf dem angegebenen Kegelschnitt liegen, werfen wir nun noch einen Blick auf die gegenseitige Lage der beiden Curven. Man erkennt, dass dieselben sich in perspectivischer Lage befinden, für welche S das Aehnlichkeitscentrum ist, d. h. dass man zu jedem Punkte der umbeschriebenen Curve einen zugehörigen der andern bekommt, wenn man denselben mit S verbindet und diese Linie um die Hälfte verlängert. So erhält man auch zu 0 den Mittelpunkt N zu Q_1 den Punkt R, zu Q_2 den Punkt R_2, zu Q_3 den Punkt R_3. Die andern, den Punkten U und T entsprechenden Punkte der umbeschriebenen Curve sind die Endpunkte der zu Q_1, Q_2, Q_2 gehörigen Durchmesser und die Endpunkte der Sehnen, welche durch jeden der Punkte Q zur Verbindungslinie der beiden andern parallel gezogen werden können. Man findet diese Punkte auch, indem man durch die Ecken des gegebenen Dreiecks Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten zieht und in dem entstandenen grossen Dreieck die conjugirten Ecktransversalen zeichnet. Die Mittelpunkte der oberen Abschnitte entsprechen dann den Punkten U, die Fusspunkte derselben den Punkten T. Ueberhaupt kann jede einem Dreieck umbeschriebene Curve angesehen werden als die Curve der 9 Punkte für ein grösseres Dreieck, dessen Seiten durch die Ecken des gegebenen den gegenüberliegenden Seiten parallel laufen.

Alle Resultate gelten natürlich auch für den Fall, dass der Punkt 0 ins Unendliche rückt, und die umbeschriebene Curve in eine

Parabel übergeht. Es lassen sich unendlich viele Parabeln durch die Ecken eines Dreiecks zeichnen, von denen jede einzelne durch die Richtung der Hauptaxe vollständig bestimmt ist. Zeichnet man dasjenige Dreieck, dessen Seiten durch die Ecken des gegebenen gehen und den Seiten desselben parallel sind, zieht ferner durch die Ecken dieses Dreiecks Parallelen zur Axe, so treffen diese Parallelen die Seiten des grossen Dreiecks oder die Verlängerung derselben in der Parabel.

Ist einem Dreieck eine Parabel umbeschrieben, und zieht man durch die Ecken des Dreiecks Parallelen zur Axe, so liegen die Schnittpunkte dieser Parallelen mit den gegenüberliegenden Seiten oder der Verlängerung derselben und die Mitten der Seiten auf einer zweiten Parabel vom halben Parameter, deren Axenrichtung derjenigen der umbeschriebenen Parabel entgegengesetzt ist. Auch hier ist der Schwerpunkt S das Aehnlichkeitscentrum beider Curven; die Verbindungslinie der beiden Scheitel geht durch S und wird durch diesen Punkt im Verhältniss von 2 : 1 geteilt.

Wir gehen nun zur Untersuchung berührender Curven über.

§ 11.

Beweis des Satzes: Verbindet man den Mittelpunkt einer berührenden Curve des Dreiecks mit der Mitte einer Seite und zieht durch die gegenüberliegende Ecke die Parallele, so trifft diese die Seite oder die Verlängerung derselben in einem Punkte, welcher von der Mitte der Seite ebenso weit entfernt ist wie der Berührungspunkt, aber nach entgegengesetzter Richtung hin liegt.

Wir gehen beim Beweise nicht vom Dreieck, sondern von der berührenden Curve aus. Das Abbild derselben sei

$$\xi^2 + \varepsilon\eta^2 = 1$$

ferner seien die Coordinaten der Berührungspunkte

$$B_1 = (\xi_1, \eta_1), \quad B_2 = (\xi_2, \eta_2), \quad B_3 = (\xi_3, \eta_3)$$

Die Gleichungen der Tangenten resp. der Seiten des Dreiecks lauten dann

$$\xi\xi_1 + \varepsilon\eta\eta_1 = 1, \quad \xi\xi_2 + \varepsilon\eta\eta_2 = 1, \quad \xi\xi_3 + \varepsilon\eta\eta_3 = 1 \qquad (1)$$

Diese Tangenten schneiden sich in den Ecken Q_1, Q_2, Q_3 des Dreiecks, deren Coordinaten wir mit (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3) bezeichnen wollen.

Es wird dann

$$u_1 = \frac{\eta_3 - \eta_2}{(23)}, \quad u_2 = \frac{\eta_1 - \eta_3}{(31)}, \quad u_3 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{(12)},$$
$$v_1 = -\varepsilon\frac{\xi_3 - \xi_2}{(23)}, \quad v_2 = -\varepsilon\frac{\xi_1 - \xi_3}{(31)}, \quad v_3 = -\varepsilon\frac{\xi_2 - \xi_1}{(12)} \tag{2}$$

sofern wir wie in § 4. die Determinanten in ξ und η mit (23), (31) und (12) bezeichnen.

Wir denken uns nun den Mittelpunkt M mit der Mitte R_1 von $Q_2 Q_3$ verbunden und ziehen durch Q_1 die Parallele, welche $Q_2 Q_3$ oder die Verlängerung in T_1 trifft. Es handelt sich dann darum nachzuweisen, dass

$$T_1 R_1 = R_1 B_1 \quad \text{oder} \quad T_1 Q_2 = Q_3 B_1 \quad \text{ist.}$$

Die Gleichung der durch Q_1 gezogenen Parallele heisst

$$\eta = v_1 + (\xi - u_1)\frac{v_2 + v_3}{u_2 + u_3}$$

während

$$\eta = v_2 + (\xi - u_2)\frac{v_2 - v_3}{u_2 - u_3}$$

die Gleichung von $Q_2 Q_3$ darstellt. Für den Schnittpunkt T_1 wird daher die erste Coordinate

$$\xi = \frac{v_2 - v_1 + u_1\dfrac{v_2 + v_3}{u_2 + u_3} - u_2\dfrac{v_2 - v_3}{u_2 - u_3}}{\dfrac{v_2 + v_3}{u_2 + u_3} - \dfrac{v_2 - v_3}{u_2 - u_3}}$$

Für die relative erste Coordinate von T_1 in Bezug auf den Punkt Q_2 kommt deswegen

$$\xi - u_2 = \frac{(u_1 - u_2)\dfrac{v_2 + v_3}{u_2 + u_3} + v_2 - v_1}{\dfrac{v_2 + v_3}{u_2 + u_3} - \dfrac{v_2 - v_3}{u_2 - u_3}}$$
$$= (u_2 - u_3)\frac{u_1 v_2 - u_2 v_1 - u_2 v_3 + u_3 v_2 - u_3 v_1 + u_1 v_3}{2(u_2 v_3 - u_3 v_2)} \tag{3}$$

Es kommt nun darauf an, die in diesem Ausdruck vorkommenden Coordinaten von Q_1, Q_2, Q_3 durch die Coordinaten von B_1, B_2, B_3 zu ersetzen. Ausser der oben angeführten Gleichung für $Q_2 Q_3$ haben wir noch die weitere Gleichung

$$\xi\xi_1 + \varepsilon\eta\eta_1 = 1$$

deren Vergleichung

$$\xi_1 = \frac{v_3 - v_2}{u_2 v_3 - u_3 v_2}, \quad \eta_1 = -\varepsilon\frac{u_3 - u_2}{u_2 v_3 - u_3 v_2}$$

ergiebt. Analog findet sich

$$\xi_2 = \frac{v_1 - v_3}{u_3 v_1 - u_1 v_3}, \quad \eta_2 = -\varepsilon\frac{u_1 - u_3}{u_3 v_1 - u_1 v_3} \quad \text{und}$$

$$\xi_3 = \frac{v_2 - v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}, \quad \eta_3 = -\varepsilon\frac{u_2 - u_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}$$

Multipliciren wir jede dieser Gleichungen mit dem Nenner der rechten Seite und addiren, so erhalten wir

$$\xi_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + \xi_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + \xi_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0$$
$$\eta_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + \eta_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + \eta_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0$$

woraus

$$\begin{aligned} u_2 v_3 - u_3 v_2 &= t\,.\,(23) \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 &= t\,.\,(31) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 &= t\,.\,(12) \quad \text{wird.} \end{aligned} \tag{4}$$

Setzen wir diese Werte in (3) ein, so kommt

$$\xi - u_2 = (u_2 - u_3)\frac{(12) - (23) - (31)}{2(23)} = \varepsilon\eta_1\frac{t}{2}[(12) - (23) - (31)] \tag{5}$$

Directe Ausrechnung ergiebt nun

$$\begin{aligned} u_2 v_3 - u_3 v_2 &= \frac{\varepsilon}{(12)(31)}[(12) + (23) + (31)] \\ u_1 v_3 - u_3 v_1 &= \frac{\varepsilon}{(23)(12)}[(12) + (23) + (31)] \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 &= \frac{\varepsilon}{(31)(23)}[(12) + (23) + (31)] \end{aligned} \tag{6}$$

also

$$u_2 v_3 - u_3 v_2 + u_3 v_1 - u_1 v_3 + u_1 v_2 - u_2 v_1 = \frac{\varepsilon}{(12)(23)(31)}[(12) + (23) + (31)]^2 \tag{7}$$

Andrerseits ergiebt sich aus (4) durch Addition

$$u_2 v_3 - u_3 v_2 + u_1 v_3 - u_3 v_1 + u_1 v_2 - u_2 v_1 = t[(12) + (23) + (31)] \tag{8}$$

Es muss also der Factor

$$t = \frac{\varepsilon}{(12)(23)(31)}[(12)+(23)+(31)] \quad \text{sein.} \tag{9}$$

Setzen wir diesen Wert in (5) ein, so finden wir

$$\xi - u_2 = \eta_1 \frac{(12)^2-(23)^2-(31)^2}{2(12)(23)(31)} - \frac{\eta_2}{(12)} \tag{10}$$

Dieser Ausdruck soll nun gleich der relativen ersten Coordinate des Punktes Q_3 in Bezug auf den Punkt B_1 sein, also gleich

$$u_3 - \xi_1 = \frac{\eta_2-\eta_1}{(12)} - \xi_1 - \frac{2\eta_1(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)(23)(31)}{2(12)(23)(31)} - \frac{\eta_1}{(12)} \tag{11}$$

Unsere Behauptung ist somit, wie die Gegenüberstellung beider Werte erkennen lässt, erwiesen, sofern sich zeigen lässt, dass

$$2(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)(23)(31) = (12)^2-(23)^2-(31)^2 \quad \text{ist.} \tag{12}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}(12)^2 &= \varepsilon[1-(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)^2]\\ (23)^2 &= \varepsilon[1-(\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3)^2]\\ (31)^2 &= \varepsilon[1-(\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1)^2]\end{aligned} \tag{13}$$

Die rechte Seite der Gleichung (12) ist daher auch gleich

$$\varepsilon\{-1-(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)^2+(\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3)^2+(\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1)^2\}$$

Die linke Seite ergiebt durch directes Multipliciren von (23) mit (31) nach geeigneter Zusammenfassung der Glieder:

$$2\varepsilon(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)(\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3)(\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1)-2\varepsilon(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)^2$$

Mit Berücksichtigung dieser Werte verwandelt sich unsere Bedingungsgleichung (12) in die symmetrisch gebaute Gleichung:

$$\begin{aligned}&(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)^2+(\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3)^2+(\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1)^2-1\\ &\quad-2(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)(\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3)(\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1)\end{aligned} \tag{14}$$

Handelt es sich um den Kreis $\xi^2+\eta^2=1$, so ist

$$\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2=\cos\alpha_{12}, \quad \xi_2\xi_3+\eta_2\eta_3=\cos\alpha_{23}, \quad \xi_3\xi_1+\eta_3\eta_1=\cos\alpha_{31}$$

und es stellt die Gleichung

$$\cos^2\alpha_{12}+\cos^2\alpha_{23}+\cos^2\alpha_{31}-1=2\cos\alpha_{12}\cos\alpha_{23}\cos\alpha_{31}$$

eine bekannte goniometrische Formel dar.

Wir haben hier nachzuweisen, dass dieselbe auch für den Fall $\varepsilon=-1$ gültig ist.

Da die Punkte B_1, B_2, B_3 auf der Curve liegen, muss

$$\xi_1^2 + \varepsilon\eta_1^2 = \xi_2^2 + \varepsilon\eta_2^2 = \xi_3^2 + \varepsilon\eta_3^2 = 1$$

sein, welche Gleichungen sich zu den beiden Relationen

$$(1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2)(1-\xi_3^2) = \varepsilon\eta_1^2\eta_2^2\eta_3^2 \quad \text{und}$$

$$(1-\varepsilon\eta_1^2)(1-\varepsilon\eta_2^2)(1-\varepsilon\eta_3^2) = \xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2$$

combiniren lassen. Addition derselben ergiebt

$$\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^2\xi_3^2 + \xi_3^2\xi_1^2 + \eta_1^2\eta_2^2 + \eta_2^2\eta_3^2 + \eta_3^2\eta_1^2 - 1 - 2\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2 + 2\varepsilon\eta_1^2\eta_2^2\eta_3^2$$

woraus

$$(\xi_1\xi_2 + \varepsilon\eta_1\eta_2)^2 + (\xi_2\xi_3 + \varepsilon\eta_2\eta_3)^2 + (\xi_3\xi_1 + \varepsilon\eta_3\eta_1)^2 - 1 = 2\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2 + 2\varepsilon\eta_1^2\eta_2^2\eta_3^2 + 2\varepsilon\xi_1^2\xi_2\eta_1\eta_2(\xi_3^2 + \varepsilon\eta_3^2) + 2\varepsilon\xi_2^2\xi_3\eta_2\eta_3(\xi_1^2 + \varepsilon\eta_1^2) + 2\varepsilon\xi_3^2\xi_1\eta_3\eta_1(\xi_2^2 + \varepsilon\eta_2^2) - 2(\xi_1\xi_2 + \varepsilon\eta_1\eta_2)(\xi_2\xi_3 + \varepsilon\eta_2\eta_3)(\xi_3\xi_1 + \varepsilon\eta_3\eta_1)$$ wird.

Damit ist die Richtigkeit der Gleichung (14) und die Identität der Ausdrücke für $\xi - u_2$ und $u_3 - \xi_1$ nachgewiesen. In ähnlicher Weise lässt sich der Nachweis für die zweite Coordinate führen.

Daraus folgt aber, dass die Punkte T_1 und B_1 in der Tat von Q_2 resp. Q_3 und demnach auch von R_1 gleichweit entfernt sind und nach verschiedener Seite hin liegen.

Was aber für das Abbild gilt, muss auch für die Curve selbst gelten, da es sich um die Entfernung von Punkten handelt, die auf ein und derselben Geraden liegen.

§ 12.

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte ähnlicher Curven, welche die Schenkel eines Winkels berühren.

Der im vorigen Paragraphen bewiesene Satz macht es auf einfache Weise möglich, zum Mittelpunkt einer berührenden Curve die drei Berührungspunkte zu finden. Der am Schlusse von § 8. angekündigte Lehrsatz enthält aber mehr, die Schnittpunkte der Seiten mit den durch die Ecken des Dreiecks gezogenen Parallelen sollen selbst Berührungspunkte anderer berührender Curven sein, und zwar soll jeder zu derjenigen Curve gehören, deren Mittelpunkt mit der betreffenden Ecke und dem Mittelpunkt der gegebenen Curve auf einer Geraden liegt. Bevor wir näher auf diese Erweiterung eingehen können, ist es nötig danach zu fragen, ob überhaupt ausser

der einen gegebenen berührenden Curve noch andere existiren müssen und wo die Mittelpunkte derselben zu suchen sind. Eine Antwort hierauf giebt die Untersuchung des geometrischen Orts für die Mittelpunkte aller ähnlichen Curven, welche die Schenkel eines Winkels berühren.

Natürlich denken wir uns wieder die ganze Ebene nach unserm Princip abgebildet. Der Scheitel des Winkels sei der Anfangspunkt, und es seien die Gleichungen der beiden Schenkel

$$l_1\xi + m_1\eta = 0, \quad l_2\xi + m_2\eta = 0$$

Ferner habe die berührende Curve die Gleichung

$$(\xi - u)^2 + \varepsilon(\eta - v)^2 = \sigma$$

wo u, v die Coordinaten des Mittelpunktes bedeuten. Die Berührungspunkte seien endlich

$$B_1 = (\xi_1, \eta_1) \quad \text{und} \quad B_2 = (\xi_2, \eta_2)$$

Dann muss die Gleichung der Tangente

$$\xi\xi_1 + \varepsilon\eta\eta_1 - (\xi + \xi_1)u - \varepsilon(\eta + \eta_1)v + u^2 + v^2 = \sigma \quad \text{mit} \quad l_1\xi + m_1\eta = 0$$

ferner

$$\xi\xi_2 + \varepsilon\eta\eta_2 - (\xi + \xi_2)u - \varepsilon(\eta + \eta_2)v + u^2 + v^2 = \sigma \quad \text{mit} \quad l_2\xi + m_2\eta = 0$$

identisch sein, woraus aber erstens

$$\xi_1 u + \varepsilon\eta_1 v = u^2 + v^2 - \sigma \quad \text{und} \quad \xi_2 u + \varepsilon\eta_2 v = u^2 + v^2 - \sigma$$

also

$$(\xi_1 - \xi_2)u + \varepsilon(\eta_1 - \eta_2)v = 0 \tag{1}$$

und zweitens

$$l_1 : m_1 = \xi_1 - u : \varepsilon(\eta_1 - v) \text{ und } l_2 : m_2 = \xi_2 - u : \varepsilon(\eta_2 - v) \text{ folgt.} \tag{2}$$

Hierzu treten noch die Gleichungen

$$\begin{gathered} l_1\xi_1 + m_1\eta_1 = 0, \quad l_2\xi_2 + m_2\eta_2 = 0 \text{ und} \\ (\xi_1 - u)^2 + \varepsilon(\eta_1 - v)^2 = \sigma, \quad (\xi_2 - u)^2 + \varepsilon(\eta_2 - v)^2 = \sigma \end{gathered} \tag{3}$$

Die beiden letzten liefern durch Subtraction

$$(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 + \xi_2 - 2u) - (\eta_1 - \eta_2)(\eta_1 + \eta_2 - 2v) = 0$$

Setzen wir hierin den Wert

$$\xi_1 - \xi_2 = -\frac{\varepsilon(\eta_1 - \eta_2)v}{u}$$

wie er sich aus (1) ergiebt, ein, so kommt nach Division mit $\eta_1 - \eta_2$ und Multiplication mit u

$$v(\xi_1 + \xi_2) - u(\eta_1 + \eta_2) = 0 \tag{4}$$

Die erste der Proportionen (2) ergiebt nun

$$m_1\xi_1 - \varepsilon l_1\eta_1 = m_1 u - \varepsilon l_1 v$$

Dazu stellen wir

$$l_1\xi_1 + m_1\eta_1 = 0$$

und berechnen aus beiden Gleichungen die Werte von ξ_1 und η_1. Es kommt dann

$$\xi_1 = \frac{m_1(m_1 u - \varepsilon l_1 v)}{m_1^2 + \varepsilon l_1^2}, \qquad \eta_1 = \frac{-l_1(m_1 u - \varepsilon l_1 v)}{m_1^2 + \varepsilon l_1^2}$$

Ebenso wird

$$\xi_2 = \frac{m_2(m_2 u - \varepsilon l_2 v)}{m_2^2 + \varepsilon l_2^2}, \qquad \eta_2 = \frac{-l_2(m_2 u - \varepsilon l_2 v)}{m_2^2 + \varepsilon l_2^2}$$

Diese Werte subtituiren wir schliesslich in (4), wonach sich bei passender Zusammenfassung der Glieder als Gleichung des geometrischen Orts

$$\frac{v^2}{u^2} - 2\frac{v}{u}\frac{\varepsilon m_1 m_2 - l_1 l_2}{m_1 l_2 + m_2 l_1} = \varepsilon \tag{5}$$

ergiebt.

Dieselbe stellt im allgemeinen zwei durch den Anfangspunkt, d. h. den Scheitel des Winkels gehende gerade Linien dar, welche, da das Product der beiden Wurzelwerte von $\frac{v}{u}$ gleich $-\varepsilon$ ist, in Bezug auf die ähnlichen Kegelschnitte conjugirt sind. Im Falle der Ellipse $\varepsilon = +1$ sind beide Wurzelwerte immer reell, im Falle der Hyperbel $\varepsilon = -1$ aber nur dann, wenn

$$\left(\frac{m_1 l_2 + m_2 l_1}{m_1 m_2 + l_1 l_2}\right)^2 < 1 \text{ ist.}$$

Um die Bedeutung dieser Bedingung zu erkennen, führen wir die beiden concaven Winkel φ_1 und φ_2 ein, welche die Schenkel des Winkels mit der positiven ξ axe bilden. Es ist dann

$$-\frac{l_1}{m_1} = \operatorname{tg}\varphi_1, -\frac{l_2}{m_2} = \operatorname{tg}\varphi_2$$

zu setzen, und es sei die Bezeichnung so gewählt, dass $\varphi_1 < \varphi_2$ ist. Substituiren wir diese Werte, so nimmt die obige Bedingung die Form an

$$\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2}{1+\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}\right)^2 < 1$$

welche sich leicht in

$$2\sin^2\varphi_2 \cos(2\varphi_1) < \cos(2\varphi_1)$$

überführen lässt. Ist nun $\cos(2\varphi_1) > 0$, d. h. $\varphi_1 < 45^0$ oder $\varphi_1 > 135^0$, so muss $2\sin^2\varphi_2 < 1$, also auch $\varphi_2 < 45^0$ oder $\varphi_2 > 135^0$ sein. Ist jedoch $\cos(2\varphi_1) < 0$, also $135^0 > \varphi_1 > 45^0$, so muss $2\sin^2\varphi_2 > 1$ und auch $135^0 > \varphi_2 > 45^0$ sein. Im ersten Falle ergiebt die Rechnung für σ stets einen negativen Wert, es ist dann die η axe die reelle Axe der ähnlichen Hyperbeln, im zweiten Falle ist σ positiv und die ξ axe die reelle Axe der Hyperbeln. Die obige Bedingung besagt demnach weiter nichts, als dass beide Schenkel des berührten Winkels parallel 2 nichtschneidenden Durchmessern der Hyperbel sein müssen.

§ 13.

Von den berührenden ähnlichen Curven eines Dreiecks.

Machen wir nun Anwendung auf den Fall des vorletzten Paragraphen. Die gegebene Curve berührte die Schenkel des Winkels $Q_2Q_1Q_3$, daher muss der Mittelpunkt jeder ähnlichen berührenden Curve auf MQ_1 oder auf der durch Q_1 hierzu conjugirt gezogenen Geraden liegen. Die Curve berührt aber ebenso die Schenkel der Winkel $Q_1Q_2Q_3$ und $Q_1Q_3Q_2$, und deshalb müssen dieselben Mittelpunkte ähnlicher berührender Curven auch auf MQ_2 und MQ_3 und auf den durch Q_2 resp. Q_3 gehenden conjugirten Geraden zu suchen sein.

Man bekommt daher die übrigen Mittelpunkte, indem man durch Q_1 zur Verbindungslinie der Berührungspunkte B_2 und B_3 eine Parallele zieht, welche MQ_2 und MQ_3 oder deren Verlängerung in M'' und M''' schneidet, dann den zweiten dieser Schnittpunkte M''' mit Q_2 verbindet und diese Linie bis zum Schnittpunkte M' mit MQ_1 verlängert. Dann sind M', M'', M''' die gesuchten Mittelpunkte, und es muss $M'M'''$ conjugirt MQ_2, also parallel B_1B_3 sein, ferner müssen M', M'' und Q_3 auf einer Geraden liegen, welche zu MQ_3 conjugirt, also parallel B_1B_2 ist.

Die 4 Mittelpunkte haben demnach eine solche Lage zu ein-

ander, dass die Verbindungslinie von je 2 derselben zur Verbindungslinie der beiden andern conjugirt ist und sich mit derselben in einer Ecke des Dreiecks schneidet, wie schon in § 8. von uns behauptet worden war.

Nun muss aber für jeden dieser neuen Mittelpunkte der Lehrsatz von § 11. gültig sein. Man bekommt also z. B. auch zum Mittelpunkte M' den Berührungspunkt B_1' mit der Seite Q_2Q_3, indem man M' mit R_1 verbindet, durch Q_1 die Parallele zieht, welche Q_2Q_3 in T_1' trifft, und dann B_1' so bestimmt, dass

$$R_1B_1' = R_1T_1'$$

wird, aber B_1' auf der andern Seite von R_1 zu liegen kommt. Da aber Q_2Q_3 als Tangente an beide Curven auch für beide zum Radiusvector nach dem Berührungspunkte conjugirt sein muss, so muss $M'B_1'$ parallel MB_1 sein. Dieses ist aber nur möglich, wenn B_1' mit T_1 und T_1' mit B_1 zusammenfällt und $M'R_1$ parallel Q_1B_1 läuft. Wir hätten daher M' auch dadurch finden können, dass wir durch T_1 eine Parallele zu B_1M zogen und diese bis zum Schnittpunkt mit MQ_1 verlängerten. Es ist leicht einzusehen, dass ein auf diese Weise construirter Punkt M' wirklich der Bedingung von § 11. entspricht, und $M'R_1$ parallel Q_1B_1 sein muss. Verlängern wir T_1Q_1 bis zum Schnitt mit der Verlängerung von B_1M in C_1, so muss

$$B_1M = MC_1$$

also C_1 ein Punkt der berührenden Curve sein. Dann verlängern wir noch T_1M' und B_1Q_1 bis zum Schnitt in C_1'. Da

$$B_1M = MC_1$$

ist, und T_1C_1' parallel B_1C_1 läuft, so muss auch

$$T_1M' = M'C_1'$$

und C_1' ein Punkt der zweiten berührenden Curve sein. Dann aber muss endlich auch $M'R_1$ parallel $C_1'B_1$ sein, wie behauptet worden.

Damit ist gezeigt, dass die Fusspunkte T der durch die Ecken des Dreiecks gezogenen Parallelen, die bei der Construction der Berührungspunkte einer berührenden Curve vorkommen, selbst wieder Berührungspunkte anderer berührenden Curven sind, und zwar jede zu derjenigen Curve gehört, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte der gegebenen Curve und der entsprechenden Ecke auf einer Geraden liegt. Der am Schlusse des § 8. genannte allgemeine Lehrsatz ist

also jetzt seinem ganzen Inhalte nach bewiesen. Gleichzeitig haben wir gelernt, wie man durch einfache Construction zum Mittelpunkt einer berührenden Curve die Mittelpunkte der 3 andern und sämtliche Berührungspunkte finden kann.

Was die Lage der 4 Mittelpunkte angeht, so überzeugt man sich bald, dass stets einer von ihnen innerhalb des Dreiecks, die 3 andern ausserhalb liegen. Man kann zwei wesentlich verschiedene Lagen der Punkte zu einander unterscheiden.

Verbindet man die äusseren Punkte zu einem Dreieck, so liegen im ersten Falle alle Ecken des gegebenen Dreiecks auf den Seiten des neuen, im andern Falle jedoch liegt nur eine Ecke auf der Seite selbst, die beiden andern auf der Verlängerung. Wir werden später noch genauer auf diesen Unterschied zurückkommen.

Jetzt können wir auch die Frage beantworten, ob um jeden beliebigen Punkt als Mittelpunkt eine Curve construirt werden kann, welche die Seiten des Dreiecks berührt. Nimmt man einen Punkt M beliebig an, so lassen sich unter der Voraussetzung, dass derselbe Mittelpunkt einer berührenden Curve ist, die zugehörigen Berührungspunkte B_1, B_2, B_3 finden. Durch diese kann aber nach den Untersuchungen des § 9., wenn von ganz singulären Fällen abgesehen wird, stets eine und nur eine Curve gelegt werden. Dass dann die in B_1, B_2, B_3 an diese eine Curve gelegten Tangenten auch wirklich mit den Seiten des gegebenen Dreiecks übereinstimmen und nicht ein anderes von diesem verschiedenes Dreieck begrenzen, kann leicht eingesehen werden. Die Lage der Eckpunkte des von den Tangenten gebildeten Dreiecks ist dadurch bestimmt, dass dieselben auf den von M aus gezogenen Halbirungslinien der Sehnen B_1B_2, B_2B_3, B_3B_1 liegen, und dass die Verbindungslinie von je 2 derselben durch einen der Punkte B hindurch gehen muss. Daraus folgt, dass die Lage einer Tangente die Lage der beiden andern bestimmt. So liefert z. B. die Tangente in B_1 sogleich die Punkte Q_2 und Q_3 und dann weiter die Verbindung von Q_2 mit B_3 den Punkt Q_1, und es muss dann von selbst Q_1Q_3 durch B_2 gehen. Die Ecken des gegebenen Dreiecks genügen allen diesen Bedingungen. Wollte man nun annehmen, dass die Tangente in B_1 nicht mit der entsprechenden Seite des Dreiecks übereinstimmte, so würde man an Stelle von Q_3 und Q_1 zwei andere Punkte als Ecken des Dreiecks erhalten, deren Verbindungslinie nicht durch B_2 hindurchgeht. Im Falle B_2 auf Q_3Q_1 selbst liegt, würden nämlich, wie man direct aus der Figur ersehen kann, beide Punkte auf MQ_3 und MQ_1 oder beide auf der Verlängerung dieser Linien zu liegen kommen, im Falle B_2 auf der Verlängerung von Q_3Q_1 liegt, dagegen immer

der eine auf der betreffenden Linie, der andere auf der Verlängerung, in beiden Fällen würde also die Verbindungslinie der beiden Punkte durch B_2 nicht mehr hindurchgehen.

Es existiren demnach ausser den Seiten des gegebenen Dreiecks keine Geraden mehr, welche den Bedingungen der Tangenten entsprechen, woraus folgt, dass diese die Tangenten selbst sein müssen. Man kann also in der Tat um jeden beliebigen Punkt als Mittelpunkt eine Curve zeichnen, welche die Seiten des Dreiecks berührt.

Durch eine ähnliche Ueberlegung lässt sich erkennen, dass je 4 beliebig angenommene Punkte der Ebene angesehen werden können als Mittelpunkte von 4 ähnlichen Curven, welche die Seiten eines Dreiecks berühren. Man erhält die Ecken des betreffenden Dreiecks als Schnittpunkte der Verbindungslinie von je 2 Punkten mit der Verbindungslinie der beiden andern.

Ausser den 4 berührenden ähnlichen Curven eines Dreiecks existirt immer noch eine fünfte, welche durch die Ecken des Dreiecks geht. Der Mittelpunkt O derselben ist leicht zu finden. Man zeichnet für eine der berührenden Curven die Radienvectoren nach den Berührungspunkten und zieht durch die Mitten der Dreiecksseiten Parallelen, welche sich in dem gesuchten Mittelpunkte treffen.

Nicht so leicht gestaltet sich die Lösung der Aufgabe, zum Mittelpunkt O einer umbeschriebenen Curve die 4 Mittelpunkte der ähnlichen berührenden Curven zu finden.

Man verbinde O mit den Mitten der Seiten R_1, R_2, R_3, verlängere diese Linien nach beiden Seiten bis zum Schnitt mit der Curve und ziehe durch die entstandenen 6 Schnittpunkte die den Seiten des Dreiecks parallelen Tangenten. Dieselben schliessen dann im Ganzen 4 verschiedene ähnliche Dreiecke ein, welche von der gegebenen Curve berührt werden. Verbindet man nun die Ecken eines jeden dieser Dreiecke mi dem Mittelpunkte O und zieht durch die Ecken des gegebenen Dreiecks hierzu Parallelen, so treffen sich diese in den Mittelpunkten der berührenden Curven.

Hieraus geht hervor, dass sich nicht zu jeder beliebigen umbeschriebenen Curve ähnliche berührende Curven zeichnen lassen. Solche sind nur dann möglich, wenn die Verbindungslinien MR_1, MR_2, MR_3 oder deren Verlängerung die umbeschriebene Curve auch treffen und den Seiten des Dreiecks parallele Tangenten gezogen werden können. Diese Bedingung ist immer erfüllt im Falle der Ellipse, wenn also der Punkt O innerhalb des von R_1, R_2, R_3 gebildeten Dreiecks oder innerhalb der Scheitelwinkel dieses Dreiecks

liegt, im Falle der Hyperbel jedoch nur, wenn alle 3 Ecken auf einem Zweige liegen, wenn also 0 innerhalb der Scheitelwinkel zum gegebenen Dreieck angenommen wird.

Ist endlich die umbeschriebene Curve eine Parabel, so lässt sich nur eine einzige berührende Curve gleicher Axenrichtung zeichnen. Die Construction der Berührungspunkte kann aus den allgemeinen Vorschriften dieses Paragraphen abgeleitet werden, wenn man sich den Mittelpunkt 0 unendlich weit entfernt denkt. Man ziehe durch die Ecken des Dreiecks Parallelen zur Axe, welche die Gegenseiten oder deren Verlängerung in T_1, T_2, T_3 treffen. Dann liegen die Berührungspunkte in derselben Entfernung von den Mitten der Seiten wie diese Schnittpunkte, nur nach entgegengesetzter Richtung hin.

§ 14.

Die Mittelpunkte der 4 berührenden ähnlichen Curven als gemeinsame Schnittpunkte dreier Hyperbeln.

Es giebt noch einen zweiten Weg, vom Mittelpunkt 0 einer umbeschriebenen Curve zu den Mittelpunkten der ähnlichen berührenden Curven zu gelangen. Diese können nämlich auch als gemeinsame Schnittpunkte dreier Hyperbeln bestimmt werden. Soll die berührende Curve der umbeschriebenen ähnlich sein, so muss für jede Seite der Radiusvector zum Berührungspunkte parallel sein der Verbindungslinie des Mittelpunktes dieser Seite mit dem Mittelpunkt der umbeschriebenen Curve. Suchen wir den geometrischen Ort für die Mittelpunkte aller berührenden Curven, bei welchen diese Bedingung nur für eine der Seiten erfüllt ist. Wir wählen als solche Q_2Q_3, nehmen darauf den Berührungspunkt B_1 beliebig an, suchen auf der andern Seite des Mittelpunktes R_1 einen Punkt T_1, so dass

$$T_1R_1 = R_1B_1$$

wird, zeichnen Q_1T_1 und ziehen durch B_1 zu $0R_1$, durch R_1 zu Q_1T_1 Parallelen, welche sich im Mittelpunkte M der berührenden Curve treffen. Lassen wir nun B_1 auf Q_2Q_3 und der Verlängerung dieser Seite wandern, so bewegt sich der Punkt M auf einer Curve, welche gleich bleibt für alle Punkte 0, welche auf derselben durch R_1 gehenden Geraden liegen. Rückt B_1 an R_1 heran, so nähert sich M dem Mittelpunkte R_1, die Curve geht also durch R_1 hindurch. Ferner geht dieselbe durch 2 Punkte H und J, welche man bekommt, wenn man durch Q_2 und Q_3 zu $0R_1$ Parallelen zieht und dieselben bis zum Schnitt mit den durch R_1, R_3 resp. R_1, R_2 bestimmten Halbirungslinien verlängert.

Auch die unendlich fernen Punkte der Curve lassen sich leicht angeben. Wir ziehen Q_1K parall. $0R_1$ und suchen auf der andern Seite den Punkt L, für welchen

$$LR_1 = R_1K$$

ist. Dann ist L der Berührungspunkt und die berührende Curve eine Parabel, deren Mittelpunkt als Schnittpunkt von $0R_1$ und der durch L hierzu parallelen Geraden im Unendlichen liegt. Bewegt sich der Berührungspunkt selbst nach der einen oder andern Richtung in's Unendliche, so rückt T_1 in entgegengesetzter Richtung fort, und der Schnittpunkt M nähert sich immer mehr dem Schnittpunkte der durch R_1 gehenden, zu Q_1T_1 parallelen Geraden mit der durch Q_1 zu Q_2Q_3 gezogenen Parallelen.

Unsere Curve wird demnach eine Hyperbel sein, deren Asymptoten die durch L zu $0R_1$ und die durch Q_1 zu Q_2Q_3 parallel gelegten Geraden sind. Zeichnen wir wieder das grosse Dreieck, dessen Seiten durch die Ecken des gegebenen parallel den gegenüber liegenden Seiten laufen, so ist die eine Seite dieses Dreiecks die eine, die zugehörige conjugirte Ecktransversale die andere Asymptote des geometrischen Orts.

Analytisch gestaltet sich die Sache für die beigegebene Figur folgendermassen:

Die Verlängerung von MB_1 treffe die durch Q_1 gehende Asymptote im Punkte V, die durch M zu Q_2Q_3 gezogene Parallele treffe die andere Asymptote in W.

Dann ist

$$MV = B_1V - MB_1 = Q_1K - MB_1$$

ferner

$$MW = LB_1 = LR_1 + R_1B_1$$

Nun verhält sich aber:

$$MB_1 : R_1B_1 = Q_1K : T_1K = Q_1K : LR_1 + R_1B_1$$

Es wird daher

$$MV = Q_1K - \frac{R_1B_1 \cdot Q_1K}{LR_1 + R_1B_1} = \frac{Q_1K \cdot LR_1}{LR_1 + R_1B_1} = \frac{Q_1K \cdot LR_1}{MW}$$

und somit

$$MV \cdot MW = Q_1K \cdot LR_1 \quad \text{d. h. constant.}$$

Es ist dies aber wirklich die in schiefwinkligen Coordinaten ausgedrückte, auf die angegebenen Asymptoten als Axen bezügliche Gleichung einer durch R_1 gehenden Hyperbel.

Solcher Hyperbeln lassen sich noch zwei weitere, den Seiten Q_1Q_2 und Q_1Q_3 entsprechende zeichnen. Da nun die Mittelpunkte aller berührenden ähnlichen Curven gleichzeitig auf allen drei Hyperbeln liegen müssen, erhalten wir den Satz:

Construirt man dasjenige grosse Dreieck, dessen Seiten durch die Ecken des gegebenen parallel den gegenüberliegenden Seiten laufen und zeichnet zu jeder Seite dieses Dreiecks und der zugehörigen conjugirten Ecktransversalen als Asymptoten diejenige Hyperbel, welche durch die Mitte der parallelen Seite des gegebenen Dreiecks geht, so schneiden sich diese drei Hyperbeln in den 4 Mittelpunkten der berührenden ähnlichen Curven.

Uebrigens sind die Mittelpunkte dieser drei Hyperbeln als Fusspunkte der conjugirten Ecktransversalen des grossen Dreiecks auf der umbeschriebenen Curve selbst gelegen.

Betrachten wir nun die Gestalt und Lage der verschiedenen zur Seite Q_2Q_3 gehörigen Hyperbeln. Sie haben sämtlich eine Asymptote gemeinsam, nämlich die durch Q_1 gehende Seite G_2G_3 des grossen Dreiecks; ferner gehen sie sämtlich durch denselben Punkt R_1. Da die andere Asymptote die zugehörige Ecktransversale G_1A des grossen Dreiecks ist und die Verbindungslinie von G_1 mit Q_1 durch R_1 hindurchgeht und von R_1 halbirt wird, so müssen sämtliche Hyperbeln die Gerade Q_1G_1 im Punkte R_1 berühren. Liegt 0 auf Q_1R_1 oder auf der Verlängerung hiervon, so fällt der Mittelpunkt A auf Q_1 und die Hyperbel geht über in die beiden Geraden G_2G_3 und QG_1. Durchschneidet $0R_1$ oder die Verlängerung die Seite Q_1Q_2 des gegebenen Dreiecks, so liegt die Hyperbel in dem von G_1AG_2 und dem zugehörigen Scheitelwinkel gebildeten Raume; durchschneidet sie die Seite Q_1Q_3, so liegt die Hyperbel in dem von G_1AG_3 und dem zugehörigen Scheitelwinkel gebildeten Raume.

Wir wollen für den einen der beiden Fälle die einzelnen Hyperbeln noch genauer verfolgen und annehmen, dass der Schnittpunkt von $0R_1$ mit Q_1Q_2 sich allmählich von Q_1 nach Q_2 hin bewege. Wir bekommen dann eine Schar von Curven, deren einer Zweig bei R_1 in das Dreieck eintritt und dasselbe zwischen Q_1 und Q_3 wieder verlässt. Dieser Austrittspunkt muss, da J anfänglich ausserhalb des Dreiecks auf der Verlängerung von R_1R_2 liegt, von Q_1 ausgehend sich allmählich abwärts bewegen. Er erreicht den Mittelpunkt R_2, wenn $0R_1$ parall. Q_1Q_3 ist. In diesem Falle liegt A auf G_3, J auf R_2, die Asymptoten sind G_2G_3 und G_1G_3 selbst und die Hyperbel halbirt beide Seiten des Dreiecks Q_2Q_3 und Q_1Q_3. Dreht sich $0R_1$ noch weiter, so fällt J auf R_1R_2 selbst, der Aus-

trittspunkt der Curve rückt über R_2 hinweg auf Q_3 zu und der Winkel zwischen den Asymptoten wird immer spitzer. Schliesslich entfernt sich A in's Unendliche, die Asymptoten werden parallel und die Curve nähert sich der Geraden $R_1 Q_3$ und deren Verlängerung.

Ganz ähnlich ist der Verlauf, wenn OR_1 die Seite $Q_1 Q_3$ durchschneidet.

Wir unterbrechen an dieser Stelle unsere Betrachtung auf einen Augenblick, um eine Aufgabe einzuschalten, deren Lösung sich unmittelbar aus der Figur des Paragraphen ergiebt: Gegeben sei eine Gerade L, auf ihr ein Punkt R_1, ferner eine zweite Gerade L' und ausserhalb ein Punkt J. Man soll diejenige Hyperbel bestimmen, welche L in R_1 berührt, L' als eine Asymptote hat und durch J geht.

Lösung: Man verlängere L bis zum Schnitt mit L' in Q_1 und verlängere $Q_1 R_1$ um sich selbst bis G_1. Dann verbinde man J mit R_1, ziehe durch Q_1 die Parallele, welche die durch R_1 zu L' gezogene Parallele in Q_2 schneidet, und verlängere $Q_2 R_1$ um sich selbst bis Q_3. Endlich verbinde man Q_3 mit J und ziehe durch G_1 die Parallele, welche L' in A schneidet. Dann ist A der Mittelpunkt der Curve und $G_1 A$ die andere Asymptote. Ferner geht die Curve noch durch einen weiteren Punkt H, den man bekommt, wenn man R_1 mit der Mitte von $Q_1 Q_2$ verbindet und diese Linie verlängert, bis sie die durch Q_2 zu $G_1 A$ parallel gezogene Gerade durchschneidet.

§ 15.

Die Lage der Mittelpunkte.

Wir wissen bereits, dass nicht zu jeder beliebigen umbeschriebenen Curve ähnliche berührende Curven gezeichnet werden können, und haben auch schon angegeben, wo der Punkt O liegen muss, damit solche möglich sind. Nun lassen sich aber die 3 Hyperbeln, deren Schnittpunkte die Mittelpunkte der berührenden Curven sind, in jedem Falle construiren, woraus mit Notwendigkeit zu schliessen ist, dass dieselben sich überhaupt nicht schneiden, wenn O in einem andern als einem der früher angegebenen Räume liegt. Für die Untersuchung genügt es nur zwei der Hyperbeln zu betrachten. Da ferner einer der Mittelpunkte stets innerhalb des Dreiecks liegen muss, braucht man diese beiden, um zu beurteilen, ob Schnittpunkte vorhanden sind oder nicht, auch nur innerhalb des Dreiecks zu verfolgen. Vorher wollen wir jedoch noch einige specielle Fälle erledigen.

Ist O der Schwerpunkt, so geht jede Hyperbel über in die betreffende Seite des grossen Dreiecks und die zugehörige Mitteltransversale. Die Mittelpunkte sind demnach die Ecken des grossen Dreiecks und der Schwerpunkt des gegebenen selbst. Da die Curve in diesem Falle stets eine Ellipse ist, kann man das Resultat auch in der folgenden Weise aussprechen: Um den Schwerpunkt eines Dreiecks lassen sich stets 2 concentrische und ähnliche Ellipsen construiren, von denen die eine durch die Ecken des Dreiecks hindurch geht, die andere die Seiten in der Mitte berührt. Ausserdem giebt es noch 3 anbeschriebene ähnliche Ellipsen, welche ebenfalls die Seiten im Mittelpunkt berühren und deren Mittelpunkte die Schnittpunkte der durch die Ecken des Dreiecks zu den Gegenseiten gezogenen Parallelen sind.

Zweitens nehmen wir an, dass O sich auf einer die Seiten halbirenden Geraden bewege. Z. B. auf R_2R_3 und dessen Verlängerung. Dann ist die zu Q_2Q_3 gehörige erste Curve irgend eine G_1Q_1 in R_1 berührende Hyperbel, welche G_2G_3 als eine Asymptote hat. Die zweite auf Q_1Q_3 bezügliche Hyperbel geht durch R_2 und R_1, ihre Asymptoten sind G_2G_3 und G_3G_1. Die dritte zu Q_1Q_2 gehörige geht durch R_2 und R_1, ihre Asymptoten sind G_2G_3 und G_2G_1. Es gehen somit alle 3 Hyperbeln durch denselben Punkt R_1 und berühren die Gerade G_1Q_1; ferner haben sie sämtlich die eine Asymptote G_2G_3 gemeinsam, treffen sich also längs dieser Geraden nach beiden Seiten erst im Unendlichen. In diesem Grenzfalle sind demnach die beiden mit Q_1 auf einer Geraden liegenden Mittelpunkte, von denen der eine beständig innerhalb, der andere ausserhalb des Dreiecks fällt, auf einander zugerückt und mit der Seite zusammengefallen; die beiden andern auf der durch Q_1 zur ersten conjugirten Geraden haben sich nach beiden Seiten in's Unendliche entfernt. Dieser Fall tritt immer ein, wenn O eine die Seiten halbirende Gerade passirt.

Denken wir uns, dass der Punkt O sich innerhalb des Dreiecks in der Richtung nach Q_1 hin der Linie R_2R_3 nähert, so geht die umbeschriebene Ellipse allmählich in ein Paar paralleler Geraden über, nämlich in Q_2Q_3 und die durch Q_1 hierzu gezogene Parallele. Die einbeschriebene Curve wird sich dabei immer mehr der Seite Q_2Q_3 nähern und schliesslich mit ihr, ihr Mittelpunkt also mit R_1 zusammenfallen. Dasselbe geschieht mit der zweiten Q_2Q_3 anbeschriebenen Ellipse; auch sie kommt an Q_2Q_3 heran, ihr Mittelpunkt rückt auf R_1 zu, um diesen Punkt an der Grenze wirklich zu erreichen.

Anders steht es mit den übrigen berührenden Curven. Sie

gehen über in die beiden Geraden, welche sich von Q_1 aus über G_2 resp. G_3 in's Unendliche erstrecken. Die Berührungspunkte mit den Seiten Q_1Q_3 und Q_1Q_2 sind in Q_1 zusammengefallen, der Berührungspunkt mit der dritten Seite Q_2Q_3 ist in unendliche Ferne gerückt.

Wenn O sich auf R_2R_3 bewegend einem dieser beiden Punkte selbst nahe kommt, so wird die erste Hyperbel sich einer der beiden andern nähern und schliesslich mit ihr zusammenfallen. In diesem Falle giebt es unendlich viele umbeschriebene, also auch unendlich viele berührende Curven; der geometrische Ort ihrer Mittelpunkte ist eben diese durch die Mitten der beiden andern Dreiecksseiten hindurchgehende Hyperbel.

Noch ein zweiter Grenzfall muss genauer erörtert werden, der Fall nämlich, dass O die Verlängerung einer Seite des Dreiecks passirt. Nehmen wir an, es bewege sich O in dem Scheitelwinke von $Q_2Q_1Q_3$ auf die Verlängerung der Seite Q_2Q_1 zu.

Der erste Zweig der ersten Hyperbel, welcher bei R_1 in das Dreieck eintritt, verlässt dasselbe dann zwischen Q_1 und R_3, ebenfalls verlässt der erste Zweig der zweiten Hyperbel, welcher bei R_2 das Dreieck betritt, dasselbe zwischen Q_1 und R_3, doch liegt dieser Austrittspunkt weiter von Q_1 entfernt als der vorige. Die beiden Zweige müssen sich daher vor dem Verlassen des Dreiecks schneiden. Da sich aber bei weiterem Fortschreiten die erste Curve der Asymptote G_2G_3, die zweite der Asymptote G_1G_3 nähert, so müssen sie sich nach dem Austritt aus dem Dreiecke noch einmal treffen. Ausserdem muss der zweite Zweig der ersten Hyperbel denselben ersten der zweiten noch in zwei Punkten treffen, die ausserhalb des Dreiecks gelegen sind.

Der erste Zweig der dritten Hyperbel stellt nämlich in diesem Falle eine Curve dar, die von R_3 ausgehend sich sehr bald auf beiden Seiten von R_3Q_1 in der Richtung auf Q_1 zu umwendet und allmählich in die von R_3 über Q_1 in's Unendliche sich erstreckende, doppelt bedeckte Gerade übergeht. Dieser Zweig geht erstens durch die beiden angegebenen Punkte zwischen R_3 und Q_1, trifft ausserdem aber den zweiten Zweig der ersten und den ersten der zweiten Hyperbel in zwei ausserhalb des Dreiecks liegenden Punkten, welche sich auf verschiedenen Seiten der Verlängerung von R_3Q_1 befinden. Es liegen also bei der ersten Hyperbel auf jedem Zweige zwei Schnittpunkte, bei der zweiten und dritten jedoch sämtliche Schnittpunkte auf dem einen Zweige allein.

Gehen wir nun zur Grenze über, so verwandelt sich der erste Zweig der dritten Hyperbel in die doppelt bedeckte Gerade, die sich

von R_3 über Q_1 in's Unendliche erstreckt, die beiden Schnittpunkte zwischen R_3 und Q_1 fallen in einen auf R_3Q_1 selbst, die beiden ausserhalb befindlichen in einen auf der Verlängerung von R_3Q_1 gelegenen zusammen. Es berührt dann der erste Zweig der zweiten Hyperbel beide Zweige der ersten in zwei Punkten, die auf R_3Q_1 und dessen Verlängerung liegen.

Die umbeschriebene Curve geht in diesem Falle über in die beiden Geraden $0Q_2$ und $0Q_3$. Die berührenden Curven, von welchen nur zwei existiren, sind Hyperbeln, welche Q_1Q_2 als eine Asymptote haben und deren andere Asympte $0Q_3$ parallel läuft.

Nähern wir uns von der entgegengesetzten Seite her der Verlängerung von Q_2Q_1, so stellen die erste und zweite Hyperbel wieder Curven vor, welche bei R_1 und R_2 das Dreieck betreten und zwischen Q_1 und R_3 verlassen. Sie liegen aber jetzt ganz auseinander und nähern sich erst, wenn man der Grenze nahe kommt, um sich schliesslich wieder in denselben beiden Punkten zu berühren. Anders steht es mit der dritten Curve. Dieselbe biegt jetzt von R_3 aus auf beiden Seiten nach Q_2 hin aus und nähert sich allmählich der von R_3 über Q_3 bis in's Unendliche sich erstreckenden Geraden. Man gelangt also hier nicht zur selben Grenze wie im vorigen Falle.

Es hält nun nicht schwer zu entscheiden, in welchen Teilen der Ebene 0 liegen muss, damit Schnittpunkte der Hyperbeln vorhanden sind.

Wir nehmen an, dass 0 sich in dem Raume befinde, welcher von dem Winkel $Q_1R_1R_3$ und seinem Scheitelwinkel begrenzt wird. Dann verlassen die sämtlichen ersten Curven, die bei R_1 das Dreieck betreten, dasselbe zwischen Q_1 und R_2. Es wird demnach die zweite Curve, welche bei R_2 eintritt, die erste innerhalb des Dreiecks schneiden, wenn sie sich so wendet, dass ihr Austrittspunkt auf Q_1Q_2 oder Q_2R_1 zu liegen kommt. Dies geschieht, wenn der Punkt 0 innerhalb des Winkels $R_3R_2Q_3$ oder des zugehörigen Scheitelwinkels sich befindet. Durch diese beiden Bedingungen wird aber die Lage des Punktes 0 auf 3 Flächenstücke beschränkt, nämlich auf denjenigen Teil des Dreiecks $R_1R_2R_3$, welcher innerhalb des Winkels $Q_1R_1R_3$ liegt, auf den Scheitelwinkel von $R_1Q_1Q_3$ und auf den Scheitelwinkel von $Q_1R_1R_3$.

Nehmen wir zweitens an, der Punkt 0 liege in dem Raume welcher von $Q_1R_1R_2$ und seinem Scheitelwinkel begrenzt wird, so verlässt die erste Curve das Dreieck zwischen Q_1 und R_3 und wird deshalb von der dritten Curve, welche bei R_3 eintritt, nur dann

geschnitten, wenn der Austrittspunkt auf Q_1Q_3 oder Q_3R_1 liegt. Wir erhalten damit drei weitere Räume, in denen O liegen darf: den noch übrigen Teil des Dreiecks $R_1R_2R_3$, welcher innerhalb des Winkels $Q_1R_1R_2$ liegt, der Scheitelwinkel von $R_1Q_1Q_2$ und den Scheitelwinkel von $Q_1R_1R_3$.

Fassen wir beide Resultate zusammen, so darf also O liegen in dem Dreieck $R_1R_2R_3$ und innerhalb der Scheitelwinkel zu $Q_3Q_1Q_3$ und $R_2R_1R_3$.

Es ist klar, dass, wenn man in derselben Weise von der zweiten Curve ausgeht und die Lage des Punktes O nach einander auf die Winkel $Q_2R_2R_1$ und $Q_3R_2R_3$ und deren Scheitelwinkel beschränkt, man zu ähnlichen Resultaten kommen muss. Dasselbe wird endlich auch der Fall sein, wenn man von der dritten Curve ausgeht.

Wir gelangen somit wirklich zu dem schon anderweitig als richtig erkannten Resultat, dass die Hyperbeln sich nur dann treffen und nur dann berührende Curven vorhanden sind, wenn der Mittelpunkt O der umbeschriebenen Curve im Innern des Dreiecks $R_1R_2R_3$, innerhalb der Scheitelwinkel dieses Dreiecks und innerhalb der Scheitelwinkel des gegebenen Dreiecks liegt.

Wir wollen nun die Lage der 4 Schnittpunkte zu einander und ihre Verteilung auf die einzelnen Zweige der Hyperbeln zu erkennen suchen.

Wir gehen dabei wieder von der Annahme aus, dass O innerhalb des Winkels $Q_1R_1R_3$ oder des zugehörigen Scheitelwinkels sich befinde. Die erste Hyperbel hat stets G_2G_3 als eine Asymptote, berührt Q_1G_1 in R_1 und schneidet Q_1Q_3 zwischen Q_1 und R_2. Die andere Asymptote wandert von G_1Q_1 bis G_1G_3. Die zweite Hyperbel berührt Q_2G_2 in R_2, hat G_1G_3 als eine Asymptote, während die andere mit G_2G_3 beginnend sich um den Punkt G_2 dreht, die Richtungen G_2Q_2, G_2G_1 passirt und schliesslich die Richtung der durch G_2 zu Q_1Q_3 gezogenen Parallelen annimmt. Der Mittelpunkt der ersten Hyperbel liegt zwischen Q_1 und G_3, der andere rückt von G_3 aus über Q_2 und G_1 allmählich in's Unendliche.

Zunächst liegt O in dem Winkel. Dann wendet sich die zweite Curve von R_2 aus abwärts, durchschneidet die erste Curve innerhalb des Dreiecks und verlässt das Dreieck zwischen Q_2 und R_1, um sich bei weiterem Fortschreiten der Asymptote G_3G_1 zu nähern. Die erste Curve nähert sich aber der Asymptote G_1A, woraus folgt, dass beide Curven sich ausserhalb des Dreiecks noch einmal treffen müssen. Aehnlich liegt die Sache auf der andern Seite. Die erste

Curve verlässt das Dreieck zwischen Q_1 und R_2 und nähert sich der Asymptote, deren Richtung zwischen G_2G_3 und G_2Q_2 gelegen ist.

Es müssen sich darum auch hier die beiden Curven noch einmal schneiden. Der vierte und letzte Schnittpunkt muss dann von selbst auf der Seite von Q_1Q_2 liegen, welche Q_3 entgegengesetzt ist.

Die vier Schnittpunkte haben also die erste der beiden in § 13. angegebenen Lagen; die äusseren Punkte lassen sich zu einem Dreieck verbinden, auf dessen Seiten selbst die Ecken des gegebenen Dreiecks liegen. Ferner erkennen wir, dass der erste Zweig der ersten Hyperbel sich mit dem ersten Zweig der zweiten in 3 Punkten schneidet, während die beiden andern Zweige nur einen Punkt gemeinsam haben.

Es erübrigt noch die Lage der Punkte auf der dritten, durch R_3 gehenden Hyperbel festzustellen. Diese hat G_1G_2 als eine Asymptote, die andere liegt zwischen G_3G_1 und G_3G_2 Der erste Zweig derselben muss also durch den jenseits Q_1Q_2 liegenden vierten Punkt, durch den im Innern des Dreiecks gelegenen Punkt und durch den einen der beiden andern liegenden Punkte gehen, und zwar durch den auf der Seite von R_1, wenn die veränderliche Asymptote der Curve zwischen G_3G_2 und G_3Q_3, dagegen durch den bei R_2 befindlichen, wenn die Asymptote zwischen G_3Q_2 und G_3G_1 liegt. Der letzte Punkt liegt auf dem andern Zweige.

Es liegen demnach bei allen 3 Hyperbeln 3 Punkte auf dem ersten und einer auf dem zweiten Zweige. 2 Hyperbeln schneiden sich so, dass ihre ersten Zweige 3 Punkte gemeinsam haben, die beiden andern sich nur in einem Punkte treffen. Die dritte Hyperbel aber schneidet mit ihrem ersten Zweige die beiden andern ersten Zweige nur in 2 Punkten; ausserdem geht derselbe Zweig durch den vierten Punkt, welchen die andern Zweige der ersten beiden Curven gemeinsam haben, während der andere Zweig durch den dritten Punkt hindurchgeht.

Dieses ist die Lage der Punkte für den Fall, dass 0 sich in demjenigen viereckigen Teile des Dreiecks $R_1R_2R_3$ befindet, welcher durch Q_1R_1 und Q_2R_2 von demselben abgeschnitten wird. Es bedarf jedoch keiner weiteren Begründung, dass man zu ganz denselben Resultaten gelangen muss, wenn man von einer andern Curve den Ausgang nimmt und die Lage des Punktes 0 auf die von Q_2R_2 und Q_3R_3 oder die von Q_3R_3 und Q_1R_1 begrenzten Teile beschränkt. Unser Resultat gilt daher allgemein für den Fall, dass 0 innerhalb des Dreiecks $R_1R_2R_3$ liegt.

Deswegen brauchen wir auch, wenn wir nunmehr die bewegliche Asymptote der zweiten Curve weiter drehen, das Intervall von G_2O_2 bis G_2G_1 oder die Lage des Punktes O innerhalb des Winkelraumes $Q_1R_2R_1$ nicht weiter zu berücksichtigen und gehen sogleich zu der Annahme über, dass sich die Asymptote über G_2G_1 hinaus bis zu der durch G_2 zu Q_1Q_3 parallelen Richtung drehe, oder dass O innerhalb des Winkels $R_1R_2Q_3$ und des zugehörigen Scheitelwinkels sich befinde.

Dann muss die zweite Curve, welche bei R_2 in das Dreieck eintritt, die erste, da diese G_2G_3 als Asymptote hat, schon vor dem Eintreten in das Dreieck schneiden; sie trifft noch einmal mit ihr im Innern des Dreiecks zusammen, verlässt darauf das Dreieck zwischen Q_1 und R_3 und nähert sich immer mehr der Geraden G_1G_2. Der zweite Zweig der ersten Curve nähert sich aber G_2G_3, es muss deshalb der erste Zweig der zweiten Curve nach dem Verlassen des Dreiecks den zweiten Zweig der ersten mindestens noch in einem Punkte treffen. Nun berührt der zweite Zweig der zweiten Curve die durch G_2 gehende Asymptote, der erste Zweig der ersten Curve die Verlängerung von G_1A. Es müssen sich deswegen diese beiden Zweige in einem vierten Schnittpunkte treffen, so lange die Verlängerung von G_1A die Asymptote durch G_2 auf dieser Seite durchschneidet. Dies ist aber der Fall, wenn O innerhalb des Scheitelwinkels von $Q_1R_1R_3$ liegt.

Dann haben also die 4 Schnittpunkte wieder dieselbe Lage zu einander wie im vorigen Falle, und da dann, wie man sich leicht überzeugt, die dritte Curve mit ihrem ersten Zweige durch die erstgenannten 3 Punkte, mit dem zweiten durch den vierten und letzten Punkt hindurchgeht, so gilt auch für die Verteilung der Punkte auf die einzelnen Hyperbeln dasselbe.

Es bedarf keiner weiteren Begründung mehr, dass dieses Resultat nicht nur für Punkte innerhalb des Scheitelwinkels von $Q_1R_1R_3$ sondern überhaupt für alle Punkte O gelten muss, welche innerhalb der Scheitelwinkel des Dreiecks $R_1R_2R_3$ liegen.

Fassen wir beide Fälle zusammen, so lautet unser Ergebniss: Liegt O in dem Dreieck $R_1R_2R_3$ oder innerhalb eines Scheitelwinkels zu diesem Dreieck, d. h. sind die berührenden Curven Ellipsen, so bilden die äussern Mittelpunkte immer ein Dreieck, auf dessen Seiten die Ecken des gegebenen Dreiecks liegen. Der erste Zweig einer jeden Hyperbel enthält 3 Punkte, der zweite nur einen. Zwei der Hyperbel schneiden sich mit ihrem ersten Zweige in 3 Punkten;

der erste Zweig dieser dritten geht aber nur durch zwei dieser Punkte.

Ist aber die Asymptote durch G_2 parallel G_1A_1, liegt 0 im Unendlichen und ist die umbeschriebene Curve eine Parabel, so liegt auch der vierte Mittelpunkt im Unendlichen. Diesem entspricht die einzige in diesem Falle mögliche r berührende Parabel.

Die andern Mittelpunkte liegen im Endlichen, und zwar fallen dieselben mit den Mitten der durch die Ecken zu AG_1 parallel gezogenen Transversalen des Dreiecks zusammen, und diese Transversalen selbst stellen die entsprechenden berührenden Curven dar.

Dreht sich die Asymptote durch G_2 noch weiter, so schneidet der erste Zweig der ersten Curve den zweiten Zweig der zweiten überhaupt nicht, es geht der erste Zweig der zweiten Curve durch sämtliche 4 Mittelpunkte hindurch, während jeder Zweig der ersten Curve zwei derselben enthält. Dann liegen auch sämtliche Punkte auf dem ersten Zweige der dritten Curve. Dieser Fall tritt ein, wenn 0 sich innerhalb des Scheitelwinkels von $R_1Q_1Q_2$ befindet, doch gilt dieses Resultat mit geringer Modification auch für alle Punkte innerhalb des Scheitelwinkels von $R_1Q_1Q_2$ und überhaupt für jeden Punkt im Innern eines Scheitelwinkels zum gegebenen Dreieck.

Wenn also 0 innerhalb eines Scheitelwinkels zum gegebenen Dreieck liegt, d. h. wenn die berührende Curve eine Hyperbel ist, so haben die Mittelpunkte die zweite der beschriebenen Lagen, es lassen sich die äusseren Punkte derart verbinden, dass die eine Ecke des Dreiecks auf einer Verbindungslinie selbst, die beiden andern auf der Verlängerung liegen. In diesem Falle schneiden die ersten Zweige zweier Hyperbeln sich gegenseitig in 4 Punkten, die beiden Zweige der dritten Hyperbel dagegen in 2 Punkten.

§ 16.

Beweis des Satzes: Sämtliche ähnliche berührende Curven eines Dreiecks werden von der ähnlichen Curve der 9 Punkte berührt.

Aus der Planimetrie ist bekannt, dass der durch die Mitten der Seiten, durch die Fusspunkte der Höhen und durch die Mitten der ebenen Höhenabschnitte gehende sogenannte Feuerbach'sche Kreis sowol den einbeschriebenen wie alle 3 anbeschriebenen Kreise des Dreiecks berührt. Nach unserm Princip muss deswegen auch die Ellipse durch die Mitten der Seiten, durch die Fusspunkte der con-

jugirten Ecktransversalen und durch die Mitten der oberen Abschnitte derselben die sämtlichen 4 berührenden ähnlichen Ellipsen des Dreiecks berühren.

Wir wollen beweisen, dass auch dieser Satz allgemeinere Gültigkeit besitzt und die Curve der 9 Punkte stets die sämtlichen berührenden ähnlichen Curven berührt.

Die berührende Curve sei

$$\xi^2 + \varepsilon\eta^2 = 1$$

ferner bezeichnen wir wie in § 11. die Berührungspunkte mit B_1, B_2, B_3, die Schnittpunkte der Tangenten, d. h. die Ecken des Dreiecks mit Q_3, Q_2, Q_1 und die Coordinaten derselben mit (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3).

Man bekommt nun den Mittelpunkt 0 der umbeschriebenen Curve, indem man M mit B_1, B_2, B_3 verbindet und durch die Mitten der Seiten hierzu Parallelen zieht, welche sich in 0 treffen. Sind die Coordinaten desselben a und b, so müssen die Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} b - \frac{v_2+v_3}{2} &= \left(a - \frac{u_2+u_3}{2}\right)\frac{\eta_1}{\xi_1} \\ b - \frac{v_3+v_1}{2} &= \left(a - \frac{u_3+u_1}{2}\right)\frac{\eta_2}{\xi_2} \\ b - \frac{v_1+v_2}{2} &= \left(a - \frac{u_1+u_2}{2}\right)\frac{\eta_3}{\xi_3} \end{aligned} \qquad (1)$$

und die Gleichung der umbeschriebenen Curve hat die Gestalt:

$$(\xi - a)^2 + \varepsilon(\eta - b)^2 = r^2 \qquad (2)$$

Man erhält ferner den Mittelpunkt N der Curve der 9 Punkte, wenn man 0 mit dem Schwerpunkt S verbindet und diese Linie um die Hälfte verlängert. Die Coordinaten von N werden danach

$$\frac{u_1+u_2+u_3-a}{2} \quad \text{und} \quad \frac{v_1+v_2+v_3-b}{2}$$

und die Curve der 9 Punkte hat zur Gleichung

$$\left(\xi - \frac{u_1+u_2+u_3-a}{2}\right)^2 + \varepsilon\left(\eta - \frac{v_1+v_2+v_3-b}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4} \qquad (3)$$

Es soll gezeigt werden, dass diese Curve die gegebene berührt.

Wenn sich 2 ähnliche Curven berühren, muss der Berührungs-

punkt auf der gemeinsamen Centrale liegen. Wir verbinden deswegen M und N und berechnen für jede der beiden Curven die Länge des zugehörigen Radiusvectors. Hat der Schnittpunkt B der Centrale mit der ersten gegebenen Curve die Coordinaten (ξ_4, η_4), so ist der Radiusvector für die erste Curve gleich $\sqrt{\xi_4^2+\eta_4^2}$. Nun ist aber

$$\xi_4^2+\varepsilon\eta_4^2=1 \quad \text{und} \quad \xi_4=\frac{u_1+u_2+u_3-a}{v_1+v_2+v_3-b}\cdot\eta_4$$

Setzen wir diesen Wert ein, so kommt

$$\eta_4^2=\frac{(v_1+v_2+v_3-b)^2}{(u_1+u_2+u_3-a)^2+\varepsilon(v_1+v_2+v_3-b)^2}$$

und es wird

$$\xi_4^2+\eta_4^2=1+(1-\varepsilon)\eta_4^2$$
$$=\frac{(u_1+u_2+u_3-a)^2+(v_1+v_2+v_3-b)^2}{(u_1+u_2+u_3-a)^2+\varepsilon(v_1+v_2+v_3-b)^2}$$

Da die zweite Curve der ersten ähnlich ist, so muss der entsprechende Radiusvector derselben gleich $\frac{r}{2}\sqrt{\xi_4^2+\eta_4^2}$ sein.

Sollen sich nun beide Curven berühren, so muss die Summe oder die Differenz der beiden Radienvectoren gleich der Centrale MN sein, je nachdem der Berührungspunkt auf MN oder auf der Verlängerung von MN liegt. Es muss daher

$$\left(1\pm\frac{r}{2}\right)^2(\xi_4^2+\eta_4^2)=\left(\frac{u_1+u_2+u_3-a}{2}\right)^2+\left(\frac{v_1+v_2+v_3-b}{2}\right)^2$$

oder mit Einsetzung des obigen Wertes

$$(2\pm r)^2=(u_1+u_2+u_3-a)^2+\varepsilon(v_1+v_1+v_3-b)^2 \text{ sein.} \qquad (4)$$

Es kommt darauf an, den Nachweis der Richtigkeit dieser Gleichung zu führen. Dieses kann geschehen, indem wir zeigen, dass der Wert von r, der sich aus dieser Gleichung ergiebt, identisch ist mit demjenigen, der sich allein mit Hülfe der Bedingungsgleichungen für ξ, η, a, b, berechnen lässt. Zunächst gehen wir zu dieser zweiten Berechnung von r über, Aus (1) kommt:

$$-\frac{a(12)}{\xi_1\xi_2}=\frac{v_1-v_2}{2}+\frac{u_2+u_3}{2}\frac{\eta_1}{\xi_1}-\frac{u_3+u_1}{2}\frac{\eta_2}{\xi_2}$$

Ersetzen wir die hierin vorkommenden u und v durch die in § 11.

unter (2) angegebenen Werte, so ergiebt sich nach geeigneter Zusammenfassung und Multiplication mit $\frac{\xi_1 \xi_2}{(12)}$:

$$-a = \frac{1}{2(12)(23)(31)}[-(\eta_2-\eta_1)(23)(31)+\varepsilon\xi_1(31)(1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3 + \varepsilon\xi_2(23)(1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1)]$$

und es wird

$$u_3-a = \frac{1}{2(12)(23)(31)}[(\eta_2-\eta_1)(23)(31)+\varepsilon\xi_1(31)(1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3) + \varepsilon\xi_2(23(1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1)]$$

Ebenso kommt

$$v_3-b = \frac{1}{2(12)(23)(31)}[-\varepsilon(\xi_2-\xi_1)(23)(31)+\varepsilon\eta_1(31)(1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3) + \varepsilon\eta_2(23)(1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1)]$$

Diese Ausdrücke setzen wir in die Gleichung

$$(u_3-a)^2+\varepsilon(v_3-b)^2 = r^2$$

ein und erhalten

$$r^2 = \frac{2}{4(12)^2(23)^2(31)^2}$$

worin nach Vereinigung der entsprechenden Glieder beider Quadrate unter Benutzung der ursprünglichen Bedingungsgleichungen für ξ, η

$$\begin{aligned} w = {} & 2\varepsilon(23)^2(31)^2(1-\xi_1\xi_2-\varepsilon\eta_1\eta_2)+(31)^2(1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3)^2 \\ & +(23)^2(1-\xi_3\xi_1)^2+2\varepsilon(23)(31)^2(12)(1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3) \\ & +2\varepsilon(23)^2(31)(12)(1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1) \\ & +2(31)(23)(1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3)(1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1)(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2) \end{aligned}$$

wird.

Das vierte und fünfte Glied dieses Ausdruckes ergeben durch directe Addition

$$2\varepsilon(12)(23)(31)[(12)+(23)+(31)]$$

Fügt man ferner beim zweiten und dritten das fehlende doppelte Product hinzu, welches dann natürlich beim letzten Gliede subtractiv zu verrechnen ist, so kommt das vollständige Quadrat

$$[(12)+(23)+(31)]^2$$

Vereinigen wir dann noch das erste und das erweiterte letzte Glied, so wird

$$w = 2\varepsilon(12)(23)(31[(12)+(23)+(31)]+[(12)+(23)+(31)]^2$$
$$+2(31)(23)(1-\xi_1\xi_2-\varepsilon\eta_1\eta_2)(\xi_1\xi_3+\varepsilon\eta_1\eta_3+\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3)$$
$$-2(31)(23)[1-(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)^2]$$

Der letzte Teil dieses Ausdrucks ist aber nach § 11. Gleichung (13) gleich

$$-2\varepsilon(12)^2(23)(31)$$

der vorletzte ergiebt durch directe Ausrechnung

$$-2\varepsilon(12)(23)(31)[(23)+(31)]$$

Addiren wir beide Ausdrücke, so kommt demnach

$$-2\varepsilon(12)(23)(31)[(12)+(28)+(31)$$

welcher Ausdruck sich aber gegen das erste Glied forthebt. Es bleibt damit für w nur noch das vollständige Quadrat über, und es wird

$$r = \pm\frac{(12)+(23)+(31)}{2(12)(23)(31)} \tag{5}$$

wo das Zeichen so zu wählen ist, dass r positiv ist.

Noch schwieriger gestaltet sich die Berechnung, wenn wir von der Gleichung (4) ausgehen. Wenn wir berücksichtigen, dass

$$r^2 = (u_3-a)^2+\varepsilon(v_3-b)^2$$

ist, verwandelt sich dieselbe in die Gleichung:

$$4\pm 4r = u_1^2+u_2^2+2u_1u_3+2u_1(u_3-a)+2u_2(u_3-a)$$
$$+\varepsilon v_1^2+\varepsilon v_2^2+2\varepsilon v_1v_2+2\varepsilon v_1(v_3-b)+2\varepsilon v_2(v_3-b) \tag{6}$$

Nun ergiebt sich aber durch Einsetzen der Werte von u, v

$$u_1^2+\varepsilon v_1^2 = \frac{2\varepsilon}{(23)^2}[1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3]$$

$$u_2^2+\varepsilon v_2^2 = \frac{2\varepsilon}{(31)^2}[1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1]$$

$$2u_1u_2+1\varepsilon v_1v_2 = \frac{2\varepsilon}{(23)(31)}[\xi_1\xi_3+\varepsilon\eta_1\eta_3+\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3$$
$$-1-\xi_1\xi_2-\varepsilon\eta_1\eta_2]$$

$$2u_1(u_3-a)+2\varepsilon v_1(v_3-b) = \frac{\varepsilon}{(12)(23)}[\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2+\xi_3\xi_2+\varepsilon\eta_2\eta_3]$$
$$-1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1]-\frac{\varepsilon}{(12)(23)^2}[1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3][(31)+(12)]$$
$$+\frac{\varepsilon}{(12)(31)}[1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1]$$

$$2u_2(u_2-a)+2\varepsilon v_2(v_3-b)=\frac{\varepsilon}{(12)(31)}[\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2+\xi_1\xi_3+\varepsilon\eta_1\eta_3$$

$$-1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3]-\frac{\varepsilon}{(12)(31)^2}[1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1][(12)+(23)]$$

$$+\frac{\varepsilon}{(23)(12)}[1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_3\eta_3]$$

Fassen wir diese Ausdrücke in passender Weise zusammen, so ergiebt sich für die rechte Seite der Gleichung (6; nach Fortlassung des Factors $\frac{\varepsilon}{(12)(23)(31)}$ der Wert:

$$(1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3\left[\frac{(31)}{(23)}[(12)-(31)]-2(12)+23)\right]$$

$$+(1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1)\left[\frac{(23)}{(31)}[(12)-(23)]-2(12)+(31)\right]$$

$$+(1-\xi_1\xi_2-\varepsilon\eta_1\eta_2)[2(12)-(23)-(31)]$$

Um denselben noch weiter zu transformiren, benutzen wir die Gleichungen

$$(12)(1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1)+(31)(1-\xi_1\xi_2-\varepsilon\eta_1\eta_2)=(12)+(23)+(31)$$

$$(23)(1-\xi_1\xi_2-\varepsilon\eta_1\eta_2)+(12)(1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3)=(12)+(23)+(31)$$

$$(31)(4-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3)+(23)(1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1)=(12)+(23)+31)$$

aus welchen

$$1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3=\frac{[(12)+(23)+(31)][(12)-(23)+(31)}{2(31)(12)}$$

$$1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1=\frac{[(12)+(23)+(31)][(23)-(31)+(12)]}{2(12)(23)}$$

$$1-\xi_1\xi_2-\varepsilon\eta_1\eta_2=\frac{[(12)+(23)+(31)]\,[(31)-(12)+(23)]}{2(23)(31)}\text{ wird.}$$

Setzen wir diese Werte oben ein, so reducirt sich der Ausdruck auf

$$\frac{1}{(12)(23)(31)}[-2(12)(23)(31)[(12)+(23)+(31)]+2(12)^2(23)^2$$

$$+2(23)^2(31)^2+2(31)^2(12)^2-(12)^4-(23^4-(31)^4]$$

Nun ist aber nach (14 in § 11.

$$(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)^2+(\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3)^2+(\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1)^2-1$$

$$=2(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)(\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3)(\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1)$$

Ferner findet sich aus (16) desselben Paragraphen

$$\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2=\sqrt{1-\varepsilon(12)^2},\quad \xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3=\sqrt{1-\varepsilon(23)^2}$$

$$\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1=\sqrt{1-\varepsilon(31)^2}$$

und deshalb muss auch

$$2-\varepsilon(12)^2-\varepsilon(23)^2-\varepsilon(31)^2=2\sqrt{(1-\varepsilon(12)^2)(1-\varepsilon(23)^2)(1-\varepsilon(31)^2)}$$

sein, woraus durch Quadriren

$$(12)^4+(23)^4+(31)^4=2(12)^2(23)^2+2(23)^2(31)^2+2(31)^2(12)^2-4\varepsilon(12)^2(23)^2(31)^2$$

sich ergiebt.

Mit Hülfe dieser Relation vereinfacht sich die rechte Seite von (6), indem wir nun auch den weggelassenen Factor $\frac{\varepsilon}{(12)(23)(31)}$ wieder hinzufügen, auf den Ausdruck:

$$\frac{\varepsilon}{(12)^2(23)^2(31)^2}[-2(12)(23)(31)[(12)+(23)+(31)]+4\varepsilon(12)^2(23)^2(31)^2]$$

oder auf

$$-2\varepsilon\frac{(12)+(23)+(31)}{(12)(23)(31)}+4$$

Setzen wir hierin den für r gefundenen Wert aus (5) ein, so ergiebt sich $\mp 4\varepsilon r+4$, und die Gleichung (4) lautet:

$$(2\mp\varepsilon r)^2=(u_1+u_2+u_3-a)^2+\varepsilon(v_1+v_2+v_3-b)^2 \qquad (7)$$

jenachdem der Quotient $\frac{(12)+(23)+(31)}{2(12)(23)(31)}$ positiv oder negativ ist.

Damit ist der Nachweis geführt, dass die Curve der 9 Punkte wirklich die berührende Curve berührt. Gleichzeitig haben wir auch einen Ausdruck für r gefunden, d. h. für das Verhältniss, in welchem die Axen der umbeschriebenen Curve zu denen der berührenden stehen. Nach (9) in § 11. ist dieser Ausdruck dem absoluten Werte nach weiter nichts als der an jener Stelle mit t bezeichnete Factor, mit dem man die Determinanten (12), (23), (31) multipliciren muss, um entsprechende Ausdrücke in u und v zu erhalten. Nun stellen aber diese Determinanten dem absoluten Werte nach die Inhalte der Dreiecke MB_1B_2, MB_2B_3, MB_3B_1, die Ausdrücke in u, v die Inhalte der Dreiecke MQ_1Q_2, MQ_2Q_3, MQ_3Q_1 dar. Daher ist der Wert von r auch gleich dem constanten Verhältniss von

$$MQ_1Q_2 : MB_1B_2 = MQ_2Q_3 : MB_2B_3 = MQ_3Q_1 : MB_3B_1$$

Mit Hülfe von (4) in § 11. kann der Quotient, von dessen Vorzeichen es abhängt, welche der beiden in (7) enthaltenen Gleichungen im gegebenen Falle anzuwenden ist, auch in der folgenden Weise geschrieben werden:

$$\frac{(12)+(23)+(31)}{2(12)(23)(31)} = \frac{u_1v_2-u_2v_1+u_2v_3-u_3v_2+u_3v_1-u_1v_3}{2(u_1v_2-u_2v_1)(u_2v_3-u_3v_2)(u_3v_1-u_1v_3)} \cdot t^2$$

Da t^2 stets positiv ist, hängt das Vorzeichen nur von dem in u, v dem ersten nachgebildeten Ausdruck ab. Der Zähler ist dem absoluten Werte nach gleich dem Inhalte des Dreiecks $Q_1Q_2Q_3$, der Nenner gleich dem doppelten Product der Teildreiecke MQ_1Q_2, MQ_2Q_3, MQ_3Q_1. Welches Vorzeichen der Quotient hat, ist allein von der Lage des Punktes M abhängig, und zwar ist derselbe positiv, wenn M innerhalb des Dreiecks $Q_1Q_2Q_3$ oder innerhalb eines seiner Scheitelwinkel liegt, negativ im ganzen übrigen Raume (sofern von der speciellen Lage auf einer Seite des Dreiecks oder auf der Verlängerung einer solchen abgesehen wird).

Ist nun

$$\varepsilon = +1$$

so liegt nach den Untersuchungen des vorigen Paragraphen ein Winkelpunkt im Dreieck selbst, der zugehörige Quotient ist daher positiv, die andern drei liegen in dem Teile des Raumes, in welchem der Quotient negativ ist.

Im Falle der Ellipse liegt demnach für den innerhalb des Dreiecks liegenden Mittelpunkt der Berührungspunkt B auf der Verlängerung von MN, für die äusseren Punkte auf MN selbst.

Ist

$$\varepsilon = -1$$

so liegt ein Mittelpunkt innerhalb des Dreiecks, ein zweiter innerhalb eines Scheitelwinkels, für beide ist also der Quotient positiv, die beiden andern aber liegen in dem Raume, in welchem derselbe negativ ist.

Im Falle der Hyperbel liegt demnach B auf MN selbst, wenn M innerhalb des Dreiecks oder in einem Scheitelwinkel, dagegen auf der Verlängerung von MN, wenn M in dem übrigen Raume sich befindet.

III.

§ 17.

Beziehungen zwischen Kreis und beliebigem Kegelschnitt.

Wir haben in § 3. bemerkt, dass das Product aus den Abschnitten der Secanten, welches beim Kreise für alle durch denselben Punkt gehenden Secanten constant ist, bei der Ellipse nur in dem Falle denselben Wert annimmt, dass die Secanten gleiche Neigung zur Axe haben und ihre Winkelhalbirenden parallel den Hauptaxen der Ellipse sind. Der Grund lag darin, dass nur für solche Geraden das Verhältniss zum Bilde dasselbe war. Wir wollen untersuchen, ob sich dieser Satz auch auf die Hyperbel übertragen lässt.

Die Gleichung des Abbildes sei

$$\xi^2 + \varepsilon\eta^2 = 1$$

Wir nehmen einen Punkt (ξ_1, η_1) beliebig an, legen durch denselben eine Secante und suchen das Product der Abschnitte zu berechnen. Es ist für jeden andern Punkt der Secante

$$\xi = \xi_1 + s\cos\vartheta, \quad \eta = \eta_1 + s\sin\vartheta$$

worin s die positive oder negative Entfernung von (ξ_1, η_1) und ϑ den Winkel bedeutet, den die Secante mit der positiven $x$axe bildet.

Für die Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt müssen diese Werte der Gleichung

$$\xi^2 + \varepsilon\eta^2 = 1$$

genügen, woraus

$$s^2 + 2s\frac{\xi_1\cos\vartheta + \varepsilon\eta_1\sin\vartheta}{\cot^2\vartheta + \varepsilon\sin^2\vartheta} + \frac{\xi_1^2 + \varepsilon\eta_1^2 - 1}{\cos^2\vartheta + \varepsilon\sin^2\vartheta} = 0$$

sich ergiebt. Das Product der beiden Wurzelwerte von s ist also gleich $\frac{\xi_1^2 + \varepsilon\eta_1^2 - 1}{\cos^2\vartheta + \varepsilon\sin^2\vartheta}$. Im Falle des Kreises ist dasselbe constant gleich $\xi_1^2 + \eta_1^2 - 1$; im Falle der gleichseitigen Hyperbel ändert es sich jedoch mit ϑ und ist nur für solche Werte von ϑ gleich für welche die Differenz $\cos^2\vartheta - \sin^4\vartheta$ denselben Wert hat. Dieses ist aber der Fall, wenn die Secanten gleiche Neigung zur Axe haben, also gerade dann, wenn auch die Verhältnisszahlen denselben Wert besitzen und der Satz von der Gleichheit der Producte sich auf die beliebige Hyperbel übertragen lässt. Damit ist der Satz bewiesen: Für jeden Kegelschnitt sind die Producte aus den Abschnitten zweier Secanten gleich, wenn diese gleiche Neigung zur Axe haben.

Beim Kreise kann jede Richtung als Richtung der Hauptaxe genommen werden, darum müssen bei demselben die Producte für alle durch denselben Punkt gehenden Secanten gleich sein. Ferner ergiebt sich sogleich der Satz: Zieht man eine Tangente und eine Secante gleicher Neigung, so ist das Quadrat über der Tangente gleich dem Product aus den Abschnitten der Secante.

Ebenso müssen die Umkehrungen richtig sein: Sind für zwei Secanten eines Kegelschnitts die Producte ihrer Abschnitte gleich, so haben dieselben gleiche Neigung zur Axe, und ihre Winkelhalbirenden sind den Axen des Kegelschnitts parallel.

Ist das Quadrat über der Tangente gleich dem Product aus den Abschnitten der Secante, so haben die Tangente und Secante gleiche Neigung zur Axe. Im ersten Falle liegen die 4 Schnittpunkte auf einem Kreise, im letzten Falle berührt der durch den Berührungspunkt und die beiden Schnittpunkte der Secante construirte Kreis die Tangente und den Kegelschnitt.

Diese Sätze ermöglichen es, zu 3 beliebig gegebenen Punkten eines Kegelschnitts allein mit Hülfe der Richtung der Axen denjenigen vierten Punkt zu finden, in welchem der durch die 3 Punkte gelegte Kreis den Kegelschnitt trifft. Man construire den Kreis, verbinde zwei der Punkte mit einander und ziehe durch den dritten die Secante gleicher Neigung, welche den Kreis in dem gesuchten Schnittpunkte trifft. Man kann denselben auch ohne Benutzung des Kreises finden, indem man zwei Mal zwei Punkte verbindet und zu jeder Verbindungslinie durch den dritten Punkt die Secante gleicher Neigung zeichnet; der Schnittpunkt der beiden Secanten ist ebenfalls der gesuchte Punkt.

Es besteht demnach zwischen den Schnittpunkten eines Kreises mit einem Kegelschnitt und der Richtung der Axen eine derartige Beziehung, dass man immer zu 3 Schnittpunkten mit Hülfe der Axenrichtung den vierten finden kann.

Auch im Falle der Berührung lässt sich, wenn die Tangente nebst Berührungspunkt und der eine Schnittpunkt gegeben ist, mit Leichtigkeit den andern Schnittpunkt finden.

Entweder construire man den Kreis, welcher die Tangente in dem gegebenen Punkte berührt und durch den Schnittpunkt geht, und zeichne durch den Schnittpunkt eine Gerade gleicher Neigung mit der Tangente, welche den Kreis im gesuchten Punkte trifft — Oder man ziehe durch den Schnittpunkt zur Tangente und durch den Berührungspunkt zur Verbindungslinie mit dem Schnittpunkte

die Geraden gleicher Neigung, welche sich ebenfalls im verlangten Punkte schneiden.

Es ist daher, wenn ein Kreis einen Kegelschnitt durchschneidet, mit der Richtung der Verbindungslinie zweier Schnittpunkte die Richtung der Verbindungslinie der beiden andern gegeben; beide müssen dieselbe Neigung zur Axe haben. Daher muss für alle Kreise, welche dieselben beiden Schnittpunkte mit einem Kegelschnitt gemeinsam haben, die Richtung der Verbindungslinie der beiden andern Schnittpunkte dieselbe sein. Dieser Satz lässt sich auch in folgender Weise umkehren: Haben 2 Kreise einen Punkt mit einem Kegelschnitt gemeinsam und läuft die Verbindungslinie zweier andern Schnittpunkte des ersten Kreises parallel der Verbindungslinie zweier andern Schnittpunkte des zweiten Kreises, so liegt auch der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise auf dem Kegelschnitt, und es hat die Verbindungslinie der beiden gemeinsamen Schnittpunkte dieselbe Neigung zur Axe wie die beiden Parallelen.

In dieser Form wird der Satz im nächsten Paragraphen wiederholte Anwendung finden.

Es muss auch für alle Kreise, welche einen Kegelschnitt in demselben Punkte berühren, die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte gleiche Richtung haben.

Lässt man den Radius der Kreise sich stetig ändern, so rücken die beiden Schnittpunkte auf dem Kegelschnitt weiter, und es verschiebt sich ihre Verbindungslinie parallel mit sich selbst. Dabei kann man es immer so einrichten, dass sich der eine der beiden Schnittpunkte dem Berührungspunkte nähert und schliesslich mit ihm zusammenfällt. Man gelangt dann zum Krümmungskreis, welcher im Berührungspunkte 3 Schnittpunkte vereinigt und ausserdem nur noch einen Punkt mit der Curve gemeinsam hat. Der Mittelpunkt desselben lässt sich also in einfacher Weise finden. Man zeichne die Tangente und errichte das Lot; dann ziehe man durch den Berührungspunkt die Sehne gleicher Neigung mit der Tangente und errichte das Mittellot. Der Schnittpunkt beider Lote ist der Mittelpunkt des Kreises.

Es ist auch der Fall möglich, dass beide Schnittpunkte gleichzeitig mit dem Berührungspunkt zusammenfallen, wobei man zu einem Kreise gelangt, der in seinem Berührungspunkt 4 Schnittpunkte vereinigt und sonst keinen Punkt mit dem Kegelschnitt gemeinsam hat. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Tangente parallel läuft, also die Tangente

parallel ist der Axe, d. h. wenn der Berührungspunkt der Scheitelpunkt der Curve ist.

Noch eine weitere Folge von Sätzen kann hier angeführt werden, deren Richtigkeit aus den bisherigen Resultaten unmittelbar sich ergiebt:

Sämtliche Kegelschnitte, welche durch 4 auf einem Kreise liegende Punkte gezeichnet werden können, müssen dieselbe Richtung der Axen haben. Man bekommt diese, indem man den Winkel zweier Gegenseiten in dem von den 4 Punkten gebildeten Viereck halbirt.

Sämtliche Kegelschnitte, welche durch 3 beliebige Punkte gehen und dieselbe Richtung der Axen besitzen, gehen auch noch durch ein und denselben vierten Punkt. Dieser liegt mit den drei ersten auf der Peripherie eines Kreises und wird gefunden, indem man durch einen der Punkte zur Verbindungslinie der beiden andern die Sehnen gleicher Neigung zeichnet.

Sämtliche Kegelschnitte, welche durch 4 Punkte gezeichnet werden können, die nicht auf einem Kreise liegen, müssen darum verschiedene Richtung der Axen besitzen.

Alle Kegelschnitte, welche durch dieselben 3 Punkte gehen und in dem einen derselben den Kreis berühren, welcher durch die 3 Punkte construirt werden kann, haben dieselbe Richtung der Axen. Die Axen laufen parallel den Halbirungslinien der von der Tangente und der Verbindungslinie der beiden Punkte gebildeten Winkel oder auch parallel den Halbirungslinien der Winkel, welche von den Verbindungslinien des Berührungspunktes mit den beiden andern Punkten gebildet werden.

Sämtliche Kegelschnitte derselben Axenrichtung, welche dieselbe Gerade in demselben Punkte berühren und ausserdem einen Punkt gemeinsam haben, gehen noch durch einen dritten Punkt, dessen Lage leicht bestimmt werden kann.

Sämtliche Kegelschnitte derselben Axenrichtung, welche durch 3 Punkte gehen, die so gelegen sind, dass die Verbindungslinien des einen mit den beiden andern gleiche Richtung zur Axe haben, berühren sich in diesem Punkte mit dem Kreise, welcher durch die drei Punkte construirt werden kann.

Für alle Kegelschnitte derselben Axenrichtung, welche durch 2 feste Punkte gehen und dieselbe Gerade im festen Punkte berühren,

ist der Berührungspunkt und die Richtung der Axen bestimmt. Man findet den Berührungspunkt, indem man den Kreis zeichnet, welcher die Gerade berührt und durch die beiden Punkte geht. Die Axenrichtung halbirt den Winkel zwischen der Geraden und der Verbindungslinie der beiden Punkte.

Allerdings lassen sich auch unendlich viele Curven zeichnen, welche durch die beiden Punkte und die Gerade in einem andern Punkte berühren. Diese haben aber sämtlich verschiedene Richtung der Axen, während sie in dem einen Falle, in welchem der Berührungspunkt die angegebene bestimmte Lage hat, alle von derselben Axenrichtung sein müssen.

§ 18.

Constructionsaufgaben.

Die bisherigen Angaben reichen hin zur Lösung einer ganzen Reihe von Aufgaben, in denen es sich darum handelt, zur Axenrichtung eines durch Punkte und berührende Geraden oder Kreise bestimmten Kegelschnitts den Mittelpunkt oder umgekehrt zum Mittelpunkt die Richtung der Axen zu finden.

Aufgabe 1: Gegeben sind die Punkte A, B, C, D_1, welche nicht auf einem Kreise liegen. Es soll zu einer gegebenen Axenrichtung der Mittelpunkte des Kegelschnitts gefunden werden, welcher durch diese 4 Punkte hindurchgeht.

Lösung: Man construire den Kreis, welcher durch A, B, C geht und zeichne die Sehne CE, welche mit AB gleiche Neigung zur Axe hat. Dann liegt E auf dem Kegelschnitt. Hierauf lege man durch A, B, D einen Kreis und suche wiederum zu AB die Sehne gleicher Neigung DF. Dann liegt auch F auf dem Kegelschnitt, es ist CE par. DF, und die Verbindungslinie der Mittelpunkte geht durch den Mittelpunkt der Curve. Drittens zeichne man einen Kreis durch C, D, F, lege durch C die Sehne gleicher Neigung mit DF, deren Endpunkte $4i$ abermals auf dem Kegelschnitt liegen muss. Dann ist CG par. BA, und die Verbindungslinie der Mittelpunkte liefert einen zweiten geometrischen Ort für 0.

Liegen die gegebenen 4 Punkte auf einem Kreise, so fallen die 3 zur Construction verwendeten Kreise mit diesem zusammen und die Verbindungslinie der Mitten paralleler Sehnen schneiden sich stets in demselben Punkte, welches auch die Richtung der Axen sein

mag. Man erhält also zu einer beliebig angenommenen Richtung der Axen stets dieselbe Curve, nämlich den durch die 4 Punkte hindurchgehenden Kreis. Wenn aber die Axenrichtung parallel läuft der Halbirungslinie des Winkels, welcher von zwei gegenüberliegenden Seiten des Vierecks $ABCD$ oder von den Diagonalen gebildet wird, so geht jede Curve, welche durch drei der Punkte hindurchgeht, von selbst auch durch den vierten. Man kann in diesem Falle noch einen fünften Punkt der Curve annehmen, der nur nicht mit den vier ersten auf demselben Kreise liegen darf.

Aufgabe 2: Gegeben 4 Punkte A, B, C, D, welche auf einem Kreise liegen. Es soll der Mittelpunkt des Kegelschnitts gefunden werden, der durch diese 4 Punkte und ausserdem durch einen fünften Punkt E hindurchgeht, welcher ausserhalb der Peripherie des Kreises liegt.

Lösung: Man zeichne den Kreis durch A, B, E und ziehe EF parallel DC. Ebenso zeichne man den Kreis durch C, D, E und ziehe EG parallel AB. Der Mittelpunkt O liegt auf der Verbindungslinie der Mitten von CD und EF und auf der Verbindungslinie der Mitten von AB und EG. Die Axen des Kegelschnitts sind parallel den Halbirungslinien der Winkel, welche von je 2 gegenüberliegenden Seiten des Vierecks $ABCD$ oder von den Diagonalen desselben gebildet werden.

Wir kommen jetzt zu der Aufgabe, von welcher in § 9. die Rede war, und deren Lösung wir dort in analytischer Weise versucht haben.

Aufgabe 3: Gegeben A, B, C und O. Man soll die Axenrichtung des Kegelschnitts bestimmen, welcher O als Mittelpunkt hat und durch A, B, C hindurchgeht.

Lösung: Man verbinde O mit der Mitte von BC, verlängere diese Linie, bis sie die durch A zu BC gezogene Parallele in D trifft, und verlängere AD um sich selbst bis E. Dann ist E der Endpunkt der durch A zu BC parallel gezogenen Sehne.

In gleicher Weise zeichne man sich den Endpunkt F der durch C zu AB parallelen Sehne. Hierauf construire man durch A, B, C und C, F, E Kreise, die sich in G schneiden. Dann ist G ebenfalls ein Punkt der Curve und die Halbirungslinie der zu EG und AB oder von EO und CF gebildeten Winkel liefern die Richtung der Hauptaxen des Kegelschnitts.

Aufgabe 4: Gegeben die Gerade E, auf derselben der Punkt

A, ausserhalb die Punkte B und C. Es wird der Mittelpunkt 0 des Kegelschnitts gesucht, der eine bestimmte Axenrichtung hat, L in A berührt und durch B und C geht.

Lösung: Man zeichne den Kreis, welcher L in A berührt und durch A geht, und suche den Schnittpunkt D dieses Kreises mit dem Kegelschnitt. Ebenso construire man den Kreis, welcher L in A berührt und durch C geht und suche den Schnittpunkt E mit der Curve. Dann ist BD par. CE und die Verbindungslinie der Mittelpunkte geht durch 0. Nun zeichne man den Kreis durch C, B, D und ziehe CF parallel der Tangente L. Es liegt dann auch F auf der Curve und die Verbindungslinie von A mit der Mitte von CF geht ebenialls durch 0.

Ist L die Tangente an den durch A, B, C gehenden Kreis, und weicht die Richtung der Axen ab von der Richtung der Halbirungslinie des von L und BC oder von AB und AC gebildeten Winkels, so fallen sämtliche Kreise der Construction in einen zusammen und wir erhalten als einzige Curve den umbeschriebenen Kreis der Punkte selbst.

Stimmt jedoch die Axenrichtung mit der Richtung der genannten Halbirungslinien überein, so wird jede Curve, welche L in A berührt und durch den einen der beiden Punkte geht, von selbst auch durch den andern gehen. Man kann daher in diesem Falle noch einen vierten Punkt der Curve annehmen, der nur nicht auf dem Kreise durch die drei andern liegen darf. Hierauf bezieht sich die nächste Aufgabe.

Aufgabe 5: Gegeben L. A auf L, ausserhalb B, C. L berührt den Kreis durch A, B, C.

Man soll den Mittelpunkt des Kegelschnitts finden, welcher L in A berührt, durch B, C und ausserdem noch durch einen vierten Punkt D hindurchgeht, der mit A, B, C nicht auf demselben Kreise liegt.

Lösung: Man zeichne den Kreis durch D, welcher L in A berührt, und ziehe DE parall. BC. Dann liegt 0 auf der Verbindungslinie der Mitten von BC und DE. Ferner construire man den Kreis durch D, B, C und ziehe DF parallel zu L. Dann liegt 0 zweitens auf der Verbindungslinie von A mit der Mitte der Sehne DF. Die Axenrichtung halbirt den von L und BC gebildeten Winkel.

Aufgabe 6: Gegeben L, A auf L, ausserhalb B, ferner 0. Es soll die Axenrichtung des Kegelschnitts gefunden werden, der 0 als Mittelpunkt hat, durch B geht und L in A berührt.

Lösung: Man suche den Endpunkt C der durch B zu L parallel gezogenen Sehne. Dann verlängere man AO um sich selbst bis D, beschreibe den Kreis durch B, C, D und den Kreis, welcher L in A berührt und durch D geht. Beide treffen sich in dem Punkte E der Curve. Die Axen sind dann parallel den Halbirungslinien der von DE und L oder BC gebildeten Winkel.

Aufgabe 7: Gegeben L mit A, L' mit B. Es wird der Mittelpunkt eines Kegelschnitts von bestimmterRichtung der Axen gesucht, welcher L in A und L' in B berührt.

Lösung: Man beschreibe durch B den Kreis, welcher L in A berührt, und bestimme den zweiten Schnittpunkt C dieses Kreises mit der Curve. Ebenso zeichne man durch A den Kreis, welcher L' in B berührt und suche den zweiten Schnittpunkt D dieses Kreises mit dem Kegelschnitt. Dann construire man einen Kreis durch A, D, C, ziehe CE parall. L' und verbinde die Mitte von CE mit B. Endlich zeichne man einen Kreis durch B, C, D, ziehe DF parall. E und verbinde die Mitte dieser Sehnen mit A. Die beiden Verbindungslinien treffen sich dann in O.

Wenn A und B vom Schnittpunkte von L und L' gleichweit entfernt liegen, so fallen alle bei der Construction vorkommenden Kreise in einen zusammen und man erhält für gewöhnlich als einzige Lösung den Kreis, welcher L in A und L' in B berührt. Wenn jedoch in diesem Falle die angenommene Richtung der Axen parallel ist der Halbirungslinie des von L und L' gebildeten Winkels, so kann noch ein dritter Punkt der Curve angenommen werden, der nur nicht auf dem Kreise liegen darf, welcher L in A und L' in B berührt.

Aufgabe 8: Gegeben L mit A, L' mit B. A und B sind gleichweit vom Schnittpunkte der Geraden L und L' entfernt. Es soll der Mittelpunkt O eines Kegelschnitts gefunden werden, der in L in A, L' in B berührt und ausserdem noch durch einen Punkt C geht, der nicht auf dem Kreise liegt, der L in A und L' in B berührt.

Lösung: Man zeichne durch C den Kreis, welcher L in A berührt, ziehe CD parall. L' und verbinde die Mitte von CD mit B. Ebenso construire man den Kreis, welcher durch C geht und L' in B berührt, lege CE parall. L und verbinde A mit der Mitte von CE. Beide Verbindungslinien treffen sich in O. Die eine Axe halbirt den Winkel zwischen L und L', die andere ist parallel AB.

Aufgabe 9: Gegeben L mit A, L' und O. Man soll die Axen-

schieben wir das Coordinatensystem bis zum Punkte (ξ_1, η_1) und nennen die Coordinaten in Bezug auf das neue System ξ', η', so heisst die Gleichung:

$$\frac{1}{u^2}(a\xi' \cos\vartheta + b\eta' \sin\vartheta)^2 + \frac{\varepsilon}{v^2}(-v\xi' \sin\vartheta + b\eta' \cos\vartheta)^2 = 1$$

Dieselbe Gleichung würden wir aber auch erhalten haben, wenn wir um den ursprünglichen Anfangspunkt eine der gegebenen congruente Curve mit derselben Richtung der Axen construirt und diese abgebildet hätten. Man kann daher das Bild einer Curve auch in der Weise bekommen, dass man um den Anfangspunkt eine congruente Curve mit gleicher Axenrichtung zeichnet, diese abbildet und das Bild parallel mit sich selbst verschiebt, bis der Mittelpunkt mit dem Bilde des Mittelpunktes der Curve zusammenfällt. Daraus geht hervor, dass das Bild einer Curve der Gestalt nach nur abhängig ist von den Dimensionen derselben und von der Richtung der Axen, aber unabhängig ist von der Lage des Mittelpunktes. Ferner ergiebt sich, dass ähnliche Curven bei der Abbildung wieder ähnliche Curven liefern.

Es handelt sich nun hauptsächlich darum, die Lage der Axen beim Abbild zu bestimmen. Dieselben entstehen aus demjenigen Paar von conjugirten Durchmessern der Curve, welches bei der Abbildung senkrechte Geraden liefert. Nun werden aber aus sämtlichen conjugirten Durchmessern der Abbildungsellipse senkrechte Geraden.

Wir müssen also diejenigen conjugirten Richtungen der Ellipse aufsuchen, welche auch in Bezug auf die abzubildende Curve conjugirt sind. Zu dem Ende construiren wir um den Anfangspunkt eine der gegebenen ähnliche Curve mit gleicher Richtung der Axen, welche die Abbildungsellipse berührt. Die Richtung zu den Berührungspunkten und die hierzu conjugirte Richtung der gemeinsamen Tangente geben dann die Richtungen der beiden Durchmesser an, welche bei der Abbildung Hauptaxen des Kegelschnitts werden.

Ist die abzubildende Curve eine Ellipse, so kann man diese Durchmesser auch ohne Hülfe der Tangente finden. In diesem Falle lassen sich nämlich 2 ähnliche Curven zeichnen, welche die Abbildungsellipse berühren. Die Berührungspunkte derselben sind dann die Endpunkte der gemeinsamen conjugirten Durchmesser. Ist die abzubildende Curve dagegen eine Hyperbel, so giebt es nur eine berührende ähnliche Curve; man erhält also auch direct nur die Endpunkte des einen Durchmessers, den andern Durchmesser be-

kommt man dann, indem man durch den Mittelpunkt eine Parallele zur Tangente zieht.

Daraus geht hervor, dass die Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser dieselbe bleibt für alle Curven, welche den Curven ähnlich sind, die sich um den Mittelpunkt der Abbildungsellipse construiren lassen und diese in den Endpunkten desselben oder in den Endpunkten des conjugirten Durchmessers berühren. Soweit diese Curven Ellipsen sind, lässt sich zu jeder, die in den Endpunkten des einen berührt, eine ähnliche zeichnen, welche in denen des andern berührt; wir erschöpfen also alle möglichen Formen der Ellipse, wenn wir uns auf diejenigen beschränken, welche in den Endpunkten des einen allein berühren. Anders liegt die Sache bei den Hyperbeln. Die Hyperbeln, welche in den Endpunken des einen berühren, sind nicht denjenigen ähnlich, welche in denen des andern berühren, sondern stehen zu ihnen im Verhältniss von Hyperbeln zu ihren conjugirten Hyperbeln. Deswegen müssen hier Endpunkte beider Durchmesser berücksichtigt werden.

Die Aufgabe, die Curven zu zeichnen, welche dieselbe Richtung der gemeinsamen conjugirten Axen haben, läuft hiernach auf die im vorigen Paragraphen behandelte Aufgabe hinaus, um einen festen Mittelpunkt die Curven zu construiren, welche eine Gerade in einem bestimmten Punkte berühren. Es giebt deren unendlich viele, und zwar kann noch ein zweiter Punkt beliebig angenommen werden und jedesmal bestimmt werden, dass die Curve durch denselben hindurchgehen soll. Zu jedem Paar von conjugirten Durchmessern der Abbildungsellipse gehören demnach unendlich viele Curven, für welche dasselbe die Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser darstellt, eine Schar von Ellipsen und 2 Scharen von Hyperbeln, von welchen die einen in den Endpunkten des einen Durchmessers, die andern in denen des andern berühren.

Es ist klar, dass, wenn man irgend eine aus der Reihe dieser Ellipsen herausnimmt und um ihren Mittelpunkt zu sämtlichen übrigen ähnliche berührende Curven zeichnet, die Hyperbeln der einen Schar in denselben Endpunkten eines Durchmessers, die Hyperbeln der andern Schar in denselben Endpunkten des conjugirten Durchmessers berühren, während zu jeder Ellipse 2 berührende Ellipsen möglich sind, von welchen die eine in den einen, die andere in den andern Endpunkten berührt. Greift man eine Hyperbel heraus und beschreibt wieder ähnliche berührende Curven, so wird dieselbe von den Hyperbeln derselben Schar in denselben Punkten berührt, ebenso von sämtlichen Ellipsen; doch lässt sich keine einer Curve der

dern Schar ähnliche Hyperbel zeichnen, welche die angenommene Hyperbel berührt.

Gehen wir nun zur Anwendung über. Wir betrachten einen beliebigen Kegelschnitt und schneiden denselben durch eine Ellipse. Die Abbildung liefert dann wieder einen Kegelschnitt geschnitten von einem Kreise. Wir haben aber gefunden, dass, wenn ein Kegelschnitt von einem Kreise geschnitten wird, die gegenüberliegenden Seiten des von den Schnittpunkten gebildeten Vierecks wie auch die Diagonalen desselben mit den Axen des Kegelschnitts gleiche Winkel bilden, wofür hier besser der Ausdruck zu wählen ist, dass die Tangenten parallel den Gegenseiten oder den Diagonalen sich auf der Verlängerung der Hauptaxen treffen. Damit gewinnen wir den Satz: Wird ein Kegelschnitt von einer Ellipse geschnitten, so treffen sich bei jeder der beiden Curven die Tangenten parallel zu den Gegenseiten oder den Diagonalen des von den Schnittpunkten gebildeten Vierecks in Punkten, welche auf den durch den Mittelpunkt der Curve zur Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser parallel gezogenen Geraden liegen. Dabei ist zu bemerken, dass im Falle der Hyperbel entweder alle 4 Schnittpunkte auf demselben Zweige oder auf jedem Zweige 2 derselben liegen müssen; im letzteren Falle können natürlich nur Tangenten parallel den Seiten des Vierecks gezogen werden, welche Punkte desselben Zweiges verbinden.

Da ferner für ähnliche Curven derselben Axenrichtung die Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser dieselbe bleibt, so muss für alle ähnlichen Ellipsen derselben Axenrichtung, welche dieselben beiden Punkte mit einem Kegelschnitt gemeinsam haben, die Verbindungslinie der beiden andern Schnittpunkte unter sich parallel sein.

Diese Sätze bleiben natürlich auch richtig, wenn zwei Schnittpunkte zusammenfallen, und die Ellipse den Kegelschnitt berührt.

Wird ein Kegelschnitt von einer Ellipse berührt, so schneidet sich bei jeder der beiden Curven die gemeinsame Tangente mit der zur Verbindungslinie parallel gezogenen Tangente in einem Punkte der gemeinsamen conjugirten Durchmesser. Ist der betrachtete Kegelschnitt selbt eine Ellipse oder liegen im Falle der Hyperbel die beiden andern Schnittpunkte mit dem Berührungspunkt auf demselben Zweige, so gilt dasselbe auch für die Tangenten, welche parallel zu den Verbindungslinien des Berührungspunktes mit den beiden andern Schnittpunkten gezogen werden können.

Aendert man die Dimensionen der berührenden ähnlichen Ellipsen stetig, so rückt die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte parallel mit sich selbst weiter. Fällt bei dieser Bewegung der eine der beiden Schnittpunkte auf den Berührungspunkt, so erhalten wir diejenige Ellipse, welche mit dem Kegelschnitt eine Berührung zweiter Ordnung hat. Es kann auch der Fall eintreten, dass beide Schnittpunkte mit dem Berührungspunkt zusammenfallen, und die berührende Ellipse vier Schnittpunkte in ihrem Berührungspunkt vereinigt, wenn nämlich der Berührungspunkt Endpunkt eines gemeinsamen conjugirten Durchmessers ist, und die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte der Tangente parallel läuft. Alle diese Fälle können natürlich nur dann eintreten, wenn die gegebene Curve selbst eine Ellipse ist, oder wenn im Falle der Hyperbel die beiden Schnittpunkte mit dem Berührungspunkt auf demselben Zweige liegen.

Kehren wir noch einmal zu dem Falle zurück, dass die Ellipsen den Kegelschnitt in 4 Punkten durchschneiden. Wir fanden, dass für alle der Abbildungsellipse ähnliche Ellipsen, welche dieselben beiden Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt gemeinsam haben, die Verbindungslinien der andern beiden Schnittpunkte parallel sein müssen. Der Grund dafür lag in dem Umstande, dass die Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser sich für ähnliche Curven nicht ändert. Dieselbe bleibt aber nicht nur gleich für alle unter sich ähnlichen Ellipsen, sondern überhaupt für alle Ellipsen, die denjenigen ähnlich sind, welche sich in dem Mittelpunkt der Abbildungsellipse beschreiben lassen und diese im selben Punkte berühren. Für alle diese muss also auch die Verbindungslinie der beiden andern Schnittpunkte parallel sein und dieselbe Richtung haben wie für die Abbildungsellipse selbst. Construirt man dann zu jeder einzelnen dieser verschiedenartig gestalteten Ellipsen wieder ähnliche, so rückt bei stetiger Aenderung der Dimensionen die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte parallel mit sich selbst fort und man kann die Dimensionen stets so wählen, dass die Verbindungslinie durch dieselben Schnittpunkte hindurchgeht wie bei der Abbildungsellipse selbst. Daraus folgt aber, dass es unendlich viele Ellipsen geben muss, welche durch dieselben auf einer Ellipse liegenden 4 Punkte gehen und dass dieselben sämtlich gleiche Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser besitzen. Wir kommen so ganz von selbst auf die Frage nach den Kegelschnitten, die sich durch beliebig gegebene Punkte legen lassen, auf die wir später noch genauer eingehen wollen.

Für den Fall der Berührung lauten unsere Resultate: Sämtliche Ellipsen, welche eine gegebene Ellipse in demselben Punkte berühren

und ausserdem noch 2 feste Punkte mit denselben gemeinsam haben, besitzen gleiche Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser.

Es giebt unendlich viele Ellipsen, welche sich mit einer gegebenen Ellipse in demselben Punkt doppelt berühren und ausserem noch einen Punkt mit denselben gemeinsam haben. Diese haben sämtlich gleiche Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser.

Sämtliche Ellipsen, welche eine gegebene Ellipse in einem Punkte so berühren, dass der Berührungspunkt 4 Schnittpunkte in sich vereinigt, haben dieselbe Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser und zwar giebt der Durchmesser zum Berührungspunkt und der conjugirte die Richtung derselben an.

§ 20.

Beziehungen zwischen beliebigen Kegelschnitten. Von den Kegelschnitten durch 4 beliebige Punkte. Geometrischer Ort der Mittelpunkte.

Bis jetzt haben wir den betrachteten Kegelschnitt nur in Beziehung gebracht zu den Ellipsen von gleicher Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser. Es fragt sich, ob unsere Sätze auch gelten, wenn wir denselben mit den zum selben System gehörigen Hyperbeln durchschneiden. Ist der angenommene Kegelschnitt selbst eine Ellipse, so bedarf es keiner weiteren Auseinandersetzung, dass der Satz von den Tangenten parallel zu den gegenüberliegenden Seiten des von den Schnittpunkten gebildeten Vierecks und damit auch alle übrigen Sätze ihre Richtigkeit behalten. Wir haben also nur den Fall zu betrachten, dass wir es nur mit Hyperbeln zu tun haben.

Wir denken uns also eine Hyperbel und schneiden dieselbe durch eine zweite, welche mit der ersten und der Abbildungsellipse gleiche Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser besitzt. Wir erhalten dann als Abbild zwei sich schneidende Hyperbeln derselben Axenrichtung. Wir haben aber früher gefunden, dass alle Kegelschnitte durch 4 Punkte auf der Peripherie eines Kreises gleiche Richtung der Axen haben, und dass umgekehrt 2 Kegelschnitte von gleicher Axenrichtung sich nur im Punkte auf der Peripherie eines Kreises schneiden können. Es müssen daher in unserm Falle die Schnittpunkte beim Abbilde auf einem Kreise, bei den ursprünglichen Hygerbeln selbst auf einer der Abbildungsellipse ähnlichen

Ellipse liegen. Nun konnte aber jede der Ellipsen von gleicher Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser als Abbildungscurve benutzt werden, es muss also auch möglich sein durch die 4 Schnittpunkte der Hyperbeln zu jeder derselben eine ähnliche zu zu schneiden. Schneiden sich demnach 2 Hyperbeln, die zum selben System von Curven gleicher Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser gehören, so lassen sich durch die Schnittpunkte unendlich viele Ellipsen legen, welche zum gleichen System gehören und alle über das Schneiden und Berühren der Curven ausgesprochenen Sätze behalten ihre Gültigkeit. Es fragt sich, woran man es erkennen kann, ob 2 beliebige Hyperbeln als zum selben System gehörig betrachtet werden können oder nicht? Lässt sich um den Mittelpunkt der einen eine zur andern ähnliche construiren, welche die erste berührt, so ist es klar, dass beide zum selben System und sogar zur selben Schar gehören, und der Durchmesser zum Berührungspunkt und die gemeinsame Tangente geben die Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser an. Lässt sich diese Construction nicht ausführen, so versuche man um den Mittelpunkt der ersten Hyperbel eine Hyperbel zu zeichnen, welche der conjugirten zur zweiten ähnlich ist und die erste berührt. Ist dies möglich, so gehören die beiden Hyperbeln wiederum demselben System, aber verschiedenen Scharen an und der Durchmesser zum Berührungspunkt und die Tangente geben wieder die Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser an. Ist weder die eine noch die andere Construction ausführbar, so gehören die beiden Hyperbeln nicht demselben System an. Die Schnittpunkte liegen dann so, dass es überhaupt unmöglich ist eine Ellipse durch dieselben zu legen.

Wir kommen damit wieder zu der Frage nach den Kegelschnitten, welche sich durch 4 beliebige Punkte legen lassen.

Wir nehmen zunächst an, die 4 Punkte hätten eine solche Lage zu einander, dass es möglich sei Ellipsen durch dieselben zu legen. Wie man sich leicht überzeugt, tritt dieser Fall ein, wenn dieselben sich zu einem Viereck mit lauter concaven Winkeln verbinden lassen. Es ist dies die Lage, welche wir bei der Untersuchung der Mittelpunkte der berührenden Curven eines Dreiecks als die zweite bezeichnet haben, die dann immer eintrittt, wenn die berührenden Curven Hyperbeln sind, und der Mittelpunkt der umbeschriebenen Curve innerhalb der Scheitelwinkel des Dreiecks liegt.

Bilden wir nun sämtliche durch die 4 Punkte gehenden Kegelschnitte mit Hülfe einer der Ellipsen ab, so bekommen wir als Abbild 4 auf der Peripherie eines Kreises liegende Punkte und sämtliche durch dieselben gehenden Kegelschnitte.

Diese müssen dann aber gleiche Richtung der Axen haben, woraus für die ursprünglichen Curven der Satz folgt: Alle Kegelschnitte, welche durch 4 auf einer Ellipse liegende Punkte, oder welche durch die Ecken eines Vierecks mit concaven Winkeln gezeichnet werden können, haben dieselbe Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser.

Ferner für den Fall der Berührung: Alle Kegelschnitte, welche durch 3 beliebige Punkte gezeichnet werden können und in denen einer derselben eine durch die 3 Punkte gelegte Ellipse berührt, haben dieselbe Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser. Desgleichen alle Kegelschnitte, welche mit einer Ellipse in demselben Punkte eine Berührung zweiter Ordnung haben und ausserdem noch durch einen festen Punkt der Ellipse gehen. Endlich alle Kegelschnitte, welche eine Ellipse in einem bestimmten Punkte so berühren, dass sämtliche 4 Schnittpunkte mit dem Berührungspunkt zusammenfallen. Im letzteren Falle ist die Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser durch den Durchmesser zum Berührungspunkt sogleich bestimmt.

Soweit diese Sätze sich auf Ellipsen beziehen, sind dieselben bereits im vorigem Paragraphen ausgesprochen worden. Wir sehen jetzt, dass sie allgemeine Gültigkeit für alle möglichen Kegelschnitte besitzen.

Was die Verteilung der Punkte auf die Hyperbeln angeht, so liegen in diesem Falle entweder alle 4 Punkte auf demselben Zweige oder auf jedem Zweige zwei derselben. Die Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser wird gefunden, indem man irgend eine der Curven zeichnet und zu den gegenüberliegenden Seiten des von den Punkten gebildeten Vierecks parallele Tangenten zieht und diese bis zum Schnitt verlängert. Die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit dem Mittelpunkte und die hierzu conjugirte Gerade geben die Richtung an.

Wir nehmen nun ferner an, die Lage der Punkte sei eine derartige, dass es nicht möglich ist Ellipsen durch dieselben zu legen. Es ist der Fall, den wir früher als den ersten bezeichnet haben. Es können stets drei der Punkte so zu einem Dreieck verbunden werden, dass der vierte innerhalb dieses Dreiecks zu liegen kommt. Sämtliche Kegelschnitte durch die 4 Punkte sind dann Hyperbeln, und es giebt nicht 2 unter ihnen, die demselben System von Curven mit gleicher Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser angehören. Denn wenn wir annehmen wollten, dass sich um den Mittelpunkt einer von ihnen eine ähnliche zu einer zweiten oder zur

conjugirten einer zweiten construiren liesse, welche die erste berührt, so würde man um denselben Mittelpunkt auch eine Ellipse zeichnen können, welche beide in demselben Punkte berührt. Benutzt man diese aber zur Abbildung, so würde man 2 Kegelschnitte derselben Axenrichtung erhalten, woraus folgen würde, dass die 4 Schnittpunkte im Abbilde auf einem Kreise, in Wirklichkeit also auf einer Ellipse liegen, welche der Abbildungsellipse ähnlich ist. Dies widerspricht aber der Voraussetzung.

Es verlieren damit auch die Sätze von den Tangenten parallel den Verbindungslinien der Punkte ihre Gültigkeit, es lassen sich überhaupt die Punkte nicht so anordnen, dass es möglich wäre, Tangenten parallel zu der Verbindungslinie zweier Punkte und gleichzeitig auch parallel zur Verbindungslinie der beiden andern zu ziehen.

Es liegen stets 3 Punkte auf dem einen, der vierte auf dem andern Zweige der Hyperbeln, wie für diesen Fall auch schon die Untersuchung von § 15. für die Hyperbeln ergeben hat, welche durch die Mittelpunkte der berührenden Curven eines Dreiecks gehen.

Einen tieferen Einblick in diese Verhältnisse bekommen wir, wenn wir die Betrachtung auf die Untersuchung des geometrischen Orts aller durch 4 Punkte gehenden Kegelschnitte ausdehnen. Wir setzen dabei als bekannt voraus, dass derselbe selbst wieder ein Kegelschnitt ist. Dann lässt sich in Betreff der Gestalt von vorn herein folgende Bemerkung machen: Im Falle sich durch die 4 Punkte nur Hyperbeln zeichnen lassen, muss der geometrische Ort eine im Endlichen verlaufende Curve, also eine Ellipse sein; sind auch Ellipsen durch die 4 Punkte möglich, so ist er eine Hyperbel, und zwar entsprechen dem einen Zweige derselben nur Ellipsen, dem andern nur Hyperbeln, und es muss dieser letztere Zweig durch die 3 Punkte gehen, die man als Durchschnittspunkte der Verbindungslinie von je 2 Punkten mit der Verbindungslinie der beiden andern oder mit der Verlängerung derselben erhält. Den unendlich fernen Punkten der Hyperbel entsprechen 2 Parabeln.

Der geometrische Ort muss aber nicht nur im letzteren Falle, sondern stets durch die angegebenen Schnittpunkte gehen. Es sind dieses die Stellen, an welchen die Curve in 2 sich schneidende Geraden ausartet und die Verteilung der 4 Punkte auf die einzelnen Zweige der Hyperbel sich ändert. Ausserdem giebt es in jedem Falle aber auch 6 Punkte, durch welche der geometrische Ort hindurchgehen muss, nämlich die Mitten der Verbindungslinien der

Punkte selbst. Da sich um jeden Punkt ein Kegelschnitt beschreiben lässt, der durch 3 feste Punkte geht, so kann man auch um die Mitte der Verbindungslinie zweier Punkte stets eine Curve legen, welche durch den einen Endpunkt der Verbindungslinie und durch die beiden andern Punkte hindurchgeht; diese Curve geht dann aber von selbst auch durch den andern Endpunkt. Darum müssen die Mitten der 6 Verbindungslinien auf dem geometrischen Ort liegen. Es sind also stets 9 Punkte des geometrischen Orts bestimmt.

Vereinigen wir 3 der gegebenen Punkte zu einem Dreieck, verbinden den vierten Punkt mit den Ecken dieses Dreiecks und verlängern die Verbindungslinien, bis sie die gegenüberliegenden Seiten oder die Verlängerung derselben treffen, ziehen wir ferner durch die Mitten der Seiten Parallelen zu den Verbindungslinien, welche sich in O treffen, und sehen wir diesen Punkt O an als Mittelpunkt einer dem Dreieck umbeschriebenen Curve, so sind die Verbindungslinien des vierten Punktes mit den Ecken des Dreiecks oder mit den 3 übrigen Punkten die zugehörigen conjugirten Ecktransversalen, der vierte Punkt ist der Schnittpunkt derselben, und der gesuchte geometrische Ort ist weiter nichts als die in § 10. betrachtete, durch die Mitten der Dreiecksseiten, durch die Fusspunkte der conjugirten Ecktransversalen und durch die Mitten der oberen Abschnitte gehende Curve, welche der umbeschriebenen Curve des Dreiecks ähnlich ist, dieselbe Richtung der Axen besitzt, und deren Axen gleich der Hälfte der Axen derselben sind. Den Mittelpunkt N bekommt man, indem man O mit dem Schwerpunkt S des Dreiecks verbindet und diese Linie um die Hälfte verlängert. Da aber die weitere Verlängerung durch den Schnittpunkt der Trasversalen, hier also durch den vierten Punkt hindurchgehen muss, und der Schwerpunkt die ganze Strecke von O bis zu diesem Punkte im Verhältniss von 1 : 2 teilt, so kann man den Mittelpunkt N auch finden, indem man den vierten Punkt mit O verbindet und diese Linien halbirt. Ist der Mittelpunkt des geometrischen Orts gefunden, so lässt sich nach § 18. mit Leichtigkeit auch die Richtung der Hauptaxen bestimmen.

Der Punkt N lässt sich aber noch durch eine dritte Construction finden, die sich auf die in § 10. gemachte Bemerkung stützt, dass die Verbindungslinie der Mitte jeder Dreiecksseite mit dem Mittelpunkt des oberen Abschnitts der zugehörigen Transversale durch N geht und von N halbirt wird. Wir erhalten so den Satz: Sind 4 beliebige Punkte gegeben und verbindet man die Mitte der Verbindindungslinie von je 2 Punkten mit der Mitte der Verbindungslinie der beiden andern, so treffen sich diese 3 Linien in ihrem Mittelpunkte und es ist dieser Schnittpunkt der Mittelpunkt für den geome-

trischen Ort der Mittelpunkte aller Kegelschnitte, die sich durch die gegebenen 4 Punkte legen lassen. Der geometrische Ort selbst aber geht durch die Mitten der 6 Verbindungslinien und ausserdem noch durch die 3 Punkte, in welchen die Verbindungslinie von je 2 Punkten die Verbindungslinie der beiden andern oder die Verlängerung derselben trifft.

Liegt der vierte Punkt innerhalb des Dreiecks, so liegen die Fusspunkte der Transversalen sämtlich auf den Seiten selbst, der geometrische Ort resp. die Curve der 9 Punkte ist notwendig eine Ellipse, deren einzelne Bogen nur durch solche Teile des Raumes führen, für welche nach den Erörterungen von § 9. die den Ecken des Dreiecks umbeschriebene Curve eine Hyperbel ist, auf deren einem Zweige nur eine Ecke des Dreiecks liegt, während der andere 2 Ecken und gleichzeitig den vierten Punkt enthält.

Liegt der vierte Punkt ausserhalb des Dreiecks der drei andern, so lässt sich zunächst keine Aussage in Betreff des geometrischen Ortes machen, derselbe kann ebensowol eine Ellipse als auch eine Hyperbel sein.

Es wurde bisher noch nicht davon gesprochen, dass bei vier gegebenen Punkten die Zusammenfassung von drei Punkten zu einem Dreieck auf vier verschiedene Arten möglich ist, dass der geometrische Ort also gleichzeitig Curve der 9 Punkte für 4 verschiedene Dreiecke ist. Es müssen sich also auch durch die Ecken der 4 Dreiecke 4 congruente Curven zeichnen lassen, welche dem geometrischen Orte ähnlich und mit ihm gleichgerichtet sind, und welche doppelte Länge der Axen besitzen. Die Mittelpunkte dieser 4 umbeschriebenen congruenten Curven bilden wieder ein System von Punkten, welches dem gegebenen congruent ist. Man erhält dasselbe, wenn man durch die Mitte jeder Verbindungslinie zweier Punkte zur Verbindungslinie der beiden andern eine Parallele zieht. Diese 6 Parallelen schneiden sich in den 4 Mittelpunkten der umbeschriebenen Curven. Jedem der gegebenen Punkte entspricht derjenige Punkt des Systems der Mittelpunkte, welcher zu dem Dreieck der andern 3 Punkte gehört. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte gehen sämtlich durch den Mittelpunkt des geometrischen Orts und werden von demselbem halbirt.

Nun ist es klar, dass, wenn bei einer Zusammenfassung der gegebenen Punkte der vierte Punkt innerhalb des Dreiecks der drei andern liegt, dies bei jeder andern Zusammenfassung nicht mehr der Fall sein wird. Derselbe liegt für jedes andere Dreieck draussen und zwar innerhalb eines Scheitelwinkels. Da aber für alle 4 Drei-

ecke die Curve der 9 Punkte dieselbe ist, muss auch für eine solche Lage des vierten Punktes der geometrische Ort eine Ellipse sein, wie übrigens auch die Anschauung sogleich erkennen lässt. Auch hier passirt die Curve nur solche Teile des Raumes, für welche die umbeschriebene Curve eine Hyperbel ist, und zwar gehen diese Hyperbeln für alle Punkte des geometrischen Orts mit Ausnahme derjenigen, welche innerhalb des Scheitelwinkels liegen, mit ihrem Zweige durch 2 Ecken des Dreiecks und gleichzeitig durch den vierten Punkt, mit ihrem andern durch die dritte Ecke.

Für die Teile der Curve innerhalb des Scheitelwinkels geht der eine Zweig durch alle 3 Ecken, der andere durch den vierten Punkt allein, so dass auch hier in allen Fällen wieder 3 Punkte auf dem einen, der letzte auf dem andern Zweige liegen.

Wenn man aber bei einer Zusammenfassung der Punkte der vierte Punkt innerhalb eines Scheitelwinkels liegt, so giebt es stets eine andere Zusammenfassung, bei welcher derselbe innerhalb des Dreiecks zu liegen kommt. Wir können daher das Resultat zusammenfassend dahin aussprechen, dass der geometrische Ort eine Ellipse ist, wenn sich überhaupt 3 Punkte so zu einem Dreieck vereinigen lassen, dass der vierte Punkt innerhalb dieses Dreiecks liegt.

Ist eine solche Zusammenfassung nicht möglich, so liegt der vierte Punkt für jedes Dreieck auch ausserhalb der Scheitelwinkel. In diesem Falle ist der geometrische Ort eine Hyperbel. Der eine Zweig geht nur durch solche Teile des Raumes, für welche die umbeschriebenen Curven Ellipsen, der andere nur durch solche Teile, für welche dieselben Hyperbeln sind, und zwar liegen entweder 2 Ecken des Dreiecks auf dem einen Zweige, der dritte und der vierte Punkt auf dem andern, oder es liegen alle 4 Punkte auf demselben Zweige der Hyperbel. Der letztere Fall tritt ein für alle Punkte des geometrischen Orts, welche innerhalb der Scheitelwinkel sich befinden.

Was die Lage und Gestalt für einzelne besondere Fälle angeht, so ist leicht einzusehen, dass der geometrische Ort nur dann ein Kreis sein kann, wenn der vierte Punkt Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks der andern ist, da nur in diesem Falle die conjugirten Richtungen senkrecht zu einander stehen. Uebrigens ist bei dieser Annahme für jede Anordnung der vierte Punkt nur auf einer Höhe des Dreiecks, so ist damit die Richtung der Hauptaxen bestimmt; dieselben laufen der betreffenden Höhe und der zugehörigen Seite des Dreiecks parallel.

Wenn der vierte Punkt mit dem Schwerpunkt des Dreiecks zusammenfällt, so berührt der geometrische Ort die Seiten in der Mitte, und der vierte Punkt selbst ist der Mittelpunkt der Curve. Dann fällt auch der Mittelpunkt der umbeschriebenen Curve mit dem Schwerpunkt zusammen. Liegt der vierte Punkt nur auf einer Mitteltransversale, so liegt auch der Mittelpunkt auf dieser Transversale und der geometrische Ort berührt die zugehörige Seite des Dreiecks in ihrem Mittelpunkte.

Berlin, im Januar 1894.

XII.

Miscellen.

1.

Zur Trisection des Winkels.

Es versteht sich wol von selbst, dass der praktische Zeichner einen Winkel dadnrch einfach in drei gleiche Teile zerlegt, dass er aus dem Scheitel einen entsprechend grossen Kreisbogen schlägt und diesen zwischen den Winkelschenkeln durch Probiren dreiteilt.

Immerhin bleiben aber jene Anwendungen nicht ausgeschlossen, wo es sich um einfache Apparate handelt, durch welche die Winkeldreiteilung sehr hübsch und genau erfolgen kann.

Wir haben in einer früheren Arbeit: „Beiträge zur Geschichte, Theorie und Praxis der Zeichen-Instrumente“ [1]) zwei Constructionen erwähnt und wollen eine dritte hierher gehörige Art hier beifügen.

Die gedachten zwei Constructionen sind folgende:

Die eine Lösung, Fig. 1. ist auf den ersten Blick verständlich, die Dreiecke 1 2 3 und 2 3 4 sind gleichschenklig, der Winkel 213; oder der demselben gleiche Winkel doc ist gleich $\frac{1}{3}abc$.

Der Gebrauch des Instrumentchens ist folgender: abc sei der gegebene Winkel, von welchem der dritte Teil gewünscht wird; man verlängere den Schenkel bc in der Richtung nach o, lege das mit C bezeichnete Lineal an die Linie ba an, halte das Instrument mit einer Hand fest und bringe mit der andern Hand das Ende des

1) Vergl. Dingler's polytechn. Journ., 1855. Bd. 255. S. 188 ff.

Lineales A in die verlängerte Gerade abc, so ist od die gewünschte Richtung. Man braucht also durch b nur eine Parallele od zu ziehen, so wird diese mit bc den Winkel $\frac{1}{3}abc$ einschliessen. Der Rest des gegebenen Winkels $(abc - \frac{1}{3}abc)$ ist dann nur noch zu halbiren und die Dreiteilung ist vorgenommen.

Bei der zweiten Lösung, Fig. 2. besteht der Apparat aus einem Paare zusammengesetzter Cirkel mit vier Beinen, welche so miteinander verbunden sind, dass in jeder Stellung des Cirkels das zweite Bein den Winkel halbirt, welcher durch das erste und dritte Bein gebildet wird, während gleichzeitig das dritte Bein den Winkel halbirt, welchen das zweite und vierte Bein mit einander umschliesen; auf diese Weise wird der Winkel zwischen dem ersten und vierten. Bein in drei gleiche Teile geteilt.

In Fig. 2. sind OG, OH, OJ und OK die vier Beine des Cirkels AE, CE, DF und BF sind stangenförmige Verbindungsglieder, drehbar und feststellbar in A, B, C und D, verbunden mittelst Stiften in E und F, welche in Schlitzen der Beine OH und OJ gleiten können. In den Dreiecken OAE und OCE ist

$$OA = OC, \quad AE = CE$$

und OE gemeinschaftlich; folglich ist

$$\text{Wkl. } GOH = \text{Wkl. } HOJ$$

In derselben Weise findet sich, dass

$$\text{Wkl. } HOJ = \text{Wkl. } JOK$$

ist. Es sind daher die drei Winkel einander gleich.

Man hat also beim Gebrauche des Instrumentes nur die Seiten PG und OK auf die Schenkel des gegebenen Winkels zu legen, die Punkte H und J genau zu markiren, schliesslich HO und JO zu ziehen, und die Trisection ist geschehen.

Diese Construction setzt eine Methode der Dreiteilung eines Winkels voraus, durch zwei Paare von parallelen Linealen; vergl. Fig. 3. Mache

$$OA = OD$$

und mit derselben Grösse als Radius beschreibe aus den Punkten A und D zwei Bögen. Der Punkt E auf der Linie OH wird durch den einen Bogen gefunden und der Punkt F auf der Linie OJ durch

den andern. Steche Nadeln in O, A und D, bringe die inneren Kanten des Parallelogramm-Lineales $LMNR$ gegen die Nadeln in A und O, in der gleichen Weise das Parallel-Lineal $QRST$ an die Nadeln in O und D, bewege dann die Lineale, dieselben gegen die Nadeln haltend, herum, bis LP die Linie QT auf dem einen und MN die Linie RS auf dem andern der zuerst beschriebenen Bögen schneidet, ziehe hierauf die Geraden längs QT und MN, womit der Winkel dreigeteilt sein wird.

Es ist leicht einzusehen, dass LP und RS sich auch auf der Halbirungslinie des gegebenen Winkels schneiden, eine Wahrheit, welche als gute Probe dienen kann, wenn man die Lineale in die gewünschte Stellung bringt. Ergänzt man in dieser Weise die Parallelogramme $OAEC$ und $ODFB$ der Fig. 2., so ist der Beweis derselbe.

Sehr originell ist die dritte Lösung: Man schneidet, Fig. 4. einen Apparat der hier dargestellten Form aus Carton, gross oder klein, je nach Belieben. Ueber BA (BA ist beliebig gross), ist aus O ein Halbkreis geschlagen, um dessen Radius

$$OA = OB$$

die Kante BA nach rechts verlängert ist; AS steht senkrecht zu BA.

Der ganze Apparat, nur mathematisch betrachtet, ist also aus zwei zu einander senkrechten Geraden und einem Halbkreis gebildet; der Radius des letzteren ist gleich $\frac{1}{3}$ der Länge der einen geraden Strecke.

Ist nun XSY der zu dreiteilende Winkel, so ist der Apparat folgender Massen anzulegen: Das rechtsseitige Ende der gedreiteilten Strecke gleitet auf dem Schenkel SY, die in A senkrechte Gerade gleitet durch den Schenkel S, und der Kreisbogen wird zur Berührung mit dem Schenkel XY (hier in C) gebracht.

Markirt man nun die Punkte a und 0 auf dem Zeichenpapier und zieht die Schenkel SA und SO, so ist die Trisection vollzogen.

Der Beweis ist sehr einfach: Es entstehen drei gleiche Dreiecke, jedes derselben ist rechtwinklig; nämlich die beiden Dreiecke in A in Folge der Construction des Instrumentes; das dritte bei C, weil die Tangente SL auf dem Radius CO senkrecht steht; die Gleichheit der drei kleinen, so wie jene der drei grossen Katheten ist an und für sich klar; folglich sind auch die drei spitzen Winkel bei S einander gleich. —

In Gehler's mathematischem Wörterbuch ist die im Altertum schon sehr berühmte Aufgabe von der Trisection eines Winkels oder Bogens, weil die Kräfte der euklidischen Geometrie übersteigend, zuerst analytisch gelöst, und dann der Bemühungen der griechischen Geometer gedacht. Die Analysis führt nämlich auf gleichseitige Hyperbeln, welche durch ihren Schnitt den Bogen teilen.

Also übersteigt das Problem die Kräfte der Geometrie der geraden Linie und des Kreises. Auch der Parabel und Conchoide hat man sich bedient.

Dergleichen Teilungen, bemerkt Gehler übrigens ganz richtig, sind indes nie von praktischem Nutzen, sondern nur als Anwendungen der Theorie der Curven zu betrachten; unsere oben angegebenen Teilungen hingegen sind rein praktischer Natur, da bei denselben höhere Curven nicht auftreten. —

Als wir die vorstehenden Zeilen abgeschlossen hatten, fanden wir zufällig in „Grunert's Archiv der Mathematik und Physik" 2. Reihe, 12. Tl. 2. Heft 1893, S. 177 ff. eine Abhandlung des Herrn Arthur Strauss, Lehrer am Realgymnasium zu Schwelm, betitelt: „Teilung eines beliebigen Winkels in eine beliebige Anzahl gleicher Teile mit Hülfe von Modellen". Unter den Modellen scheint Hr. Strauss eine verhältnissmässig grosse Anzahl von Curvenlinealen zu verstehen und sein Apparat besteht aus zwei unserm Apparat (Fig. 4.) ähnlichen Formen, nebst zwei Federn. Die Ausführung ist also ziemlich complicirt. Hr. Strauss sagt unter Anderm: „Wir können also theoretisch mit Hülfe einer Curve $n$ter Ordnung alle Winkel von 0 bis $(2n+1)\pi$ in $(2n+1)$ gleiche Teile teilen". „Praktisch", sagt Hr. Strauss weiter, „lässt sich dies jedoch nicht durchführen, schon deswegen, weil wir die Curven nach beiden Richtungen hin nur unvollständig construiren können. Für die Ausführung der Teilung ist dieser Umstand ja auch bedeutungslos, da wir durch Zweiteilung, bzhw. wiederholte Zweiteilung, die Teilung eines grösseren Winkels stets auf diejenige eines kleineren zurückführen können und umgekehrt".

München, den 10. Mai 1894.

Ernst Fischer,
o. ö. Professor an d. königl. technischen Hochschule.

2.

Ueber eine allgemeine Eigenschaft der Curven der reciproken Ordinaten.

Wenn man statt der Curvenordinate den reciproken Wert derselben aufträgt, so erhält man eine neue krumme Linie, welche die Curve der reciproken Ordinate genannt werden soll.

Ein rechtwinkeliges Coordinatensystem vorausgesetzt, ist die Curve der reciproken Ordinate für eine Gerade eine gleichseitige Hyperbel, deren eine Asymptote die Abscissenachse ist, während die zweite durch den Schnittpunkt der letzteren mit der Geraden geht.

Beweis. Wählt man den Schnittpunkt der Geraden mit der Abscissenaxe zum Coordinatenursprung, so lautet die Gleichung der Geraden

$$y = ax$$

die reciproke Ordinate ist daher

$$y = \frac{1}{ax}$$

woraus die Asymptotengleichung der Hyperbel

$$xy = \frac{1}{a} \quad \text{folgt.}$$

Nun lässt sich leicht, ohne Differentialrechnung, synthetisch der Satz nachweisen:

> „Für dieselbe Abscisse ist die Subnormale der Curve der reciproken Ordinate gleich der entgegengesetzten Subnormale der ursprünglichen Curve".

Beweis. Wenn die gegebene Curve steigt, so fällt jene der reciproken Ordinate. Es hat daher die Subtangente der letzteren eine entgegengesetzte Lage zu jener der ersteren.

Es sei ferner P ein Punkt der ursprünglichen Curve, P' der aus ihm abgeleitete der Curve der reciproken Ordinate, Q der Endpunkt der ihnen gemeinschaftlichen Abscisse. Die Tangente der ursprünglichen Curve in P sei T, ihr Schnittpunkt mit der Abscissenachse M. Die Tangente T' an die Curve der reciproken Ordinate in P' findet man, wenn man den unendlich nahen Punkt R' zu P' der Curve mit P' verbindet. Ist N der Schnittpunkt von T' mit der Abscissenachse, so ist zu zeigen, dass

$$QN = QM \quad \text{ist.}$$

R' findet man aus dem unendlich nahen Punkte R zu P auf der ursprünglichen Curve. R liegt aber zugleich in T. Wenn man nicht nur aus R, sondern aus allen Punkten von T die entsprechenden Punkte ableitet, so erhält man nach obigem eine gleichseitige Hyperbel, die durch P' und R' hindurchgeht, die Abscissenachse zur Asymptote und M zum Mittelpunkt hat. Diese Hyperbel hat daher in P' dieselbe Tangente, wie die Curve der reciproken Ordinate.

Da aber die Hyperbeltangente durch den Berührungspunkt P, zwischen den Asymptoten halbirt wird, so findet man ihren Schnittpunkt N mit der Abscissenachse, wenn man

$$ON = QM$$

macht, wodurch der Satz bewiesen ist.

Die aus der Scheitelgleichung der Parabel abgeleitete Curve, deren Ordinate

$$\frac{1}{\sqrt{2px}}$$

ist, und deren Gleichung demnach

$$xy^2 = \frac{1}{2p} = a$$

lautet, hat eine sehr einfache Tangentenconstruction und eine bemerkenswerte Eigenschaft bezüglich der Fläche.

Der Abschnitt der Tangente auf der Ordinatenachse ist nämlich $1^1/_2$ mal so gross als die Ordinate des Berührungspunktes, und die von den Coordinatenachsen der Curve und einer Ordinate begrenzte Fläche ist doppelt so gross, als das aus den Coordinaten des Endpunktes gebildete Rechteck.

Beweis. Ist O der Coordinatenursprung, zugleich Scheitel der Parabel, so ist, obige Bezeichnungen beibehalten, QM als Subtangente der Parabel gleich

$$2\,OM = 2x$$

Da nun

$$QN = QM$$

ist, so ist

$$ON = 3x$$

Es verhält sich daher der Tangentenabschnitt auf der Ordinatenachse zur Ordinate des Berührungspunktes wie $3 : 2$ w. z. b. w.

Bezeichnet man die oben genannte Fläche mit F, so ist

$$F = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2px}} = \frac{1}{\sqrt{2p}} \cdot \frac{x^{1/2}}{1/2} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2p}}$$

welcher Ausdruck auch so geschrieben werden kann:

$$F = \frac{2x}{\sqrt{2px}}$$

woraus folgt

$$F = 2xy \quad \text{w. z. b. w.}$$

Wilhelm Rulf.

3.

Ueber die Potenzen der Zahlen von der Form $xn \mp 1$.

Es sei eine Reihe von Zahlen von der Form $xn \mp 1$, z. B. die Doppelreihe $6n \mp 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots \infty)$ gegeben. Es enthält diese Reihe die folgenden Zahlen:

5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, . . .
7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55, 61, . . .

Erhebt man diese Zahlen zur 2., 3., 4. u. s. w. Potenz, so bestehen die folgenden Congruenzen:

$5^2 \equiv +1 \pmod 6$ und $\equiv +1 \pmod{12}$. $7^2 \equiv +1 \pmod 6$ und $\equiv +1 \pmod{12}$

$5^3 \equiv -1 \pmod 6$ und $\equiv +5 \pmod{12}$. $7^3 \equiv +1 \pmod 6$ und $\equiv +7 \pmod{12}$

$5^4 \equiv +1 \pmod 6$ und $\equiv +1 \pmod{12}$. $7^4 \equiv +1 \pmod 6$ und $\equiv +1 \pmod{12}$

$5^5 \equiv -1 \pmod 6$ und $\equiv +5 \pmod{12}$. $7^5 \equiv +1 \pmod 6$ und $\equiv +7 \pmod{12}$

u. s. w. u. s. w.

Ferner:

$11^2 \equiv +1 \pmod{12}$ und $\equiv +1 \pmod{24}$. $13^2 \equiv +1 \pmod{12}$ und $\equiv +1 \pmod{24}$

$11^3 \equiv -1 \pmod{12}$ und $\equiv +11 \pmod{24}$. $13^3 \equiv +1 \pmod{12}$ und $\equiv +13 \pmod{24}$

$11^4 \equiv +1 \pmod{12}$ und $\equiv +1 \pmod{24}$. $13^4 \equiv +1 \pmod{12}$ und $\equiv +1 \pmod{24}$

$12^5 \equiv -1 \pmod{12}$ und $\equiv +11 \pmod{24}$. $13^5 \equiv +1 \pmod{12}$ und $\equiv +13 \pmod{24}$

u. s. w. u. s. w.

Allgemein ist eine Zahl von der Form $6n \mp 1$, wenn sie zu einer geraden Potenz erhoben wird, $\equiv +1 \pmod{6n}$ und $\pmod{2 \cdot 6n}$ und wenn sie zu einer ungeraden Potenz erhoben wird, $\equiv \mp 1 \pmod{6n}$ und $\equiv 6n \mp 1 \pmod{2 \cdot 6n}$. — Aehnliche Gesetze gelten allgemein für die Zahlen von der Form $xn \mp 1$.

Oldenburg im Gr.

G. Speckmann.

4.

Potenzcongruenzen.

Bildet man ein Reihensystem mit dem Modul oder der Differenz p (p eine Primzahl) in der folgenden Weise:

$$\begin{array}{llll} 1, & p+1, & . & . \\ 2, & . & . & . \\ 3, & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ p, & 2p, & . & . \end{array}$$

so sind die Anfangsglieder 1 bis $p-1$ und alle Glieder der zu diesen Anfangsgliedern gehörigen Horizontalreihen nicht durch den Modul p teilbar. Die Glieder dieser Reihen werden aber $\equiv 0 \pmod{p}$, wenn man zu denselben resp. $p-1$, $p-2$, . . . hinzuzählt, denn $1+p-1$, $2+p-2$ u. s. w. sind $\equiv 0 \pmod{p}$. Erhebt man die Glieder der Reihen 1 bis $p-1$ zu irgend welchen Potenzen, so sind auch diese Potenzen sämtlich incongruent zum Modul p. Man kann dieselben aber in leichter Weise durch Hinzunahme eines bestimmten

Zusatzgliedes $\equiv 0 (\text{mod. } p)$ machen. In Betreff der Potenzen der Zahlen 1, 2, 3, . . . $p-1 (\text{mod. } p)$ bestehen nämlich die folgenden Gesetze:

$$\left.\begin{array}{l} 1^2+(p-1)1 \\ 2^2+(p-2)2 \\ 3^2+(p-3)3 \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ (p-1)^2+(p-[p-1])(p-1) \end{array}\right\} \equiv 0 (\text{mod. } p)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1^3+(p-1)1^2 \\ 2^3+(p-2)2^2 \\ 3^3+(p-3)3^2 \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ (p-1)^3+(p-[p-1])(p-1)^2 \end{array}\right\} \equiv 0 (\text{mod. } p)$$

u. s. w.

Allgemein gelten also die Congruenzen

$$\left.\begin{array}{l} 1^n+(p-1)1^{n-1} \\ 2^n+(p-2)2^{n-1} \\ 3^n+(p-3)3^{n-1} \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ (p-1)^n+(p-[p-1])(p-1)^{n-1} \end{array}\right\} \equiv 0 (\text{mod. } p)$$

Beispiel:

Es sei $p = 7$. Die Anfangsglieder der Reihen des Systems sind $= 1, 2, 3, 4, 5$ und 6.

$1^2+6.1=7$	$1^3+6.1^2=7$	$1^4+6.1^3=7$
$2^2+5.2=14$	$2^3+5.2^2=28$	$2^4+5.2^3=56$
$3^2+4.3=21$	$3^3+4.3^2=63$	$3^4+4.3^3=189$
$4^2+3.4=28$	$4^3+3.4^2=112$	$4^4+3.4^3=448$
$5^2+2.5=35$	$5^3+2.5^2=175$	$5^4+2.5^3=875$
$6^2+1.6=42$	$6^3+1.6^2=252$	$6^4+1.6^3=1512$

$1^5+6.1^4=7$	$1^6+6.1^5=7$
$2^5+5.2^4=112$	$2^6+5.2^5=224$

$3^5 + 4 \cdot 3^4 = 567$ $\quad 3^6 + 4 \cdot 3^5 = 5068$
$4^5 + 3 \cdot 4^4 = 1792$ $\quad 4^6 + 3 \cdot 4^5 = 7168$
$5^5 + 2 \cdot 5^4 = 4375$ $\quad 5^6 + 2 \cdot 5^5 = 21875$
$6^5 + 1 \cdot 6^4 = 9072$ $\quad 6^6 + 1 \cdot 6^5 = 54432$

u. s. w.

Die entstandenen Producte sind alle $\equiv 0 (\text{mod. } p)$.

Die Potenzen der Glieder der zu den Anfangsgliedern 1, 2. 3, . . . $(p-1)$ gehörigen Horizontalreihen werden nach Hinzunahme des bei den Potenzen von 1, 2, 3. . . . $(p-1)$ angegebenen Zusatzgliedes auch alle $\equiv 0 (\text{mod. } p)$.

G. Speckmann.

5.

Congruenzen.

Ist x eine beliebige Zahl und sind y und z zwei Zahlen, die zusammen gleich x sind, so bestehen die folgenden Congruenzen:

$$y^{2n} - z^{2n} \equiv 0 (\text{mod. } x)$$
$$y^{2n-1} + z^{2n-1} \equiv 0 (\text{mod. } x)$$

Beispiele:

$x = 23. \quad y = 16. \quad z = 7$

$16^2 = 256$
$-\ 7^2 = -49$
$207 \equiv 0 (\text{mod. } 23)$

$16^3 = 4096$
$+\ 7^3 = 343$
$4439 \equiv 0 (\text{mod. } 23)$

Beweis. Es ist $z \equiv +z (\text{mod. } x)$ und $y \equiv -z (\text{mod. } x)$

$$z^{2n} - (-z)^{2n} = 0$$
$$z^{2n-1} + (-z)^{2n-1} = 0$$

G. Speckmann.

6.

Ueber ebene zusammenhangende Liniengebilde.

Vorbemerkungen.

Ein Liniengebilde heisst zusammenhangend, wenn man von jedem Punkte desselben zu jedem andern gelangen kann, ohne andere Wege als die durch die Linien des Gebildes vorgeschriebenen zu benutzen.

Ein Punkt heisst gerade, wenn in ihm eine gerade Zahl von von Linienteilen zusammenstossen, im andern Falle ungerade. Unter einer Linie kurzweg soll eine solche verstanden sein, die aus einer Geraden durch Verbiegung in einer Ebene, bei welcher nur Punkte, nie Linienteile zur Deckung gelangen, entstanden ist. Eine solche kann man immer in 1 Zuge zeichnen, d. h. so, dass dabei bereits gezeichnete Linienteile nicht mehr befahren werden.

Satz I: Verbiegt man eine Gerade in einer Ebene in beliebiger Weise derart, dass dabei nur Punkte, nie Linienteile sich decken, so kann das dadurch entstandene Liniengebilde höchstens 2 oder keinen ungeraden Punkt haben.

Bew.: Wenn gerade Punkte auf gerade Punkte fallen, so entstehen wieder gerade Punkte. Nun sind aber alle Punkte der Linie ausser ihren Endpunkten gerade. Also können bloss 2 ungerade Punkte entstehen, wenn pie Endpunkte auf gerade Punkte fallen oder frei endigen. Fallen die Endpunkte zusammen, so entsteht kein ungerader Punkt.

Da jedes zusammenhangende Liniengebilde, das sich in 1 Zuge zeichnen lässt, auf obige Weise entstanden gedacht werden kann, so folgt:

Ein Liniengebilde, dass sich in 1 Zuge zeichnen lässt, (bereits gezeichnete Linienteile dürfen dabei nicht befahren werden) hat 2 oder keinen ungeraden Punkt.

Satz II: n Linien, die in eine Ebene so gelegt werden, dass nur Punkte, nie Linienteile zur Deckung gelangen, und welche ein zusammenhangendes Liniengebilde bilden, erzeugen $2k$ ungerade Punkte, wobei k höchstens gleich n sein kann.

Bew.: Die n Linien haben zusammen $2n$ ungerade Punkte. Es können daher ungerade Punkte nur dadurch entstehen, dass diese frei endigen oder mit geraden Punkten zusammenfallen. Die höchste Zahl derselben ist folglich $2n$. Fallen 2 ungerade

Punkte zusammen, so hat man 2 weniger. Es kann also ihre Zahl bloss von der Form $2n - 2p$ sein.

Da jedes zusammenhangende Liniengebilde auf letztere Art entstanden gedacht werden kann, so folgt:

Jedes zusammenhangende Liniengebilde kann nur eine gerade Zahl ungerader Punkte haben.

Satz III: Hat ein zusammenhangendes Liniengebilde keinen ungeraden Punkt, so kann dasselbe in 1 Zuge gezeichnet werden (bereits gezeichnete Linienteile dürfen dabei nicht mehr beschrieben werden.)

Bew.: Man nimmt zuerst an, dass das Gebilde aus Linien entstanden ist, bei welchen die Endpunkte zusammenfallen. Eine solche geschlossene Linie kann man stets von einem beliebigen Punkte aus in 1 Zuge zeichnen. Wir beschreiben sie aber aber bloss bis zu einem Punkte, den sie mit einer zweiten Linie gemein hat, beschreiben dann die letztere wieder bloss bis zu einem derartigen Punkte, dann die dritte Linie etc., müssen aber dabei berücksichtigen, dass Linien, von denen Teile bereits gezeichnet sind, von solchen Punkten aus nicht gezeichnet werden. Auf solche Weise fortfahrend kommt man stets zu einem Punkte, von dem aus eine Linie ganz beschrieben werden kann, sodass man wieder zu ihm zurückkehrt. Von diesem aus wird dann die zuletzt unterbrochene Linie wieder fortgesetzt und nur an einem solchen Punkt unterbrochen, den eine ganz neue Linie mit ihr gemein hat. So fortfahrend muss man wieder zum ersten Ausgangspunkt zurückkommen. Angenommmen, die Linien sind teils geschlossen, teils offen, und betrachten wir irgend eine der letztern, dann muss der eine Endpunkt mit dem 1ten Endpunkt einer zweiten, der 2te Endpunkt dieser mit dem 1ten Endpunkt einer dritten u. s. w. zusammenfallen, schliesslich aber der 2te Endpunkt der letzten Linie wieder mit dem 1ten Endpunkt der 1ten. Diese zusammen bilden dann wieder eine einfache geschlossene Linie und alle offenen Linien zerfallen demnach in einfach geschlossene. Damit ist dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt.

Satz IV: Um ein Liniengebilde mit $2n$ ungeraden Punkten so zu zeichnen, dass bereits beschriebene Linienteile nicht mehr befahren werden, muss man mindestens $(n-1)$mal absetzen, d. h. ein solches kann in höchstens n Zügen gezeichnet werden.

[illegible] Liniengebilde.

[illegible]

[illegible] zusammenhängend, wenn man von jedem [illegible] kann, ohne andere Wege [illegible] vorgeschriebenen zu benutzen.

[illegible] eine gerade Zahl von [illegible] in andern Falle ungerade. Unter [illegible] verstanden sein, die aus einer [illegible] bei welcher nur Punkte, [illegible] zusammen ist. Eine solche [illegible] so, dass dabei bereits [illegible] werden.

[illegible] in einer Ebene in beliebiger [illegible] nur [illegible] Linienteile sich [illegible] zusammengesetzte Liniengebilde höch- [illegible] haben.

[illegible] fallen, so entstehen [illegible] alle Punkte der Linie [illegible] können bloss 2 un- [illegible] Endpunkte auf gerade [illegible] fallen die Endpunkte zu- [illegible]

[illegible] das sich in 1 Zuge [illegible] gezeichnet werden kann,

[illegible] in 1 Zuge zeichnen lässt, [illegible] dürfen dabei nicht befahren [illegible] Punkt.

[illegible] so gelegt werden, dass nur [illegible] zur Deckung gelangen, und welche ein [illegible] bilden, erzeugen $2k$ unge- [illegible] Punkte, wobei k jede ganze Zahl sein kann.

Bew.: Die n Linien haben zusammen $2n$ ungerade Punkte. Es können daher ungerade Punkte nur dadurch entstehen, dass diese frei endigen oder mit geraden Punkten zusammenfallen. Die höchste Zahl derselben ist folglich $2n$. Fallen 2 ungerade

Punkte zusammen, so hat man 2 weniger. Es kann also ihre Zahl bloss von der Form $2n$ oder $2n-1$ sein.

Da jedes zusammenhängende Liniengebilde in der letztere Art entstanden gedacht werden kann, so folgt:

> Jedes zusammenhängende Liniengebilde kann nur eine gerade Zahl ungerader Punkte haben.

Satz III: Hat ein zusammenhängendes Liniengebilde keinen ungeraden Punkt, so kann dasselbe in 1 Zuge gezeichnet werden (bereits gezeichnete Linienteile dürfen dabei nicht mehr beschrieben werden.)

Bew.: Man nimmt zuerst an, dass das Gebilde aus Linien entstanden ist, bei welchen die Endpunkte zusammenfallen. Eine solche geschlossene Linie kann man stets von einem beliebigen Punkte aus in 1 Zuge zeichnen. Wir beschreiben sie aber aber bloss bis zu einem Punkte, den sie mit einer zweiten Linie gemein hat, beschreiben dann die letztere wieder bloss bis zu einem derartigen Punkte, dann die dritte Linie etc., müssen aber dabei berücksichtigen, dass Linien, von denen Teile bereits gezeichnet sind, von solchen Punkten aus nicht gezeichnet werden. Auf solche Weise fortfahrend kommt man stets zu einem Punkte, von dem aus eine Linie ganz beschrieben werden kann, sodass man wieder zu ihm zurückkehrt. Von diesem aus wird dann die zuletzt unterbrochene Linie wieder fortgesetzt und nur an einem solchen Punkt unterbrochen, den eine ganz neue Linie mit ihr gemein hat. So fortfahrend muss man wieder zum ersten Ausgangspunkt zurückkommen. Angenommen, die Linien sind teils geschlossen, teils offen, und betrachten wir irgend eine der letztern, dann muss der eine Endpunkt mit dem 1ten Endpunkt einer zweiten, der 2te Endpunkt dieser mit dem 1ten Endpunkt einer dritten u. s. w. zusammenfallen, schliesslich aber der 2te Endpunkt der letzten Linie wieder mit dem 1ten Endpunkt der 1ten. Diese zusammen bilden dann wieder eine einfache geschlossene Linie und alle offenen Linien zerfallen demnach in einfach geschlossene. Damit ist dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt.

Satz IV: Um ein Liniengebilde mit $2n$ ungeraden Punkten so zeichnen, dass bereits beschriebene Linienteile nicht r befahren werden, muss man mindestens $(n-1)$mal abse d. h. ein solches kann in höchstens n Zügen gezeichnet we

Bew.: Ein zusammenhangendes Liniengebilde mit $2n$ ungeraden Punkten muss aus mindestens n Linien entstanden gedacht werden, weil weniger keine $2n$ ungerade Punkte liefern können.

Jede dieser Linien kann in 1 Zuge gezeichnet werden. Ist aber das Gebilde aus mehr als n Linien hervorgegangen. so müssen diese doch wieder, da dann Endpunkte aufeinander fallen, in n einfache Linien zerfallen, von denen jede in 1 Zuge gezeichnet werden kann. Wäre die Zahl der Züge $< n$, so könnte das Liniengebilde aus weniger als aus n Linien entstanden gedacht werden, was aber unmöglich ist.

Umkehrung: Lässt sich ein zusammenhangendes Liniengebilde in n Zügen und nicht weniger zeichnen, so hat dasselbo $2n$ ungerade Punkte.

Ladenburg in Baden.

O. Steinert,
Lehramtspraktikant.

7.

Dreieckssatz.

Lehrsatz: Verhalten sich die drei Seiten eines Dreiecks $a : b : c = 4 : 5 : 6$, so ist der Winkel γ, welcher der Seite c gegenüberliegt, zweimal so gross, als der Winkel α, welcher der Seite a gegenüberliegt.

Das Dreieck sei ABC, und zwar

$$a = BC;\quad b = CA;\quad c = AB$$
$$\alpha = \text{Wkl. } BAC;\quad \beta = \text{Wkl. } CBA;\quad \gamma = \text{Wkl. } ACB$$

mithin die Bedingung:

$$a : b : c = 4 : 5 : 6$$

die Behauptung:

$$\gamma = 2\alpha$$

Beweis: Die Transversale CD halbire den Winkel ABC und teile AB in

$$AD = c - x \quad \text{und} \quad BD = x$$

Dann verhalten sich die Stücke bekanntlich wie die anliegenden Dreiecksseiten, d. h. es ist

$$c - x : x = b : a$$

oder, da sich die Summen der 2 ersten und 2 letzten Proportionsglieder verhalten müssen wie die Hinterglieder:

$$c : a+b = x : a = 6 : (4+5) = 2 : 3 = a : c$$

also, angewandt auf die Figur,

$$BD : BC = BC : AB$$

Der Winkel β bei B ist den folgenden Dreiecken gemeinsam, daher ist

Dreieck CBD ähnlich ABC

weil ein Winkel gleich und die ihn einschliessenden Seiten proportionirt sind. Daraus folgt:

$$\text{Wkl. } CAB = DCB$$

oder:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\gamma$$

was zu beweisen war.

Anmerkung. Die Grösse der Winkel ist von Anfang an durch die Seitenverhältnisse bekannt. Demnach sind die Winkel

$$\alpha = \arccos \frac{3}{4} = 41^\circ\, 24'\, 34'',\, 64 \ldots$$

$$\beta = \arccos \frac{9}{16} = 55^\circ\, 46'\, 16'',\, 07 \ldots$$

$$\gamma = \arccos \frac{1}{8} = 2 \arccos \frac{3}{4} = 82^\circ\, 49'\, 9''\, 29 \ldots$$

mit Lineal und Zirkel construirbar.

Dorpat. F. Specht.

8.

Herleitung der trigonometrischen Formel für die Tangente des halben Winkels aus den Seiten des Dreiecks.

Das Dreieck sei ABC, seine Seiten

$$a = BC,\quad b = CA,\quad c = AB$$

deren Gegenwinkel bzhw. α, β, γ. Als bekannt sei angenommen, dass deren Halbirende AO, AO, CO sich im Mittelpunkte O des einbeschriebenen Kreises treffen, dass die Fusspunkte D, E, F der

Lote von O auf a, b, c die Berührungspunkte dieses Kreises sind, und dass dessen Radius den Wert hat:

$$OD = OE = OF = \varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$\text{wo} \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Sei überdies

$$m = AE = AF; \quad p = BF = BD; \quad q = CD = CE$$

Dann hat man:

$$a = p+q; \quad b = q+m; \quad c = m+p$$
$$s = m+p+q$$

woraus:

$$m = s-a; \quad p = s-b; \quad q = s-c$$

Nun ist

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{OE}{AE} = \frac{\varrho}{m};$$

also nach Einsetzung der Werte:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}; \quad \text{etc.}$$

Dorpat.

F. Specht,
Oberlehrer emeritus.

XIII.

Ueber den Flächen- und Rauminhalt der durch Bewegung von Curven und Flächen erzeugten Flächen- und Raumgrössen.

Von

Chr. Nehls,
Wasserbaudirector in Hamburg.

Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich mit der Lösung der folgenden Aufgabe:

„Eine begrenzte Raumcurve oder eine begrenzte beliebig „gekrümmte Fläche bewegt sich, von einer gewissen An„fangslage ausgehend, nach einem gegebenen Gesetz, bis „zu einer bestimmten Endlage hin und beschreibt dabei „eine gesetzmässig begrenzte Fläche, bzhw. ein gesetzmässig „begrenztes Volumen; für letztere sind die Grösse der „Oberfläche, bzhw. die Grösse des Volumens zwischen An„fangs- und Endlage der bewegten Curve oder Fläche, die „beide während des entsprechenden Teils der Bewegung „unverändert bleiben oder sich gesetzmässig ändern kön„nen, allgemeiner zwischen zwei beliebigen Lagen derselben „zu ermitteln."

Die Lösung dieser Aufgabe im allgemeinsten Sinne ist Sache der Integralrechnung, wo sie in den Capiteln über die Complanation begrenzter Flächen und über die Kubatur begrenzter Volumina Aufnahme findet; sie ist hier in jedem einzelnen Falle in endlicher

Form oder mit Anwendung von Reihenentwicklungen möglich, sobald die Natur der in Rede stehenden Bewegung, durch welche eben die fraglichen Flächen- und Raumgrössen beschrieben werden, in vollem Umfang durch die entsprechenden Gleichungen und die Grenzen der Bewegung bestimmt ist. Auch der graphischen Behandlung, einschliesslich der Lösung der resultirenden Integrale, wird manche Aufgabe dieser Art ohne Weiteres zugänglich sein. Nichtsdestoweniger wird es im einen wie im andern Falle unter Umständen die Arbeit wesentlich erleichtern und fördern können, wenn man von den allgemeinen Beziehungen oder Gesetzen, welche auf diesem Gebiete gelten, Gebrauch machen kann. Um die Entwicklung solcher Beziehungen und Gesetze, soweit solche mir nicht anderweitig bekannt geworden sind, handelt es sich hier, und ich habe dabei namentlich die graphische Lösung der gestellten Aufgaben mit Hülfe der darstellenden Geometrie und der graphischen Integrationsmethode im Auge; selbstverständlich wird man bei diesem Verfahren die gelegentliche Benutzung erleichternder Hülfsrechnungen nicht ausschliessen wollen, im Gegenteil unter Umständen sogar eine vollständig analytische Lösung der graphischen Behandlung vorziehen. Bezüglich der letzteren verweise ich zuvor noch, insofern es sich um die Auflösung bestimmter Integrale handelt, auf die am Schlusse dieser Abhandlung benannten, früher von mir verfassten Schriften, wobei ich bemerke, dass andere Arbeiten ähnlicher Art, so weit sie mir bekannt sind, nichts wesentlich Neues mehr bieten.

1) Ueber den Amsler'schen Polar-Planimeter, und über graphisch-mechanisches Integriren im Allgemeinen. — Civil-Ingenieur, Band XX, 1874; auch als ergänzter Separat-Abdruck erschienen.

2) Graphisch-mechanische Bestimmung des aequatorialen Trägheitsmoments einer gegebenen Figur in Bezug auf eine beliebige Schwerpunktsachse derselben. — Civil-Ingenieur, Band XX, 1874.

3) Ueber graphisch-mechanisches Integriren. Civil-Ingenieur, Band XXI, 1875.

4) Ueber graphische Integration und ihre Anwendung in der graphischen Statik. 1877. Hannover, Verlag von Carl Rümpler; jetzt Dresden, Gustav Kühtmann's Verlag.

5) Graphische Bestimmung der Momente von Flächen und Bögen ebener Curven und Polygone. — Zeitschrift für Bauwesen, Jahrgang XXIX, 1879.

6) Der einfache Balken auf zwei Endstützen unter ruhender und bewegter Last. Hamburg 1885.

7) Die höhern Integralcurven und die Momente der Flächen ebener Curven. Zeitschrift für Bauwesen, Jahrgang XXXIX, 1889.

Ich verweise ausserdem noch auf zwei höchst interessante Schriften von

1) Br. Abdank-Abakanowicz: Les Intégraphes, la courbe intégrale et ses applications. Étude sur un nouveau système d'intégrateurs mécaniques. Paris, Gauthier-Villars, 1886. In deutscher Uebersetzung unter dem Titel: Die Integraphen. Die Integralcurve und ihre Anwendung von Br. Abdank-Abakanowicz. Deutsch bearbeitet von Emil Bitterli. Mit 130 Figuren im Text. Leipzig. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1889.

2) Alfred Amsler: Ueber den Flächeninhalt und das Volumen durch Bewegung erzeugter Curven und Flächen und über mechanische Integrationen. Schaffhausen, H. Maier, 1880.

In beschränktem Umfang wird die auf Seite 225 zur Lösung gestellte Aufgabe in den Lehrbüchern der Physik und Mechanik behandelt in der Theorie des Schwerpunkts, wo das Volumen des schief abgeschnittenen Cylinders und, mit Hülfe der Guldin'schen Regeln, Oberfläche und Volumen solcher Rotations-Flächen und Körper bestimmt werden, welche durch Drehung ebener Curven und Flächen um eine in ihrer Ebene liegende Achse erzeugt werden.

Ich führe hier deshalb zunächst die Darstellung dieses Gegenstandes an, und zwar fast wörtlich in der Behandlung, welche dieselbe findet in dem bekannten „Lehrbuch der analytischen Mechanik" von Duhamel; deutsch herausgegeben von Dr. Oscar Schlömilch. 2te Auflage. Leipzig, B. G. Teubner, 1858. Band 1, Seite 152—156.

§ 1. Volumen des schief abgeschnittenen Cylinders.

Das Volumen V eines abgestumpften — d. h. eines schief abgeschnittenen — Cylinders, dessen Grundfläche in der xy-Ebene liegt, und dessen erzeugende Geraden senkrecht auf dieser Ebene stehen, wird ausgedrückt durch

$$V = \int\int z \, . \, dx \, dy$$

dabei ist z die zu x und y gehörige dritte Coordinate eines Punktes xyz der obern Grundebene, und die Integrationsgrenzen bestimmen sich durch die Peripherie der gerad- oder krummlinig begrenzten Basis. Nennen wir φ den Neigungswinkel der oberen gegen die untere Grund- oder xy-Ebene, so ist $\frac{dx \,.\, dy}{\cos\varphi}$ das Element der obern Fläche, mithin deren Gesamtinhalt

$$= \frac{B}{\cos\varphi}$$

wenn B den Inhalt der Basis bezeichnet. Ferner wird der Abstand des Schwerpunkts der obern Fläche von den Ebenen xy bestimmt durch die Formel

$$\frac{B}{\cos\varphi} \cdot z_1 = \int\int \frac{z \,.\, dx\, dy}{\cos\varphi}$$

oder

$$Bz_1 = \int\int z \,.\, dx\, dy$$

woraus in Verbindung mit dem Vorigen folgt:

$$V = B \,.\, z_1$$

Das Volumen ist also gleich dem Product aus der Basis in die Höhe des Schwerpunkts der obern Fläche über der Basis.

Für die übrigen Coordinaten x_1 und y_1 des Schwerpunkts der obern Begrenzungsfläche hat man

$$\frac{B}{\cos\varphi} \cdot x_1 = \int\int \frac{x \,.\, dx\, dy}{\cos\varphi}$$

oder

$$B \cdot x_1 = \int\int x \,.\, dx\, dy;$$

$$\frac{B}{\cos\varphi} \cdot y_1 = \int\int \frac{y \,.\, dx\, dy}{\cos\varphi}$$

oder

$$B \,.\, y_1 = \int\int y \,.\, dx\, dy$$

Die Formeln für $B \,.\, x_1$, $B \,.\, y_1$ und $B \,.\, z_1$ sind ganz dieselben, als wenn es sich um den Schwerpunkt der Basis handelte, folglich liegen die Schwerpunkte der beiden Endflächen in einer und derselben Senkrechten auf der Basis.

Einen abgestumpften Cylinder, dessen erzeugende Gerade schief gegen beide Begrenzungsebenen gerichtet sind, kann man als den

Unterschied zweier Cylinder ansehen, welche den Normalquerschnitt zur gemeinschaftlichen Basis haben; die Differenz der beiden Perpendikel von den Schwerpunkten der beiden Endflächen des ursprünglichen Cylinders auf die gemeinsame Basis des neuen Cylinders ist nichts Anderes als die Verbindungslinie jener Schwerpunkte. Daraus folgt der Satz:

„Das Volumen eines beliebigen schief abgeschnittenen „Cylinders ist gleich dem Product aus dem Normalquer„schnitt des Körpers in die Verbindungslinie der Schwer„punkte seiner beiden ebenen Endflächen."

Man kann diesen Satz auf einen andern Ausdruck bringen, wenn man berücksichtigt, dass das Verhältniss des Normalschnitts zu einer der Endflächen gleich ist dem Cosinus des Winkels zwischen beiden Ebenen oder gleich dem Sinus des Winkels zwischen einer erzeugenden Geraden des Cylinders und jener Endfläche, und folglich gleich ist dem Verhältnisse, in welchem der Abstand des Schwerpunkts der zweiten Endfläche von der ersten zur Entfernung beider Schwerpunkte steht. Der Satz lautet nunmehr:

„Das Volumen eines beliebigen schief abgeschnittenen „Cylinders ist gleich dem Product aus der einen Begren„zungsfläche in die aus dem Schwerpunkt der zweiten Be„grenzungsfläche auf die Ebene der ersten gefällte Senk„rechte."

§ 2. Die Guldin'schen Regeln.

Sind x_0 und x die Abscissen der Endpunkte eines ebenen Curvenbogens s, so bestimmt sich die Ordinate y_1 des Schwerpunkts von s durch die Formel

$$s \cdot y_1 - \int y \cdot ds = \int_{x_0}^{x} y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

lässt man denselben Bogen s um die x-Achse sich drehen, so beschreibt er eine Fläche, deren Inhalt F bei einer vollen Umdrehung durch die Formel

$$F = 2\pi \int y \cdot ds = 2\pi \int_{x_0}^{x} y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

gegeben ist; aus der Vergleichung beider Formeln erhält man

welches, der Guldin'schen Regel zufolge, dem Producte aus dem Inhalte der Figur in den Weg ihres Schwerpunktes gleichkommt. Der Satz modificirt sich jedoch in dem Falle, wo die erzeugende Figur von den successiven Drehungsachsen geschnitten wird.

In dem Buche: „Des Ingenieurs Taschenbuch. Herausgegeen von dem Verein „Hütte", Auflage 13. Berlin, Verlag von Ernst & Korn, 1887", Seite 106 wird der wesentlich mit den angegebenen Wortlaut übereinstimmenden Fassung der Regeln noch die Bemerkung hinzugefügt: „vorausgesetzt, dass die erzeugende Linie — bzhw. Fläche — auf einer Seite der Achse liegt. — Diese Regeln gelten überhaupt, wenn die sich bewegende Ebene stets auf der Richtung der Bewegung senkrecht steht und die Figur auf einer Seite der Drehachse liegt." Dass die Figur auf einer Seite der Drehachse liege, ist natürlich auch bei Duhamel Voraussetzung.

Die Grenzen dieser Darstellung werden auch in den mir bekannten Werken anderer Schriftsteller höchstens nach der Richtung hin noch überschritten, dass sie auch die Oberfläche des schief abgeschnittenen Cylinders mit in Betracht ziehen. Ich werde im Folgenden zeigen, dass eine systematische Behandlung der Aufgabe zu einer erheblichen Erweiterung der Grenzen des ganzen Gebiets führt, jedoch nur in dem Falle, wo man es mit der Bestimmung des durch eine gesetzmässig bewegte Fläche beschriebenen Rauminhalts zu tun hat. Zunächst füge ich noch einige Worte hinzu in Bezug auf den schief abgeschnittenen Cylinder, welche für graphische Behandlung der betreffenden Aufgaben nicht ohne Nutzen sind.

§ 3. Ergänzung in Bezug auf Volumen und Oberfläche des schief abgeschnittenen Cylinders.

In Figur 1. stelle OA eine durch die Y-Achse gelegte Ebene dar, welche mit der XY-Ebene den Winkel δ bildet. Zwischen den Ebenen OA und XY, welche letztere hier der Gleichförmigkeit wegen mit OX bezeichnet werde, liege ein beliebiger Cylinder, auf dessen Volumen sich die folgende Betrachtung bezieht.

Die Y-Achse ist die gerade Linie, in welcher sich die Ebenen der Endflächen des Cylinders schneiden. Es sei F' die untere, F'' die obere Endfläche, P' ein Punkt in jener, P'' der entsprechende Punkt in dieser Fläche, u' der Abstand des Punktes P' von der Ebene OA, u'' der Abstand des Punktes P'' von OX. Die Coordinaten von P' seien x und y, und das an P' liegende Element der Fläche, bestimmt durch dx und dy, sei d^2F'; dann ist

1) $$d^2F' = dx\,dy$$

Multiplicirt man das mit u'', so erhält man das an dem Punkt P' stehende Volumenelement des Cylinders mit

$$dV = u'' \,.\, d^2 \,.\, F' = u'' \,.\, dx\,dy$$

und wenn man diese Gleichung integrirt in Bezug auf die ganze Fläche F', so erhält man das Volumen des Cylinders

2) $$V = \int\int u'' \,.\, d^2F' = \int\int u'' \,.\, dx\,dy$$

An dieser Gleichung ist interessant, dass sie ganz unabhängig ist von der Neigung der Seiten des Cylinders gegen die zu OY, der Durchschnittslinie der Endflächen, normale Ebenen XZ. Man kann demnach die Endflächen F' und F'' in der Richtung jener Durchschnittslinie beliebig gegen einander verschieben, ohne dass dadurch an dem Volumen des Cylinders etwas geändert wird. Ich nehme deshalb den einfachten Fall als Grundlage, wo nämlich der Cylinder parallel zur XZ-Ebene liegt; die bezügliche Untersuchung ist in diesem Falle wesentlich rein planimetrischer Art für letztere Ebene.

Für den Schwerpunkt von F' werde

$$x = x_5, \quad u' = u_5'$$

und ebenso für denjenigen von F'' werde

$$u'' = u_5''$$

es ist also u_5' der Abstand des Schwerpunktes der Fläche F' von OA, u_5'' der Abstand des Schwerpunkts der Fläche F'' von OX. Es sei ferner noch

$$\text{Wkl. } AOX = \delta, \quad \text{Wkl. } P''P'X = \alpha$$

Setzt man

$$\overline{OP''} = v$$

so folgt aus dem Dreieck $OP'P''$ nach der Sinusregel:

3) $$v = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \delta)} x = n \,.\, x$$

also:

$$dv = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \delta)} dx = n \,.\, dx$$

also:

4) $$d^2F'' = dv \,.\, dy = n \,.\, dx\,dy = n \,.\, d^2F'$$

Aus der Figur entnimmt man weiter:

5) $$\sin\delta = \frac{u'}{x} = \frac{u''}{v}$$

ebenso ist

6) $$\sin\delta = \frac{u_5'}{x_5} = \frac{u_5''}{v_5}$$

Mit Hülfe der Gleichungen 3) und 4) kann man die Gleichung 2) auf folgende Formen bringen

7) $$V = \int\int u'' \,.\, d^2F' = n\int\int u' \,.\, d^2F' = n\sin\delta \int\int x \,.\, d^2F'$$
$$= \int\int u' \,.\, d^2F'' = \frac{1}{n}\int\int u'' \,.\, d^2F''$$
$$= \frac{1}{n}\sin\delta \int\int v \,.\, d^2F''$$

Die Ausführung der Integrationen ergiebt mit Bezugnahme auf die Schwerpunkte von F' und F'', für welche die Gleichungen 6) entwickelt sind, folgende Beziehungen, in denen

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\delta)} \quad \text{ist:}$$

8) $$V = \int\int u'' \,.\, d^2F' = u_5'' \,.\, F' = n \,.\, u_5' \,.\, F' = n \,.\, \sin\delta \,.\, x_0 \,.\, F'$$
$$= \int\int u' \,.\, d^2F'' = u_5' \,.\, F'' = \frac{1}{n} \,.\, u_5'' \,.\, F''$$
$$= \frac{1}{n} \,.\, \sin\delta \,.\, v_5 \,.\, F''$$

Diese Gleichungen wiederholen in ihren ersten Teilen nur ein in Nr. 1 bereits entwickeltes Resultat; die folgenden Teile dagegen zeigen, dass man für die Bestimmung von V nicht des Schwerpunkts von F' oder F'', sondern nur einer Schwerpunktslinie von einer dieser beiden Flächen bedarf, die der Durchschnittslinie Y der Ebenen dieser Flächen parallel ist, und sie zeigen ferner, dass es genügt, die Lage dieser Schwerpunktslinie und die Flächengrösse für eine und dieselbe Fläche, F' oder F'', zu bestimmen, dass man demnach, wenn der Cylinder im übrigen genügend bestimmt ist, überhaupt nur eine der beiden Endflächen zu verzeichnen braucht.

Für die Oberfläche eines normalen schief abgeschnittenen Cylinders*) findet Folgendes statt:

---

*) Es handelt sich nur um die Cylinderfläche, nicht um die ebenen Endflächen.

Ist der Cylinder normal, so ist $\alpha = 90^0$. Ist s der Umfang der Basis F' in der Ebene OX, also ds ein Differential dieses Umfangs für den Punkt xy, so ist die Oberfläche bestimmt durch die Gleichung

$$O = \int u'' \, . \, ds$$

Hierin ist

$$u'' = x \cdot \operatorname{tg} \delta$$

also auch

$$O = \operatorname{tg} \delta \, . \int x \cdot ds$$

Das Integral ist das Moment des Umfangs von F' in Bezug auf die Schnittlinie der Ebenen OX und OA Ist x_s der Abstand des Schwerpunkts des Umfangs von der Schnittlinie, u_s sein Abstand von OA, so findet statt:

$$\int x \, . \, ds = x_s \, . \, s = \frac{u_s}{\operatorname{tg} \delta} \, . \, s$$

und wenn man das einsetzt in die Gleichung für O, so erhält man

$$O = \operatorname{tg} \delta \, . \, x_s \, . \, s = u_s \, . \, s$$

Die Integrale sind auf den ganzen Umfang des Normalschnitts F' zu beziehen. — Das Resultat lautet in Worten:

> „Die Oberfläche eines schief abgeschnittenen normalen „Cylinders ist gleich dem Umfang des Normalschnitts, „multiplicirt in dem Abstand des Schwerpunkts dieses „Schnittes, normal zu dessen Ebene gemessen, von der „geneigten Ebene der andern Endfläche. Zur Bestimmung „jenes Abstandes genügt die Bestimmung einer Schwerlinie „für den Umfang des Normalschnitts parallel zu der letzt-„genannten Endfläche."

Steht keine der Endflächen des Cylinders normal zu den Seiten desselben, so ist es am bequemsten, zunächst einen Normalschnitt und dann den Schwerpunkt seines Umfangs zu bestimmen. Die Oberfläche ist dann gleich dem Umfang dieses Normalschnitts, multiplicirt in die Länge einer von Endfläche zu Endfläche parallel zu den Seiten des Cylinders durch jenen Schwerpunkt gezogenen geraden Linie.

§ 4. Allgemeine Betrachtungen.

(Lage des Coordinatensystems und Richtung der positiven oder negativen Drehung. Lage, Richtung und Projection von Linien und

Flächen. Vorzeichen der durch die Bewegung von Linien und Flächen beschriebenen Flächen und Raumgrössen. Allgemeine Resultate in Bezug auf die Grösse der letzteren für parallele Verschiebungen und für Drehbewegungen. Zusammensetzung und Zerlegung von Parallel-Verschiebungen und Drehungen.)

In der analytischen Geometrie der Ebene pflegt man, wenn man mit rechtwinkligen Coordinaten arbeitet. die Achsen des Systems in der Regel so zu legen, wie Fig. 2a zeigt. Die Richtung der positiven X-Achse geht vom Anfangspunkt O aus von links nach rechts, und die Richtung der positiven Y-Achse liegt an der linken Seite eines Beobachters, der sich in O auf der Coordinaten-Ebene aufstellt und nach der Richtung der positiven X-Achse sieht. In Fig. 2b ist die Richtung der positiven Y-Achse die entgegengesetzte. Alle Drehbewegungen um den Anfangspunkt O werden entsprechend der alphabetischen Folge der Buchstaben im ersten Fall in der Richtung von rechte nach links, d. h. in der Richtung von der rechten Seite eines in O stehenden Beobachters vor demselben vorbei nach der linken Seite hin, im zweiten Fall in der Richtung von links nach rechts als rechtläufig, direct oder positiv aufgefasst; eine Drehung in entgegengesetztem Sinne ist rückläufig, indirect oder negativ. Denkt man sich ein bewegliches Coordinatensystem, welches vor der Drehung mit dem festen System zusammenfällt, so bringt die positive Drehung um O die bewegliche positive X-Achse bei einem Drehwinkel von 90^0 in die Richtung der positiven Y-Achse.

Geht man von den Coordinaten der Ebene über zu denjenigen des Raumes, so kommt zu den zwei Achsen X und Y noch eine dritte Achse Z hinzu, die im Anfangspunkt O zu den beiden andern senkrecht steht. Je nachdem man für die Achsen X und Y die Lagen Fig. 2a oder Fig. 2b wählt, kommt man dann zu den in Fig. 3a und 3b in Parallelprojection gezeichneten Axensystemen. Beide Arten des Systems werden vielfach angewendet. Auch bei Raum Coordinaten ist es, wie in der Geometrie der Ebene, gebräuchlich, den Sinn oder das Vorzeichen der Drehung, welche ein räumliches Gebilde um irgend eine der drei Achsen ausführt, durch die Buchstabenfolge der Achsen (xy, yz, zx) zu bestimmen. Man denke sich mit dem Raumgebilde ein zweites Axensystem fest verbunden, welches in der Anfangslage des Gebildes, mit dem es alle Bewegungen gemeinsam durchmacht, mit dem ersten, festen System der Achsen zusammenfällt. Dreht sich jenes Gebilde um die feste X-, bzhw. um die Y- oder Z-Achse, so ist die Drehung positiv, wenn die bewegliche positive Y-, bzhw. Z- oder X-Achse nach einer Drehung

von 90° mit der festen positiven Z-, bzhw. X- oder Y-Achse zusammenfällt. Für einen in der positiven Drehachse mit den Füssen in O stehenden Beobachter sind diese Drehungen in der Anordnung Figur 3a positiv in der Richtung von rechts nach links, umgekehrt in der Anordnung Fig. 3b.

Ich werde mich im Folgenden derjenigen Lagen der Coordinatensysteme bedienen, welche in den Figuren 2a und 3a dargestellt sind, so dass alle Drehungen als positiv oder rechtläufig gelten, wenn sie in der Richtung von rechts nach links, d. i. gegen die Richtung der Bewegung der Zeiger einer Uhr, deren Ziffernblatt dem Beschauer zugewendet ist, erfolgen.

In der Geometrie des Raumes muss man überall, wo es sich um die Feststellung des Sinns oder Verzeichens von Richtungen handelt, für jede in Betracht kommende Fläche, also auch für jede der Coordinaten-Ebenen, die beiden Seiten der Fläche, bzhw. dieser Ebene unterscheiden. Wo das erforderlich, nehme ich diejenige Seite der XY-, YZ-, ZX-Ebene als die vordere, äussere oder positive an, welche der positiven Richtung der ihr zugeordneten und zu ihr normal stehenden Coordinaten-Achse, d. i. der positiven Z-, X-, Y-Achse, also auch dem Raumachtel $+x+y+z$ zugewendet ist. Hat also ein beliebiger Punkt eines Raumgebildes die Coordinaten xyz, so ist er der $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\\text{negativen}\end{matrix}\right\}$ Seite der YZ-, ZX-, XY-Ebene zugewendet, je nachdem $x \gtrless 0$, $y \gtrless 0$, $z \gtrless 0$. —

In der Geometrie der Ebene hat man es nur mit einer Seite der Coordinaten-Ebene zu tun.

Eine beliebige Strecke P_1P_2 irgend einer geraden Linie projicire sich auf die Coordinaten-Achsen X, Y, Z nach $P_1'P_2'$, $P_1''P_2''$, $P_1'''P_2'''$. Ist die gegebene Strecke in der Richtung P_1P_2 als positiv zu rechnen, so ist sie in Bezug auf die X-, Y-, Z-Ache positiv oder negativ, je nachdem die eben genannten Projectionen die Richtung der positiven X-, Y-, Z-Achse oder die entgegengesetzte Richtung haben.

Eine beliebig begrenzte ebene Fläche F liege in der Ebene E, deren Gleichung angegeben sei in den Formen:

$$\left.\begin{matrix}1)\quad ux+by+cz+d=0\\2)\quad \cos\lambda\,.\,x+\cos\mu\,.\,y+\cos\nu\,.\,z-p=0\end{matrix}\right\} \qquad \text{(F.}$$

Die letztere Form ist unter dem Namen „Normalgleichung der Ebene“ bekannt; in derselben ist p die Länge der vom Anfangspunkt auf die Ebene gezogenen Normalen, und λ, μ und ν sind die Winkel, welche diese Normale, deren Richtung durch N angedeutet werden möge, mit den positiven Achsen bildet. Die Gleichungen von N sind:

$$3) \qquad x = \frac{\cos\lambda}{\cos\nu} z, \quad y = \frac{\cos\mu}{\cos\nu} . z \qquad (N.$$

Ueber die Richtung einer auf einer Geraden, hier der Normalen N zu messenden Strecke in Bezug auf die drei Coordinaten-Achsen war schon oben die Rede. Stellt man nun fest, dass, wenn sich auf der Normalen in der positiven Richtung ein Punkt von der einen Seite der Ebene durch dieselbe hindurch bewegt, diejenige Seite der Ebene, welche für diese Bewegung die Austrittsseite ist, die positive Seite der Ebene sein soll, so liegt mit der Normalen auch die zugehörige Ebene nach Lage und Richtung vollständig fest. Voraussetzung ist hierbei natürlich, dass diese Feststellung mit den übrigen bereits getroffenen Bestimmungen nicht im Widerspruch stehe; dass solches nicht der Fall ist, wird weiter unten nachzuweisen sein.

Es möge Gleichung 1), wenn man dieselbe mit einem Factor n multiplicirt, mit Gleichung 2) gleichlautend werden, dann findet man, in Rücksicht darauf, dass stattfindet:

$$4) \qquad \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

die folgenden Beziehungen:

$$5) \quad \begin{cases} p = -\frac{d}{a}\cos\lambda = -\frac{d}{b}\cos\mu = -\frac{d}{c}\cos\nu = -nd \\ \qquad = \mp\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \cos\lambda = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\mu = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \cos\nu = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{cases}$$

Das $\pm$ vor dem Wurzelzeichen ist so zu verstehen, dass man von beiden Vorzeichen dasjenige zu wählen hat, welches bei gegebenen λ, μ und ν die letzten drei Gleichungen identisch macht; natürlich gilt für alle drei dasselbe, und in der Gleichung für p das entgegengesetzte Vorzeichen. Ist z. B $\lambda < 90^0$, so ist $\cos\lambda > 0$, und man hat für die Wurzelgrössen das obere oder das untere Vorzeichen

zu wählen, je nachdem $a > 0$ oder $a < 0$ ist. Macht man also durch Umkehrung aller Vorzeichen in Gleichung 1), wenn a negativ war) die Grösse a positiv, so hat man das obere Vorzeichen zu wählen, wenn $\lambda < 90^0$ ist.

Man erkennt leicht, dass stattfinden muss:

$$6)\quad \begin{cases} \cos(N, X) = \cos(F, YZ) = \cos\lambda = \dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \cos(N, Y) = \cos(F, XZ) = \cos\mu = \dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \cos(N, Z) = \cos(F, XY) = \cos\nu = \dfrac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{cases}$$

$$7)\quad \begin{cases} \cos(N, YZ) = \cos(F, X) = \sin\lambda = \pm\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}} \\ \cos(N, XZ) = \cos(F, Y) = \sin\mu = \pm\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}} \\ \cos(N, XY) = \cos(F, Z) = \sin\nu = \pm\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2}} \end{cases}$$

Setzt man nach einander λ, μ, ν gleich null, so fällt in gleicher Folge die Normale N der Ebene F zusammen mit der positiven X-, Y-, Z-Achse und F wird parallel der YZ-, XZ-, XY-Ebene.

Die Projection der in der Ebene F liegenden begrenzten Fläche F auf eine beliebige andere Ebene ist derjenige Teil dieser Ebene, welcher von der Projection des Umfangs der Fläche F eingeschlossen wird. Die Fläche F kann in der Ebene F auf der positiven (äussern) oder auf der negativen (innern) Seite liegen. Im ersten Fall sind in leicht verständlicher Bezeichnung die Projectionen von F auf die Coordinaten-Ebenen:

$$8)\quad \begin{cases} F_{yz} = F_x = F \cdot \cos\lambda = \dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot F \\ F_{xz} = F_y = F \cdot \cos\mu = \dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot F \\ F_{xy} = F_z = F \cdot \cos\nu = \dfrac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot F \end{cases}$$

In Rücksicht auf Gl. 4) folgt hieraus:

$$9) \qquad F^2 = F_{yz}^2 + F_{xz}^2 + F_{xy}^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$$

Die Projectionen von F sind nach den Gleichungen 8) positiv, wenn die $\left\{\begin{matrix}\text{negative}\\\text{positive}\end{matrix}\right\}$ Seite von F der $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\\text{negativen}\end{matrix}\right\}$ Seite der betreffenden Coordinaten-Ebene zugewendet ist, was gleichbedeutend ist damit, dass die Normale N, d. i. die Achse der Ebene F mit der Achse dieser betreffenden Coordinaten-Ebene einen Winkel bildet, der kleiner als 90^0 ist. — Umgekehrt ist es, wenn die begrenzte Fläche F auf der negativen Seite der Ebene F liegt. Denkt man sich diese Ebene durchsichtig, so erscheint dieselbe Fläche, die auf der positiven Seite $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist, auf der negativen Seite $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$; umschreitet man die Fläche, so liegt sie auf der negativen Seite von F links, wenn sie auf der positiven Seite rechts liegt, und umgekehrt. —

Trägt man auf der Normalen N eine Strecke ab, welche nach Grösse und Richtung der begrenzten Fläche F, letzteren Wert der positiven Seite der Ebene F entnommen, gleichwertig ist, so kann diese Gerade an die Stelle der Fläche F gesetzt werden, wenn es sich um die Projection der Fläche F auf irgend eine Ebene handelt und man hierbei an die Stelle der letzteren auch ihre Normale in der vorgeschriebenen Richtung setzt.

Aus der Gleichung einer Ebene in rechtwinkligen Coordinaten ist im allgemeinen nur ihre Lage, nicht aber ihre Richtung, d. h. die Entscheidung darüber zu entnehmen, welche ihrer Seiten die positive, welche die negative ist. Denkt man sich die Ebene um eine in derselben liegende gerade Linie als Achse um 180^0 gedreht, so wechseln beide Seiten der Ebene ihr Vorzeichen, aber die Gleichung der Ebene bleibt dieselbe. Das kommt daher, dass die Gleichungen einer geraden Linie — für die Ebene kommt ihre Normale in Frage — nur die Lage, aber nicht die Richtung festlegt, wenigstens dann nicht, wenn die in derselben vorkommenden Winkelfunctionen in der üblichen Weise auf die kürzeste zahlenmässige Form gebracht sind. Geht man davon aus, dass die positive Richtung einer Geraden der Gleichungen

$$x = \frac{\cos\lambda}{\cos\alpha} \cdot z + q, \quad y = \frac{\cos\mu}{\cos\nu} \cdot z + r$$

mit den positiven Coordinaten-Achsen die Winkel λ, μ und ν bildet, so bildet die positive Richtung der Geraden

$$x = \frac{\cos(180^0+\lambda)}{\cos(180^0+\nu)} \cdot z + q, \quad y = \frac{\cos(180^0+\mu)}{\cos(180^0+\nu)} \cdot z + r$$

mit den Achsen die Winkel $180^0+\lambda$, $180^0+\mu$ und $180^0+\nu$, d. h. sie ist der Richtung der ersten Geraden genau entgegengesetzt, erscheint also um einen ihrer Punkte um 180^0 in einer beliebigen Ebene gedreht. Trotzdem sind beide Paar Gleichungen zahlenmässig gleichlautend, denn es ist

$$\frac{\cos(180^0+\lambda)}{\cos(180^0+\nu)} = \frac{\cos\lambda}{\cos\nu}, \quad \frac{\cos(180^0+\mu)}{\cos(180^0+\nu)} = \frac{\cos\mu}{\cos\nu}$$

d. h. beide Gleichungen legen dieselbe Lage der Geraden fest, aber ihre Richtung bleibt dabei unbestimmt.

Dieselbe Unbestimmtheit liegt in der Gleichung der Ebene, denn die Gleichung

$$\cos\lambda \cdot x + \cos\mu \cdot y + \cos\nu \cdot z - p = 0$$

entspricht einer andern Ebene, als die Gleichung

$$\cos(180^0+\lambda)x + \cos(180^0+\mu)y + \cos(180^0+\nu)z - p = 0$$

für beide ist die Lage der Normalen dieselbe, die Richtung der letzteren aber entgegengesetzt. Aus letzterem Grunde kehren beide Ebenen einander ihre negativen Seiten zu, und setzt man $p = 0$, so werden trotzdem die Gleichungen beider

$$\cos\lambda \cdot x + \cos\mu \cdot y + \cos\nu \cdot z = 0$$

obwol sie nur der Lage, nicht der Richtung nach sich decken. Das ist natürlich auch dann noch zutreffend, wenn man beide Ebenen jetzt parallel zu der Richtung $p(\lambda, \mu, \nu)$ um die Streke p verschiebt, wo dann beide der Gleichung

$$\cos\lambda \cdot x + \cos\mu \cdot y + \cos\nu \cdot z - p = 0$$

entsprechen.

Diese Unbestimmtheiten in den Formeln haften der Geometrie mit Parallelcoordinaten naturgemäss an, und sie müssen nötigenfalls durch anderweitige Bestimmung der Richtungen beseitigt werden. Analytisch lassen sie sich am bequemsten vermeiden, wenn man die geometrische Bedeutung der imaginären und überimaginären Zahlen heranzieht und mit ihrer Hülfe unverkürzte Richtungscoefficienten einführt. Ich will indessen, um allgemeiner verständlich zu bleiben, diese Hülfsmittel nicht benutzen, sondern mich auf die gewöhnlichen Mittel der analytischen Geometrie der Ebenen und des Raumes beschränken.

Bewegt sich eine gerade Linie

$$L = \overline{ab}$$

parallel zu sich selbst nach einer Richtung s um eine Strekee s, so ziehe man (Fig. 4) durch einen beliebigen Punkt von ab eine Gerade, nach Grösse und Richtung gleich s und parallel zu s. Dann erkennt man, dass die von L beschriebene Fläche absolut gleich

$$L \,.\, s \cdot \cos\varepsilon = L(s\cos\varepsilon) = (L\cos\varepsilon)s$$

ist. In der vorletzten Form ist $s\cos\varepsilon$ die Projection von s auf die Normale zu L, in der letzten Form $L\cos\varepsilon$ die Projection von L auf die Normale zu s. Die Pfeile in der Figur sollen die positiven Richtungen von L und s andeuten; dann gilt Folgendes:

Bewegt sich $+L = ab$ in der Richtung $+s$, so ist die beschriebene Fläche positiv,

bewegt sich $-L = ba$ in der Richung $+s$, so ist die beschriebene Fläche negativ,

bewegt sich $+L = ab$ in der Richtung $-s$, so ist die beschriebene Fläche negativ.

bewegt sich $-L = ba$ in der Richtung $-s$, so ist die beschriebene Fläche positiv

Demnach ergeben gleiche Vorzeichen für L und s für die beschriebene Fläche das Vorzeichen plus, ungleiche das Vorzeichen minus — Diese Resultate gelten bei rein fortschreitender Bewegung von L, ohne Drehung, für endliche Werte von L und s. Daraus folgt, dass sie auch für unendlich kleine Werte dieser Grössen gelte. Das ist auch dann noch der Fall, wenn L, jetzt dL, aus sein Anfangslage in die Endlage nicht durch rein fortschreitende, sonder. durch Drehbewegung um eine beliebige zu dL und s, jetzt ds n. male Achse übergeht.

Ganz ähnliche Resultate erhält man für das beschriebene Vo men, wenn man sich im Vorstehenden statt der bewegten gerad. Linie L, bzhw. dL eine begrenzte Fläche F. bzhw. d^2F denkt. D. Fläche F ist hierbei auf der positiven Seite ihrer Ebene F lieg. zu denken, so dass s positiv oder negativ ist, wenn seine Project auf die Normale dieser Seite von F mit der Normalen gleiche o entgegengesetzte Richtung hat. Tritt d^2F an die Stelle von F, gelten die Resultate für eine unendlich kleine Rewegung von auch dann, wenn dieselbe eine Drehbewegung um eine beliebi Achse ist.

Es ist nun zu untersuchen, welche Fläche dF eine gerade L L, und welches Volumen dV eine Fläche F beschreibt, wenn b. sich um irgend eine Achse um einen unendlich kleinen Wink. hen, und im ersten Falle L, im zweiten Falle F eine end.

Grösse ist. Für den Augenblick kommt es indessen nur auf die Ableitung eines allgemeinen Satzes an, welcher später weiter zu verwerten ist. Dabei sollen L und F als positiv angenommen werden.

Es drehe sich also die positive ebene Fläche F um die Z-Achse um einen unendlich kleinen Winkel δ, und um das Resultat gleich etwas allgemeiner zu gestalten, werde angenommen, dass gleichzeitig mit dieser Drehung eine unendlich kleine Parallelverschiebung σ nach der Richtung der positiven Z-Achse stattfinde. Es sei

1) $$\cos\lambda \,.\, x + \cos\mu \,.\, y + \cos\nu \,.\, z - p = 0 \qquad (F$$

die Gleichung der Ebenen F, in der die Fläche F liegt, und x_1, y_1, z_1 seien die Coordinaten eines Punktes P_1, an dem das Flächenelement d^2F liegt. Durch die Drehung δ und die Verschiebung σ gehen diese Werte über in x_2, y_2, z_2, und es ist

2) $$\begin{cases} x_2 = x_1\cos\delta - y_1\sin\delta = x_1 - y_1\,.\,\delta \\ y_2 = y_1\cos\delta + x_1\,.\,\sin\delta = y_1 + x_1\,.\,\delta \\ z_2 = z_1 + \sigma \end{cases}$$

Bezeichnet man P_1 in seiner neuen Lage mit P_2, so ist der Abstand dieses Punktes P_2 von der Ebene F, welcher mit ds_1 bezeichnet werden möge — nach Fig. 4. entspricht das dem Ausdruck $s\,.\,\cos\varepsilon$, bzhw. $ds\,.\,\cos\varepsilon$ — nach der analytischen Geometrie

3) $$ds_1 = \cos\lambda \,.\, x_2 + \cos\mu \,.\, y_2 + \cos\nu \,.\, z_2 - p$$

Subtrahirt man hiervon Gleichung 1) für den Punkt P_1, so ist in Rücksicht auf 2)

4) $$ds_1 = (-\cos\lambda \,.\, y_1 + \cos\mu \,.\, x_1)\,\delta + \cos\nu \,.\, \sigma$$

Wird dieser Ausdruck multiplicirt mit d^2F, so erhält man für das von d^2F beschriebene Volumen, welches man als einen nach allen drei Dimensionen unendlich kleinen schiefen Cylinder betrachten kann:

5) $$d^3V = (-\cos\lambda \,.\, y_1 \,.\, d^2F + \cos\mu \,.\, x_1\, d^2F)\,\delta + \cos\nu \,.\, d^2F \,.\, \sigma$$

Lässt man nun bei x_1 und y_1 den Index weg und bezieht die Integrale auf die ganze Fläche F, so erhält man für das von ihr beschriebene Volumen

6) $$dV = (-\cos\lambda \int\!\!\int y \,.\, d^2F + \cos\mu \int\!\!\int x \,.\, d^2F)\,\delta + \cos\nu \,.\, \sigma \int\!\!\int d^2F$$

Wenn x_s, y_s, und z_s die Coordinaten des Schwerpunkts von F sind, so ist

$$7) \qquad x_s \,.\, F = \int\int x \,.\, d^2F, \quad y_s \,.\, F = \int\int y \,.\, d^2F$$

Diese Gleichungen verwandeln Gl. 6) in:

$$8) \qquad dV = ((-\cos\lambda \,.\, y_s + \cos\mu \,.\, x_s)\delta + \cos\nu \,.\, \sigma)F$$

Vergleicht man den eingeklammerten Ausdruck rechts mit der rechten Seite der Gleichung 4), so erkennt man ohne weiteres, dass derselbe der Wert von ds, für den Schwerpunkt der Fläche F ist. Bezeichnet man diesen Wert mit ds_s, so erhält man das interessante Resultat:

$$9) \qquad dV = F \,.\, ds_s$$

Dasselbe lautet in Worten, da die Ebene F gegen die als Drehachse angenommene Z-Achse jede beliebige Lage haben kann, allgemein etwa so:

„Dreht sich eine ebene Fläche F von endlicher Grösse „um eine beliebige Achse um einen unendlich kleinen „Winkel δ unter gleichzeitiger Verschiebung nach der Rich- „tung der Achse um eine unendlich kleine Strecke σ, wobei „ δ sowol wie auch σ positiv, null und negativ sein kön- „nen, so ist das von F beschriebene Volumen gleich der „Fläche F, multiplicirt mit dem Abstand ds des Schwer- „punkts von F in der Endlage von der Ebene der An- „fangslage; dabei sind F und der Abstand ds beide mit „ihrem Vorzeichen einzuführen.“

„Das beschriebene Volume.nerscheint demnach als ein an „beiden Enden schief abgeschnittener Cylinder und ist als „solcher zu berechnen.“

Setzt man in Gleichung 1) den Winkel $\nu = 90^0$, so geht in Rücksicht darauf, dass

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

ist, dieselbe über in

$$10) \qquad \cos\lambda \,.\, x + \sin\lambda \,.\, y - p = 0$$

Das ist die Gleichung einer zu der Achse Z parallelen, also zu der Ebene XY normalen Ebene, aber gleichzeitig die Gleichung einer in der XY-Ebene liegenden geraden Linie. Ist L eine bestimmte Strecke dieser Linie, so gilt für die bei einer Drehung um die Z Achse von

dieser Strecke in der Ebene XY beschriebene Fläche den Zahlenverhältnissen nach genau dasselbe, was aus dem obigen Satze resultirt für das beschriebene Volumen, wenn man L in der Ebene F der Gleichung 10) betrachtet als die Grundlinie eines Rechtecks F von der Höhe eins. Daraus folgt:

„Dreht sich eine gerade Linie L um einen, in einer „durch L gelegten Ebene liegenden Punkt, in dieser Ebene „(d. i. um eine zu der Ebene normale Achse) um einen „unendlich kleinen Winkel δ, so ist die von L beschrie„bene Fläche gleich der Strecke L, multiplicirt mit dem „Abstand ds_s der Mitte oder des Schwerpunkts der Strecke „L in der Endlage von der Anfangslage; dabei sind L „und ds_s beide mit ihrem Vorzeichen einzuführen. Die „beschriebene Fläche ist also wie ein Paralleltrapez zu „behandeln."

Diese Resultate sind unabhängig von der in den Formeln 1) und 11) enthaltenen Grösse p, dem Abstand der Ebene, bzhw. der geraden Linie vom Anfangspunkt; derselbe darf demnach auch null sein, ohne dass unter übrigens gleichen Umständen an dem Resultat etwas geändert wird. So lange die Ebene die Drehachse schneidet, ist das ohne weiteres einleuchtend: nicht so augenfällig ist es, wenn die rotirende Ebene zur Drehachse parallel, bzhw. die rotirende Gerade zu derselben normal ist. Ich komme auf diesen Punkt weiter unten noch zurück.

Man kann eine der obigen Rechnung entsprechende auch für den Fall durchführen, wo sich eine beliebige gerade Linie um die zu ihr windschiefe Z-Achse dreht; das Resultat fällt hier indessen nicht einfach aus, und ich lasse daher jene Rechnung vorläufig auf sich beruhen.

Die Sätze, die für die von einer bewegten Curve erzeugten Fläche abgeleitet worden sind, lassen sich im Zusammenhang etwa so aussprechen, wobei zu beachten ist, dass an die Stelle der Curve auch ein Polygon treten kann.

1) Bewegt sich eine offene ebene Curve ALB irgendwie aus einer Anfangslage L in eine Endlage L_1, deren Ebene der Ebene der Anfangslage L parallel ist, ohne dass im übrigen die Lage von L_1 gegen L beschränktenden Bedingungen unterliegt, so ist eine Parallel-Projection der von L beschriebenen Fläche auf irgend eine Ebene algebraisch gleich der entsprechenden Projection der-

Das gilt beides für eine endliche Bewegung; jedoch nur dann, wenn letztere unendlich klein ist, deckt die auf diese Weise beschaffte Ueberführung von ab nach a_1b_1 auch die wirkliche Bewegung; im Falle der Drehbewegung wird dann O zum augenblicklichen Drehpunkt und Or und Od stehen bzhw. senkrecht auf den Berührungslinien an die Bahnen aa_1 und bb_1 für die Punkte a und b. Sind diese Berührungslinien parallel, so liegt O auf ihren Normalen in unendlicher Entfernung, d. h. aus der Drehung wird eine einfache Verschiebung.

Als Resultirende einer offenen Curve wurde oben bereits die Schlusslinie derselben erkannt, wenn es sich um die Projection der Curve auf irgend eine gerade Linie handelt. Ist die Curve eine ebene Curve, welche sich in ihrer Ebene fortbewegt, so erkennt man, wenn man an die Stelle der Curve zunächst ein Polygon mit endlicher Seitenzahl setzt, dass auch in Bezug auf die Grösse der beschriebenen Fläche irgend eine Anzahl Seiten durch die Schlusslinie ihrer Endpunkte, demnach auch das ganze Polygon durch seine Schlusslinie, und schliesslich auch die stetige Curve durch die ihr zugehörige Schlusslinie vertreten werden kann. Das liefert den Satz:

„Bewegt sich eine offene ebene Curve in ihrer Ebene, so „ist die von derselben beschriebene Fläche algebraisch, „d. h. nach Grösse und Vorzeichen gleich der von ihrer „Schlusslinie beschriebenen Fläche, für die ausser der „Grösse ebenfalls das Vorzeichen in Frage kommt."

Ist die endliche Bewegung der Curve eine rein fortschreitende Bewegung, so kann vorstehender Satz einfach so bewiesen werden. (Fig. 6).

Ist ab die Anfangs-, a_1b_1 die Endlage der Curve, also $\overline{ab}\,\overline{b_1a_1}$ die von ihr beschriebene Fläche, so ist ersichtlich diese Fläche auch gleich dem Parallelogramm $\overline{ab}\,\overline{b_1a_1}$, welches entsteht, wenn man das über ab liegende Flächensegment hier wegnimmt und bei a_1b_1 wieder ansetzt, und welches von der Schlusslinie ab beschrieben angesehen werden kann. Setzt man statt der letzteren die gebrochene Linie acb, so beschreibt das Stück ac bei der Bewegung nach der Richtung aa_1 keine Fläche, sondern nur cb, und darum muss die ganze von der Curve beschriebene Fläche auch gleich der von dem Normalschnitt cb beschriebenen Fläche cbb_1c_1 sein. Im ganzen ist die Grösse derselben proportional den Längen ab, cb und aa_1. Liegen einzelne Teile der Curve ab ausserhalb der Linien aa_1 und bb_1, oder hat dieselbe zwischen ab Rückkehrpunkte, Schlingen und dergl.,

so wird das Resultat dadurch nicht beeinflusst, da die Wirkungen der betr. Teile sich mit plus und minus so weit aufheben, dass nur eine einmalige Beschreibung der Fläche zwischen aa_1 und bb_1 übrig bleibt.

In ganz ähnlicher Weise kann man die Drehbewegung der Curve ab um einen festen Punkt O betrachten, wie Fig. 7, die nun ohne weiteres verständlich sein wird, zeigt. An die Stelle der Curve ab kann man, wenn es sich um die von ihr für einen Drehwinkel δ beschriebene Fläche handelt, die Schlusslinie ab, oder auch den Normalschnitt cb setzen, und die beschriebene Fläche ist proportional der Länge ab und cb, sowie auch der Grösse des Winkels δ in Teilen des Halbmessers. — Hieran sind nachfolgende Bemerkungen zu knüpfen.

Die von der Curve beschriebene Fläche F ist in dreierlei Weise zu ersetzen:

1) F, beschrieben von cb, ist, wenn man

$$\overline{Ob} = r_2, \quad \overline{Oa} = r_1$$

setzt, bestimmt durch

$$F = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \cdot \delta$$

2) Wird cb vertreten durch cab, so beschreibt ca keine Fläche, sondern nur $\overline{ab}$, und es muss sich also auch durch directe Rechnung bestätigen lassen, dass, wenn sich ab um O dreht, die beschriebene Fläche den vorstehend angeführten Wert haben muss. Dass das der Fall ist, ergiebt sich ohne weiteres aus der Congruenz der Dreiecke abc und $a_1b_1c_1$.

3) Zieht man OO_1 normal zu ab, und denkt man die Gerade ab um einen Winkel δ um O_1 gedreht, so wird auch dabei eine Flächengrösse gleich F beschrieben. Man findet für dieselbe zunächst

$$\frac{\overline{O_1b}^2}{2} \cdot \delta - \frac{\overline{O_1a}^2}{2}\delta, \text{ worin}$$

$$\overline{O_1b}^2 = r_2^2 - \overline{OO_1}^2 \quad \text{und} \quad \overline{O_1a}^2 = r_1^2 - \overline{OO_1}^2$$

werden diese Werte eingesetzt, so bleibt in der Tat

$$\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \cdot \delta$$

In Fig. 8 sind diese dreierlei Werte für F durch die drei schraffirten Flächen I, II und III dargestellt, und es ist nicht

schwer zu übersehen, dass die Gleichwertigkeit von II und III genau dem entspricht, was auf Seite 244 über das dort gefundene Resultat bezüglich der Unabhängigkeit desselben von der Grösse des Wertes p in der Gleichung 10) auf Seite 244 gesagt wurde. Fasst man diese Gleichung auf als die Gleichung einer zur XY-Ebene normalen Ebene F, welche sich um die Z-Achse dreht, und denkt man sich in dieser Ebene F eine beliebige Fläche abgegrenzt, so findet die Gleichwertigkeit von II und III für jede in F parallel zur XY-Ebene gezogene Sehne statt, wobei II direct mit F und III mit einer zu F parallelen, durch die Drehachse gelegten Ebene mit $p = 0$ correspondirt. Aus diesem Zusammenhang gelangt man durch einige weitere nahe liegende Schlüsse dann zu folgender Erweiterung der einfachen Guldin'schen Regel auf Seite 229:

> „Eine beliebige ebene Fläche F beschreibt bei einer „Drehung um eine zu ihrer Ebene parallele Achse ein „genau ebenso grosses Volumen, wie ihre Projection auf „eine, parallel zu der Ebene von F und durch die Dreh-„achse gelegte Ebene, bei gleichem Drehwinkel. Nach dem „Seite 244 angeführten Satze darf zu der Drehung auch „noch eine Verschiebung der rotirenden Fläche in ihrer „Ebene parallel zur Drehachse hinzutreten, gleichviel ob „dieselbe gleichförmig ist oder nicht, wobei dann statt des „Wegs des Schwerpunkts der Fläche seine Projection auf „eine zur Drehachse normale Ebene zu nehmen, d. h also, „die auf die Volumengrösse einflusslose Verschiebung über-„haupt als nicht vorhanden zu betrachten ist."

In Figur 8 entspricht diesem Satze, auf den ich später noch zurückkommen werde, für irgend einen Schnitt durch den Rotationskörper rechtwinklig zur Drehachse die Flächengleichheit der Schnittflächen II und IIIa.

Nach Seite 246 ist die von einer offenen ebenen Curve bei einer Bewegung derselben in ihrer Ebene beschriebene Fläche algebraisch gleichwertig mit der Fläche, welche die Schlusslinie der Curve beschreibt. Daraus folgt nun, dass, wenn die Schlusslinie selbst gleich null, also die Curve eine geschlossene ist, dann auch die von letzterer bei ihrer Bewegung beschriebene Fläche stets gleich null, d. h. also, dass algebraisch die positiv bestrichenen Flächen von den negativ bestrichenen Flächen aufgehoben werden, gleichviel auf welchen Bahnen die einzelnen Punkte der Curve aus der Anfangslage in die Endlage, die auch mit jener zusammenfallen kann, übergehen. Aus diesem Ergebniss lassen sich für besondere Fälle noch mancherlei interessante Schlüsse ziehen (vergl. hierüber

auch die auf Seite 226 unter 1) und auf Seite 227 unter 2) genannten Abhandlungen); ich beschränke die Anwendung hier auf die folgenden Bemerkungen.

Es trete an die Stelle der geschlossenen ebenen Curve, von der vorstehend die Rede ist, ein geschlossenes ebenes Polygon $a \ldots f$ (Fig. 9). Rückt dasselbe in gradlinig fortschreitender Bewegung aus der Anfangslage $a \ldots f$ in die Endlage $a_1 \ldots f_1$, so sind die geraden Linien $aa_1, bb_1 \ldots ff_1$ die Bahnen der Eckpunkte. Die einzelnen Seiten des Polygons beschreiben bei der Bewegung die Parallelogramme $abb_1a_1, bcc_1b_1 \ldots eff_1e_1, faa_1f_1$. Umgeht man dieselben in der Reihenfolge dieser Buchstaben, so tritt der Unterschied in den Vorzeichen der einzelnen Flächen hervor, je nachdem dieselben bei dem Umgehen rechts oder links liegen. Mit den so ermittelten Vorzeichen sind die Flächen beim Zusammenzählen in Ansatz zu bringen; sie ergeben dann für jede beliebige Form des Polygons und für jede Richtung und Länge der Bahnen seiner Eckpunkte algebraisch die Summe null.

Giebt man irgend einem der Parallelogramme das seinem eigentümlichen Vorzeichen entgegengesetzte, so ist dasselbe gleich der algebraischen Summe aller übrigen, demnach ihre Resultirende.

Anmerkung. Es ist sehr leicht, aus diesen Betrachtungen eine Construction abzuleiten für die Lösung der Aufgabe, ein Parallelogramm (auch ein Rechteck, wenn man will, von gegebener Grundlinie) zu zeichnen, das so gross ist, wie die Summe einer beliebigen Anzahl beliebiger Parallelogramme. Reducirt man das Polygon $ab \ldots f$ auf ein Dreieck abc, so ergiebt sich unmittelbar der Lehrsatz des Pappus, und macht man das Dreieck rechtwinklig, etwa mit der Hypotenuse ab, so ergiebt sich der Lehrsatz des Pythagoras, wenn man

$$\overline{aa_1} = \overline{ab}$$

und den Winkel a_1ab gleich 90^0 macht. In ähnlicher Weise findet man auch die übrigen Lehrsätze, die in den Lehrbüchern der Planimetrie bei Gelegenheit des Lehrsatzes des Pythagoras entwickelt zu werden pflegen — unter Anwendung einfacher und nahe liegender Hülfsbetrachtungen.

Man kann sich nun die einzelnen Parallelogramme auch dadurch entstanden denken, dass eine gerade Linie aa_1 parallel ihrer ersten Lage erst an ab, dann an bc u. s. w. und schliesslich an fa fortgleitet, bis die Endlage die Anfangslage deckt. Dann erscheint nach dem Vorigen bezüglich der Grösse der beschriebenen Flächen irgend

eine der Teilbewegungen mit entgegengesetztem Vorzeichem, d. i in entgegengesetzter Richtung, z. *B.* von aa_1 nach ff_1 als die Resultirende aller übrigen. Hiernach kann man eine beliebige Anzahl paralleler Verschiebungen einer geraden Linie in eine einzige zusammensetzen und umgekehrt letztere wieder zerlegen. — Sind a und und a_1 zwei Punkte einer ebenen Curve, so beschreibt jeder einzelne Punkt dieser Curve bei der Verschiebung ein Polygon congruent zu $a \ldots f$, folglich ist auch die von der bewegten Curve bestrichene Fläche algebraisch gleich null. Dasselbe ist auch dann der Fall, wenn $a \ldots f$ eine beliebig aus geraden und krummen Teilen zusammengesetzte Linie ist, an der als Leitlinie sich die bewegte Curve als die die Fläche erzeugende Linie parallel fortschreitend, ohne Drehbewegungen fortbewegt.

In Fig. 9 ist die algebraische Summe der Flächen abb_1a_1, $bcc_1b_1 \ldots faa_1f_1$ auch dann gleich null, wenn das geschlossene Polygon $a_1b_1 \ldots f_1$ gegen die Anfangslage $ab \ldots f$ verdreht ist, und demnach nicht $a_1b_1 \parallel ab$, $b_1c_1 \parallel bc \ldots f_1a_1 \parallel fa$ ist. Das Gleiche gilt, wenn an die Stelle des geschlossenen Polygons $abc \ldots f$ eine geschlossene Curve tritt.

Bewegt sich eine Raumcurve L parallel fortschreitend nach der Richtung einer Geraden s um eine Strecke s vorwärts, so bleiben irgend drei Punkte derselben, welche die Eckpunkte eines Dreiecks bilden, stets in Ebenen, die der ursprünglichen Ebene dieser drei Punkte parallel sind. Die von der Curve L beschriebene Fläche ist eine Cylinderfläche, deren Oberfläche der Länge s proportional ist. Letzteres erkennt man in ganz ähnlicher Weise, wie es in Bezug auf Fig. 6 für eine ebene Curve bewiesen wurde. Als Erzeugende kann man sich nämlich auch statt der Curve L irgend eine andere Curve auf der Oberfläche des Cylinders, also auche eine solche denken, welche in irgend einer die Cylinderfläche schneidenden Ebene liegt. Ist diese Ebene normal zu der Richtung s, so schneidet sie die Cylinderfläche in einem Normalschnitt, und die Oberfläche des Cylinders ist an Inhalt gleich der Länge dieses Schnitts, multiplicirt mit s.

Ist die Curve L eine geschlossene Curve, so ist auch die von ihr beschriebene Cylinderfläche nur an den Enden, nicht an den Seiten offen, und die Projection der ganzen Fläche auf eine beliebige Ebene ist stes gleich null.

Ist die Curve L die Randcurve einer beliebigen Fläche F, so wird die letztere ein Volumen beschreiben, welches, wie auch die Fläche geformt sein mag, proportional s ist. Statt der Fläche kann

man sich eine beliebige andere Fläche gesetzt denken mit derselben Randcurve; ist letztere eine beliebige Raumcurve, so wird die einfachste Ersatzfläche eine Regelfläche sein, die man jedes Mal nach dem Zweck, den man eben im Auge hat, näher charakterisiren kann. Schneidet man den Cylinder durch eine beliebige Ebene, so ist die Schnittfläche eben ein schiefer ebener Schnitt des Cylinders, der für letzteren auch als Erzeugende gedacht werden kann. Wird die schneidende Ebene normal zu s, so erhält man den Normalschnitt des Cylinders; letzterer ist an Inhalt gleich der Fläche jenes Schnitts multiplicirt mit s. Liegen auch ausserhalb der durch die Randcurve L gehenden Seiten des Cylinders Teile der Fläche F, so heben sich bei der fortschreitenden Bewegung deren Wirkungen für die Erzeugung des Volumens auf bei rein algebraischer Auffassung der Sache. Doch könnte auch gefragt werden nach dem Volumen des die Fläche F umhüllenden Cylinders; dann ist nicht die Randcurve L, falls sie überhaupt vorhanden ist, massgebend; bei einer geschlossenen Fläche F ist L gleich null, d. h. verschwunden. Man muss dann den zu der Richtung s parallelen Cylinder, welcher die Fläche F von aussen berührt, also die Curve, in der er sie berührt, bestimmen. Diese Curve tritt dann an die Stelle der Randcurve L, welche oben angenommen wurde, und eine beliebige dieselbe schliessende Fläche kann als die das Volumen erzeugende Fläche angenommen werden.

In ganz ähnlicher Weise, wie es für eine ebene Curve mit Bezugnahme auf Figur 7 geschehen, kann man auch diese letzten Entwicklungen leicht auf den Fall übertragen, wo sich eine Raumcurve L, bzhw. eine Fläche F, deren Randcurve L ist, um eine feste Achse dreht. Die dabei von der Curve L beschriebene Ringfläche ist proportional dem Drehungswinkel δ und der Länge eines ebenen, durch die Drehachse gelegten Normalschnitts, den man bekanntlich auch Meridianschnitt nennt; die Projection der Ringfläche ist aber nicht gleich null, da die Endlage von L nicht parallel der Anfangslage ist. Ebenso ist das von der Ringfläche, welche von der Fläche F mit der Randcurve L beschrieben wird, umschlossene Volumen proportional dem Drehwinkel δ und dem Flächeninhalt des Meridianschnitts.

Ist L die Anfangs-, L_1 die Endlage einer Raumcurve, und ist die relative Lage beider eine solche, dass L in L_1 durch fortschreitende Bewegung ohne Drehung übergeführt werden kann, so ist die Projection einer beliebigen, zwischen L und L_1 gedachten Eläche auf irgend eine Ebene stets null, wenn L eine geschlossene Curve ist. Das ist eine Erweiterung des auf Seite 252 für die von L beschriebene Cylinderfläche Gesagten.

Man erkennt die Richtigkeit der Behauptung sofort, wenn man L und L_1 durch beliebige Flächen F und F_1 schliesst. Diese beiden Flächenteile bilden mit der zwischen L und L_1 angenommenen zusammen eine einzige geschlossene Fläche, bzhw. ein Polyeder im allgemeinen Sinne des Worts. Die Projection dieses Polyeders ist algebraisch gleich null, und da auch die Projectionen von F und F_1 die algebraische Summe null ergeben, so muss auch die Projection der Fläche zwischen L und L_1 null sein.

Denkt man L in L_1 durch rein fortschreitende Bewegung übergeführt, so beschreiben alle Punkte der Curve L congruente Curven. Sind diese Curven gerade Linien, so ist die Fläche zwischen L und L_1 eine Cylinderfläche, welche in ein Prisma übergeht, wenn L ein Polygon ist. Ist also $a \ldots f$ in Fig. 9 ein Raumpolygon und $a_1 \ldots f_1$ die zweite Lage desselben parallell zu $a \ldots f$, so sind die Parallelogramme $ab\,b_1a_1$, $bc\,c_1b_1 \ldots fa\,a_1f_1$ die Seitenflächen des Prismas, für welche die algebraische Summe der Projectionen auf irgend eine Ebene null ist.

Der auf Seite 251 und 252 behandelte Fall ist als ein Grenzfall dieses allgemeineren Falls zu betrachten, und zwar so, dass beide Polygone eben sind und in derselben Ebene liegen, so dass die Projectionen der Parallelogramme auf diese Ebene mit jenen Flächen selbst zusammenfallen.

Ist die Curve oder das Polygon L eben, und die Ebene der Endlage L_1 parallel der Ebene der Anfangslage L, so kann man die geschlossene Figur L durch irgend eine Bewegung in die Endlage L_1 überführen, und es bleibt bestehen, dass die Projection der dadurch beschriebenen Fläche auf irdend eine Ebene stets algebraisch gleich null ist, Es ist also dann nicht erforderlich, dass die Elemente von L den entsprechenden Elementen in der Endlage L_1 parallel seien. Das Gleiche gilt, wenn die Ebenen der Anfangs- und Endlage von L zusammenfallen.

Bewegt sich die Curve L, die Randcurve der Fläche F, rein fortschreitend so, dass ein fest mit ihr verbundener Punkt beständig auf einer zweiten geschlossenen Curve bleibt, so wird in jedem Augenblick der Bewegung die Projection der von L beschriebenen Fläche auf irgend eine Ebene gleich null sein. Der algebraische Wert des von F beschriebenen Volumens ist null, sobald F in seine Anfangslage zurückgekehrt ist. Dasselbe gilt für die von L beschriebene Fläche, wenn L nicht geschlossen ist. Ist die zweite Curve, die Leitcurve, nicht geschlossen, so kann man den Schluss durch eine beliebige, also auch durch eine gerade Schlusslinie her-

stellen, und aus dem Obigen ist für diesen Fall zu entnehmen, in welchem Sinne diese Schlusslinie für die von L beschriebene Fläche und das von F beschriebene Volumen als Resultirende der zweiten Curve, der Leitlinie der Bewegung, aufgefasst werden kann.

Auf Seite 248 wurde bewiesen, dass, wenn die Bewegung eines Raumgebildes parallel einer gegebenen Ebene vor sich geht, man dieses Gebilde aus der Anfangslage in die Endlage überführen kann durch eine einfache fortscheitende Bewegung parallel der Ebene oder durch Drehung um eine zu der Ebene senkrechte Achse.

Diese Bewegungen weichen, wenn die Endlage des Gebildes von der Anfangslage um eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung entfernt ist, von der wahren Bewegung aus letztgenannter Lage in die andere nur um unendlich kleine Grössen zweiter oder höherer Ordnung ab und können also die wahre Bewegung vertreten.

Das gilt demnach auch in Bezug auf die in beiden Fällen beschriebenen Flächen- und Raumgrössen.

Im weiteren ist bewiesen worden, wie sich auch in letzterer Hinsicht eine beliebige fortschreitende Bewegung eines Raumgebildes auf eine einzige, wenn man will geradlinige Bewegung gleicher Art zurückführen lässt. Im Folgenden soll nun noch kurz erörtert werden, wie sich jede beliebige, aus fortschreitenden und Drehbewegungen zusammengesetzte Bewegung durch eine Drehung um eine gewisse Achse und ein gleichzeitiges Gleiten oder Fortschreiten parallel zu dieser Achse, d. h. durch eine cylindrische Schraubenbewegung ersetzen lässt. Zunächst ist zu dem Ende zu beweisen, dass sich jedes Gebilde aus einer gegebenen Anfangslage in eine beliebige, um endliche Masse davon entfernte Endlage durch eine fortschreitende Bewegung und darauf folgende Drehbewegung oder umgekehrt überführen lässt, wobei unter Umständen eine dieser Bewegung auch gleich null sein kann.

Es sei (Fig. 10) abc die Anfangslage, $a_1b_1c_1$ die Endlage von drei mit dem Gebilde fest verbundenen Punkten (vergl. Seite 251). Durch parallele Verschiebung kann man irgend einen dieser Punkte z. B. a in seine Endlage bringen; die entsprechende Lage von abc sei $a_1b'c'$. Legt man nun zwei Ebenen durch a_1 und bzhw. durch die Mitten der geraden Linien $b'b_1$ und $c'c_1$ und normal zu diesen Linien, so ist die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen die Drehachse, welche es ermöglicht, $a_1b'c'$ durch einfache Drehung um diese Achse in die Endlage $a_1b_1c_1$ zu bringen.

Ueber die Richtung der so im allgemeinen bestimmten Drehachse ist Folgendes zu sagen:

Die Achse steht normal zu $b'b_1$ und $c'c_1$. Zieht man also von einem beliebigen Punkte i (Fig. 10b) aus zwei gerade Linien ib'' und ic'', die nach Grösse und Richtung gleich und parallel $b'b_1$ und $c'c_1$ sind, so ist die Achse normal zur Ebene $ib''c''$. Zieht man nun noch ia''', $b''b'''$ und $c''c'''$ gleich und parallel $aa' - aa'$ ist gleich und parallel bb' und cc' — so ist die Ebene $a'''b'''c'''$ parallel der Ebene $ib''c''$, also ist die Achse auch normal zu letzterer Ebene. Es sind aber ia''', ib''' und ic''' die Ortsveränderungen der Punkte a, b und c, und das Resultat ist demnach dieses: Trägt man von einem beliebigen Punkte i aus nach Grösse und Richtung die Entfernung der Endlagen a_1, b_1 und c_1 dreier beliebiger Punkte a, b und c des bewegten Gebildes von ihren Anfangslagen, oder diesen Entfernungen proportionale Längen ab, so steht die Drehachse normal zu der Ebene, welche man durch die Endpunkte a''', b''' und c''' legen kann.

Die Richtung der Drehachse ist unabhängig von der Wahl des Punktes a, den man zunächst durch Parallelverschiebung in seine Endlage bringt, während ihre Lage von der Wahl dieses Punktes abhängt. — Denkt man sich $a_1 b_1 c_1$ als Anfangslage, abc als Endlage, so erkennt man, dass man auch die Drehbewegung vor der fortschreitenden voraufgehen lassen kann.

Ist die Endlage des Gebildes von der Anfangslage nur unendlich wenig entfernt, so kann man die wirkliche Bewegung durch die gleichzeitig erfolgende Parallelverschiebung und Drehbewegung ersetzen, die zusammen von ersterer nur um unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung verschieden sind. Handelt es sich um die bei diesen Bewegungen von dem Gebilde beschriebenen Flächen- oder Raumgrössen, so kann man die Teilbewegungen auch als nach einander erfolgend sich vorstellen und die Summe ihrer Wirkungen als die Gesamtwirkung der wirkichen Bewegung einführen, denn jene können von der letzteren nur um unendlich kleine Grössen höherer Ordnung, die als solche zu vernachlässigen sind, verschieden sein. Dasselbe gilt für jede andere Art der Zerlegung der unendlich kleinen wirklichen Bewegung, und es gilt für die Gesamtwirkung dieser Bewegung auch dann, wenn letztere sich aus einer beliebigen Anzahl gleichzeitig erfolgender unendlich kleiner Parallelverschiebungen und Drehungen zusammensetzt.

In Fig. 10a kann die Richtung aa_1 die durch a_1 verlaufende Drehachse unter irgend einem Winkel schneiden. Zerlegt man aber die Verschiebung aa_1 in eine Componente parallel und in eine zweite

normal zur Achse, so kann man im Hinblick auf das, auf Seite 247 und 248 mit Bezug auf Fig. 5 Gesagte schon einsehen, dass sich die zuletzt genannte Teilbewegung mit der Drehung zu einer einfachen Drehung um eine zur ersten Achse parallele Achse zusammensetzen lässt. Damit ist aber offenbar nun die Schraubenbewegung fertig. (Liegt die letzte Achse unendlich weit entfernt, so wird aus der Schraubenbewegung eine reine Parallelverschiebung; umgekehrt erhält man eine reine Drehung ohne Verschiebung, wenn die Componente der Verschiebung parallel der Achse null ist.) — Eine endliche Ortsveränderung eines Gebildes wird sich im allgemeinen nicht durch eine einzige Schraubenbewegung, sondern nur durch eine unendlich grosse Anzahl unendlich kleiner Bewegungen dieser Art ersetzen lassen; bei jeder einzelnen dieser Bewegungen ist die Bahn eines beliebigen Punkts des Gebildes eine cylindrische Schraubenlinie. Bekanntlich ist das dem Krümmungskreis einer ebenen Curve entsprechende Analogon für eine Raumcurve die Krümmungsschraube (vergl. u. A. Dr. H. Scheffler, Situationscalcul, § 32), und es leuchtet unmittelbar ein, dass jene cylindrische Schraubenlinie mit der Krümmungsschraube der Bahn des bewegten Punkts zusammenfallen muss. Wegen der weitern Einzelheiten dieser Lehre von der geometrischen Bewegung eines Raumgebildes verweise ich auf das eben genannte Werk, besonders auch auf Duhamel, Analytische Mechanik, wo dieselben sehr ausführlich behandelt sind, und auf andere Lehrbücher der Mechanik. Ich beschränke mich hier darauf, nur noch die folgenden kurzen Ergänzungen der obigen Betrachtungen über die Zusammensetzung und Zerlegung von Fortschritts- und Drehbewegungen, getrennt oder combinirt, hinzuzufügen.

Die Fortschrittsbewegung einer geraden Linie nach einer gegebenen Richtung kann man als ein Gleiten längs einer zu dieser Richtung parallel gezogenen Geraden auffassen. Gleitet diese Gerade gleichzeitig längs einer zweiten, diese wieder längs einer dritten Geraden u. s. w., so vollführt das Gebilde 2, 3 . . . Fortschrittsbewegungen. Dreht sich eine der Geraden gleichzeitig um eine gegebene Achse, diese wieder um eine zweite Achse u. s. w., so kommt zu den fortschreitenden eine entsprechende Anzahl gleichzeitiger Drehbewegungen hinzu. Hierin liegt die Erklärung dafür, was im allgemeinen unter gleichzeitiger Ausführung mehrerer Bewegungen zu verstehen ist. Hat man die Wirkung einer Anzahl gleichzeitiger Bewegungen zu untersuchen, so kommt stets das Zahlenverhältniss der einzelnen Bewegungsgrössen in Frage. Diese Bewegungsgrössen also die Wege der einzelnen Punkte werden, wenn es sich um unendlich kleine Verschiebungen und Drehungen handelt, alle ebenfalls

unendlich klein sein. Um sie vergleichen zu können, wird man sie sämtlich auf eine unabhängig veränderliche Grösse, von der sie alle abhängig sind, beziehen müssen. Wählt man hierfür die Zeit, während der die Bewegungen ausgeführt werden, und dividirt alle jene unendlich kleinen Wege der einzelnen Punkte durch das constante Differential der Zeit, so erhält man statt der Wege die Geschwindigkeiten von endlicher Grösse, mit der jene Wege durchlaufen werden. So gewinnt man die Möglichkeit, die Wirkungen mehrerer gleichzeitig erfolgender Bewegungen zu verfolgen, obgleich, so lange diese Wirkungen keine Kraftwirkungen sind, es sich vielmehr nur um die Bestimmung der durch ein Raumgebilde beschriebenen Flächen- und Raumgrössen handelt, an und für sich die Zeit nicht in Frage kommt. Es soll also zunächst mit σ die Geschwindigkeit einer Parallelverschiebung, mit δ dagegen die Winkelgeschwindigkeit einer Drehung bezeichnet werden; was dann in Bezug auf Zusammensetzungen und Zerlegungen in Bezug auf diese Geschwindigkeiten zu sagen ist, das gilt auch für die entsprechenden Verschiebungen und Drehungen.

Mehrere unendlich kleine gleichzeitige Verschiebungen setzen sich, wenn man sie in beliebiger Folge als nach einander erfolgend denkt, in der Weise zusammen, dass die Schlusslinie des aus denselben construirten Polygons die resultirende Verschiebung ist. Ebenso ist es für die entsprechenden Geschwindigkeiten. Sind letztere nach Grösse und Richtung σ_1, σ_2 . . . und ihre Winkel mit den Coordinaten-Achsen $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$, $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ . . . , so sind die nach den Richtungen jener Achsen gemessenen Componenten den Resultirenden $\Sigma(\sigma \cos \alpha)$, $\Sigma(\sigma \cos \beta)$, $\Sigma(\sigma \cos \gamma)$, woraus sich unmittelbar der Wert der Resultirenden selbst ergiebt.

Drehung um zwei sich schneidende Achsen. Ist ein Gebilde gleichzeitig zu zwei Drehungen um die Achsen OA und OB (Fig. 11) mit den Winkelgeschwindigkeiten δ und δ_1 veranlasst, so werden die Punkte der Ebene AOB in Ruhe bleiben, für welche die Geschwindigkeiten gleich und entgegengesetzt, also allgemein gleich null sind. Ein solcher Punkt ist O, durch den also die etwa mögliche resultirende Achse verlaufen muss. Ein zweiter Punkt derselben sei P, also OP selbst sei die Achse, dann mus stattfinden für den Punkt P:

$$x \,.\, \delta = x_1 \,.\, \delta_1$$

und, wenn man auf beiden Seiten durch die Länge OP teilt:

$$\sin \alpha \,.\, \delta = \sin \alpha_1 \,.\, \delta_1$$

Man ziehe durch P die Geraden PC und PC_1 bzhw. parallel zu OB und OA, und es sei

$$\overline{OC} = \overline{C_1P} = n \,.\, \delta, \quad \overline{OC_1} = \overline{CP} = n_2 \,.\, \delta_1$$

dann erhält man z. B. aus Dreieck OCP

$$\sin\alpha \,.\, n\delta = \sin\alpha_1 \,.\, n_1\delta_1$$

Verglichen mit der vorigen Gleichung erhält man hieraus

$$n = n_1$$

d. h. OP ist die Diagonale eines Parallelogramms $OCPC_1$, dessen Seiten proportional, also auch eines solchen, dessen Seiten gleich δ und δ_1 sind; damit ist die Lage von OP bestimmt.

Um nun noch die resultirende Winkelgeschwindigkeit ε für diese Achse zu finden, beachte man zunächst, dass im Dreieck OCP, wenn

$$\overline{OC} = n\delta, \quad \overline{CP} = n\delta_1 \text{ ist:}$$

$$\sin\alpha_1 \,.\, \overline{OP} = \sin(\alpha + \alpha_1)\, n\delta$$

Zieht man nun von einem beliebigen Punkte M auf OB die Normalen zu OA und OP und bezeichnet diese mit a und p, so muss für M stattfinden:

$$p \,.\, \varepsilon = a \,.\, \delta_1$$

und, indem man beiderseits durch OM teilt:

$$\sin\alpha_1 \,.\, \varepsilon = \sin(\alpha + \alpha_1)\,\delta$$

Verglichen mit der vorigen Gleichung erhält man demnach

$$\overline{OP} = \varepsilon_1$$

wenn $n = 1$, also

$$\overline{OC} = \delta \quad \text{und} \quad \overline{OC_1} = \delta_1$$

ist. Für ε gilt also die Gleichung:

$$c = \frac{\sin(\alpha+\alpha_1)}{\sin\alpha_1} \,.\, \delta = \frac{\sin(\alpha+\alpha_1)}{\sin\alpha} \,.\, \delta_1$$
$$= \sqrt{\delta^2 + \delta_1^2 + 2\delta\delta_1\cos(\alpha+\alpha_1)}$$

Das Resultat ist:

„Zwei unendlich kleine Drehungen um sich schneidende „Achsen können durch eine einzige Drehung ersetzt wer„den, und wenn man auf jenen Achsen vom Durchschnitts„punkt aus Längen gleich den Winkelgeschwindigkeiten „abträgt, so bestimmt die Diagonale des aus aus diesen „Strecken construirten Parallelogramms sowol die Lage

„der resultirenden Achse wie die Winkelgeschwindigkeit „der resultirenden Drehung um die Achse".

Handelt es sich um mehrere Drehungen δ, δ_1 . . . um Achsen, welche sich sämtlich in einem Punkte schneiden, so kann man demnach die resultirende Drehung ganz ebenso finden, wie es oben für Parallelverschiebungen angegeben wurde, wenn man an die Stelle der Grössen σ, σ_1 . . . die Grössen δ, δ_1 . . . , gemessen auf den Richtungen der zugehörigen Achsen, treten lässt.

Verschiebung normal zu einer Achse und Drehung um diese Achse. In Fig. 12 sei die Achse O normal zur Bildebene und die Winkelgeschw. sei δ, die Geschwindigkeit der Verschiebung σ. Dann lassen sich beide Bewegungen zu einer Drehung um eine Achse P, die ebenfalls normal zur Zeichenebene steht, vereinigen, und es findet statt für die Achse O, d. i. für ihre Verschiebung und ihre Drehung um P:

$$\sigma = x \,.\, \delta, \quad \text{also} \quad x = \frac{\sigma}{\delta}$$

und für eine Drehung um O findet man für P:

$$\sigma = x \,.\, \varepsilon$$

woraus durch Vergleich mit der vorigen Gleichung folgt:

$$\varepsilon = \delta$$

Nach diesen einfachen Beziehungen, die sich leicht in Worte kleiden lassen, kann man nicht nur eine fortschreitende Bewegung normal zu einer gegebenen Achse und eine Drehung um diese zu einer Drehung um eine resultirende Achse combiniren, sondern auch umgekehrt die letztere in die beiden ersten zerlegen.

Drehung um zwei parallele Achsen, Drehungspaare. In Fig. 13 seien die beiden Achsen O und O_1 normal zur Zeichenebene die gegebenen Achsen mit den Winkelgeschwindigkeiten δ und δ_1, und P die offenbar zu jenen parallele Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ε; P liegt in der Ebene OO_1. Man findet nun leicht nach der Bezeichnung in der Figur für die Achse P, die eben in Ruhe bleiben soll:

$$x \,.\, \delta = x_1 \,.\, \delta_1$$

Ferner für eine Drehung um die Achsen O und P für die Achse O_1:

$$(x + x_1)\delta = l\delta = x_1 \,.\, \varepsilon$$

für eine Drehung um die Achsen O_1 und P für die Achse O:

$$(x + x_1)\delta_1 = l\,\delta_1 = x \,.\, \varepsilon$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\varepsilon = \delta + \delta_1, \quad x = l \cdot \frac{\delta_1}{\delta + \delta_1}, \quad x_1 = l \cdot \frac{\delta}{\delta + \delta_1}$$

Dieselben Formeln erhält man, wenn man von zwei sich schneidenden Achsen ausgeht und dann ihre Neigungswinkel gleich null setzt.

Sind die beiden gegebenen Drehungen einander entgegengesetzt, ist z. B. δ_1 negativ, so erhält es in den vorstehenden Formeln das Vorzeichen minus. Wird dann

$$\delta - \delta_1 = 0$$

so wird

$$\varepsilon = 0, \quad x = -\infty \quad \text{und} \quad x_1 = \infty$$

Man hat es dann mit einem Drehungspaar oder mit einem Gegenpaar von Drehungen zu tun. Für ein solches Gegenpaar liegt die resultirende Achse, für welche die Winkelgeschwindigkeit null ist, in unendlicher Entfernung, d. h. sie existirt als Drehungsachse überhaupt nicht; man erkennt vielmehr unmittelbar die Richtigkeit des folgenden Satzes:

> „Ein Drehungspaar bewirkt eine parallel fortschreitende „Bewegung aller Punkte des Gebildes (ohne Drehung) „nach geraden Linien, welche auf der Ebene des Paares, „d. i. auf der Ebene ihrer Achsen senkrecht stehen; die „Geschwindigkeit dieser Bewegung, für alle Punkte die„selbe, ist gleich dem Product aus der Entfernung der „Achse in die Winkelgeschwindigkeit. Umgekehrt kann man „auch für eine gegebene fortschreitende Bewegung ein „gleichwertiges Drehungspaar einführen."

Drehung um zwei windschiefe Achsen. Die Achsen seien O und O_1, die Winkelgeschwindigkeiten δ und δ_1. Man denke sich zu den zwei Achsen noch eine dritte O_2 hinzu, die etwa parallel zu O_1 ist und O schneidet; bestimmt man für diese die Winkelgeschwindigkeit zu

$$O = \delta_1 - \delta_1$$

so wird dadurch an dem Ganzen nichts geändert. Es lassen sich nun $O(\delta)$ und $O_2(\delta_1)$ zu einer einzigen Drehung zusammensetzen, und $O_2(-\delta_1)$ und $O_1(\delta_1)$ bilden zusammen ein Drehungspaar, reduciren sich also auf eine fortschreitende Bewegung. Letztere kann man, wenn es wünschenswert erscheint, zerlegen in zwei Bewegungen, bzhw. parallel und normal zu der aus $O(\delta)$ und $O_2(\delta_1)$ resul-

tirenden Drehachse. Die Bewegung normal zu letzterer und die Drehung um dieselbe lassen sich zu einer einfachen Drehung um eine parallele Achse zusammensetzen, und demnach reducirt sich Alles auf eine cylindrische Schraubenbewegung, die im gegebenen Falle unschwer im einzelnen zu bestimmen ist.

In den folgenden Paragraphen sollen nun die in diesem Paragraphen teils direct vorliegenden, teils aus den allgemeinen Betrachtungen desselben abzuleitenden Resultate rechnungsmässig verwertet, und aus den entwickelten Formeln weitere Schlüsse gezogen werden.

Fortsetzung folgt.

XIV.

Nachtrag zu dem Beweise des Fermat'schen Satzes.

Von

G. Korneck.

1.

Der von mir in § 3. inbezug auf die Gleichung

$$nx^2 + ky^2 = z^n$$

ausgesprochene Satz ist in seinen letzten Worten „jeder Wert von x ist durch n teilbar" nicht richtig, wenn $n = 3$ und $k = 1$.

Denn für die Gleichung

$$3x^2 + y^2 = z^3$$

giebt es, wie Herr Schuhmacher (Göppingen) in Hoffmanns Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht (Jahrg. 25, Heft 5, S. 350) gezeigt hat, noch ein zweites Lösungsverfahren, welches für x Werte liefert, die nicht durch durch 3 teilbar sind.

In Folge dessen ist auch die Anwendung des Satzes in § 7, um die Unmöglichkeit von

$$x^3 + y^3 = z^3$$

zu beweisen, nicht zulässig, und die Gleichung

$$x^3 + y^3 = z^3$$

ist besonders zu behandeln, wie folgt:

Wenn x durch 3 nicht teilbar ist, so muss es entweder y oder z sein. Aus

$$z^3 - y^3 = x^3$$

folgt

1) $z - y = r^3$
2) $z^2 + yz + y^2 = s^3$ und
3) $x = r \cdot s$

Da es für die zweite Gleichung gleichgiltig ist, welche der beiden Zahlen, z oder y, durch 3 teilbar angenommen wird, so setzen wir z als teilbar durch 3 voraus.

Nun multipliciren wir diese Gleichung mit 64 und erhalten:

$$64z^2 + 2 \cdot 32yz + 16y^2 + 48y^2 = 64s^3$$

oder

$$(8z + 4y)^2 + 3 \cdot (4y)^2 = (4s)^3$$

Es sei nun

$$8z + 4y = p, \quad 4y = q, \quad 4s = t$$

so haben wir:

$$p^2 + 3q^2 = t^3$$

Nach dem ersten Lösungsverfahren setzen wir nun

1) $p + q\sqrt{-3} = (u + v\sqrt{-3})^3$
2) $p - q\sqrt{-3} = (u - v\sqrt{-3})^3$

und erhalten:

$$p^2 + 3q^2 = (u^2 + 3v^2)^3$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) ergeben sich für p und q die Werte

$$p = u^3 - 9uv^2$$
$$q = 3u^2v - 3v^3$$

Es ist also q durch 3 teilbar.

Bei dem zweiten Lösungsverfahren bezeichnen wir die beiden complexen dritten Wurzeln der Einheit mit ε_1 und ε_2

$$\varepsilon_1 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$$
$$\varepsilon_2 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$$

wir

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2=-1,\quad \varepsilon_1-\varepsilon_2=\sqrt{-3}$$

$$\varepsilon_1\varepsilon_2=1,\quad \varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2=-1,\quad \varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2=-\sqrt{-3}$$

$$\varepsilon_1^3=\varepsilon_2^3=1,\quad \varepsilon_1^4=\varepsilon_1,\quad \varepsilon_2^4=\varepsilon_2$$

Setzen wir nun:

1) $p+q\sqrt{-3}=\varepsilon_1(u+\varepsilon_1 v)^3$

2) $p-q\sqrt{-3}=\varepsilon_2(u+\varepsilon_2 v)^3$

so ergiebt sich

3) $p^2+3q^2=(u^2-uv+v^2)^3$

4) $p+q\sqrt{-3}=\varepsilon_1 u^3+3\varepsilon_1^2u^2v+3uv^2+\varepsilon_1 v^3$

5) $p-q\sqrt{-3}=\varepsilon_2 u^3+3\varepsilon_2^2u^2v+3uv^2+\varepsilon_2 v^3$

6) $2p=-u^3-3u^2v+6uv^2-v^3$

7) $2q=u^3-3u^2v\qquad\qquad+v^3$

8) $p+q=3uv(v-u)$

Im ersten Falle ist also:

$$q-4y=3v(u+v)(u-v)$$

also

$$y=3\cdot\frac{v(u+v)(u-v)}{4}$$

Im zweiten Falle ist:

$$p+q=8(z+y)=3uv(v-u)$$

also

$$z+y=3\cdot\frac{uv(v-u)}{8}$$

Da z nach Voraussetzung durch 3 teilbar ist, so muss auch im zweiten Falle y durch 3 teilbar sein.

In jedem Falle wären also in der Gleichung

$$x^3+y^3=z^3$$

die beiden Zahlen y und z durch 3 teilbar, während nach Voraussetzung die dritte x durch 3 unteilbar ist. Da dies unmöglich ist, so ist die Gleichung

$$x^3+y^3=z^3$$

für ganze Zahlen unmöglich.

2.

In dem Beweise in § 3. habe ich angenommen, dass möglicherweise auch gebrochene rationale Werte von λ und φ für x, y, z ganze Zahlen ergeben könnten. Es lässt sich aber zeigen, dass dies nur Brüche mit dem Nenner 2 sein können.

Nehmen wir zunächst $n=5$, so haben wir

$$x\sqrt{5}=\alpha^5-10\alpha^3\beta^2+5\alpha\beta^4$$

und aus

$$\alpha^2+\beta^2=z \quad \text{folgt} \quad \beta^2=z-\alpha^2$$

Es ergiebt sich also

$$\begin{aligned} x\sqrt{5} &= \alpha^5-10\alpha^3z+5\alpha z^2 \\ &\quad +10\alpha^5-10\alpha^3z \\ &\quad +5\alpha^5 \\ x\sqrt{5} &= 16\alpha^5-20\alpha^3z+5\alpha z^2 \end{aligned}$$

Verfährt man ebenso mit der Formel für $x\sqrt{n}$, so ist der Coefficient von α^n die Summe $1+n_2+n_4+n_6 \ldots +n_{n-1}$. Da nun die Summe aller Binomialcoefficienten 2^n ist, so ist die halbe Summe 2^{n-1}, und da die übrigen Coeficienten durch n teilbar sind, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$x\sqrt{n}=2^{n-1}\alpha^n-ng_1\alpha^{n-2}z+ng_2\alpha^{n-4}z^2-ng_3\alpha^{n-6}z^4+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot n\alpha z^{\frac{n-1}{2}}$$

Setzt man nun

$$\alpha=\frac{\gamma}{\delta}\sqrt{n}$$

so ergiebt sich nach Multiplication mit δ^n:

$$x\delta^n=2^{n-1}n^{\frac{n-1}{2}}\gamma^n-n^{\frac{n-1}{2}}g_1\gamma^{n-2}z\delta^2+n^{\frac{n-3}{2}}g_2\gamma^{n-4}z^2\delta^4$$
$$-n^{\frac{n-5}{2}}g_3z^3\gamma^{n-6}\delta^6\ldots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}ny^{\frac{n-1}{2}}\delta^{n-1}$$

Für β wäre dann zu setzen:

$$\beta = \frac{\varepsilon}{\delta}\sqrt{k}$$

und man hätte

$$s\delta^2 = ny^2 + k\varepsilon^2$$

Da n und k relativ prim sind, kann δ nicht durch n teilbar sein; es müsste also infolge der vorangehenden Gleichung $\delta = 2$ sein, weil das erste Glied rechts den Factor δ^2 haben müsste.

Also könnte in den Gleichungen 3), 4), 5) nur gesetzt werden

$$\lambda = \frac{\gamma}{2}, \quad \varphi = \frac{\varepsilon}{2}$$

wenn x, y, z ganze Zahlen sein sollen, und es bliebe x durch n teilbar.

XV.

Anwendungen des Ameseder'schen Nullsystems *).

Von

Hermann Oppenheimer

in Dettensee.

Einleitung.

Vor einiger Zeit habe ich mich mit der Construction und Behandlung eines ebenen Nullsystems beschäftigt, nachdem meine diesbezüglichen Recherchen in der geometrischen Litteratur zu keinem Ergebniss geführt hatten. Erst Herr Professor Reye in Strassburg, der so gütig war, meine Abhandlung einer Durchsicht zu unterziehen, fand, dass bereits im Jahre 1881 in der oben citirten Abhandlung ein solches System von Herrn Ameseder behandelt worden sei. Wenn nun dieses System in sich selbst auch höchst interessant ist, so scheine ich demnach doch zu der Vermutung berechtigt zu sein, dass dasselbe Anwendung auf anderweitige geometrische Theorien noch nicht gefunden hat. Die nachfolgende Abhandlung soll die Fruchtbarkeit des Systems für die Theorie der Curven dritter Ordnung dartun.

I.

1) Der leichteren Orientirung wegen sollen die wesentlichen Eigenschaften des Ameseder'schen Nullsystems hier in Kürze ange-

*) Ameseder: „Ueber ein Nullsystem des zweitten Grades." LXXXIII. Band der Sitzb. d. k. Akad. der Wissenschaften in Wien II. Abth. Febr.-Heft Jahrgang 1881.

geben werden. Das Ameseder'sche Nullsystem ist ein ebenes System, in welchem einer Geraden ein auf ihr liegender Punkt und diesem Punkte dieselbe Gerade eindeutig entspricht. Das System ist quadratisch: den Strahlen eines Strahlenbüschels entspricht als Ort der zugehörigen Nullpunkte ein Kegelschnitt, der natürlich durch das Centrum des Strahlenbüschels gehen muss, weil ja das Centrum auch eine Nullgerade hat; diese berührt eben den Kegelschnitt im Centrum. Alle diese Nullpunktskegelschnitte haben drei Punkte gemeinsam, die drei Doppelpunkte des Systems. Ein solcher Doppelpunkt zeichnet sich dadurch aus, dass ihm nicht ein einziger Strahl als Nullgerade entspricht, sondern unendlich viele, alle die durch ihn hindurchgehen.

Reciprok ist die Enveloppe der Nullgeraden einer Punktreihe ein Kegelschnitt, dem dieses Doppeldreieck umschrieben ist. Jeder Seite des Doppeldreiecks entsprechen ihre sämtlichen Punkte als zugehörige Nullpunkte. Das Doppeldreieck habe die Seiten a, b, c und die Ecken A, B, C. A liege a gegenüber etc. Der Nullpunktskegelschnitt eines Strahlenbüschels, dessen Centrum X auf einer Doppelseite a liegt, zerfällt in diese Doppelseite und eine Gerade x, welche durch den Doppelpunkt A geht. Diese Gerade x schneidet auf den Strahlen des Strahlenbüschels X die Nullpunkte aus. Die Strahlen x durch A und die Punkte X auf a sind projectivisch. Die auf a liegenden Doppelpunkte B und C sind solche Centren X, die von den ihnen zugehörigen Strahlen x, nämlich resp. b und c getroffen werden, im Einklange mit der Tatsache, dass einem Strahl durch einen Doppelpunkt der Doppelpunkt selbst als Nullpunkt entspricht. Man kann daher mit Hilfe einer Doppelseite und des ihr gegenüberliegenden Doppelpunktes — und es ist gleichgiltig, welches Doppelelementpaar man dazu benutzt — in folgender Weise zu einer beliebigen Geraden m ihrem Nullpunkt M construiren.

Die Gerade m schneide a in X_m; man bestimme das dem Punkte X_m entsprechende Element x_m des der Punktreihe der X projectivischen Strahlenbüschels der x, so schneidet x_m auf m den gesuchten Nullpunkt aus.

Den Ausgangspunkt für unsere curventheoretischen Untersuchungen bildet die Aufgabe, ein Nullsystem zu construiren, wenn sieben Paare entsprechender Elemente gegeben sind, und diese Aufgabe erheischt, dass wir uns zunächst mit der „gemeinsamen Nullpunktscurve" zweier Systeme, d. h. mit dem Orte derjenigen Punkte, die in Bezug auf beide Systeme dieselben Nullgeraden haben, resp. mit der reciproken Curve, der Enveloppe dieser Nullgeraden, der „gemeinsamen Nullgeradenenveloppe", beschäftigen.

2) Die beiden Nullsysteme seien von einander unterschieden als System I und System II. Das Doppeldreieck von I sei A_1, B_1, C_1 mit den Seiten a_1, b_1, c_1, das von II A_2, B_2, C_2 mit den Seiten a_2, b_2, c_2. Der Nullpunkt von a_2 in Bezug auf I sei P_1. Dann ist der Nullpunktskegelschnitt, der zu irgend einem Punkte Q von a_2 in Bezug auf das System I gehört, derjenige Kegelschnitt K_Q, der durch A_1, B_1, C_1', P_1 und Q geht. Allen Punkten Q von a_2 entsprechen alle Kegelschnitte durch A_1, B_1, C_1, P_1. In Bezug auf das System II entspricht dem Punkte Q als Punkt einer Doppellinie ein Strahl s_q durch den gegenüberliegenden Doppelpunkt A_2. Die Schnittpunkte von s_q und K_Q, X_1 und X_2, sind offenbar solche Punkte, die in Bezug auf beide Systeme dieselben Nullgeraden haben, also Punkte des gesuchten Ortes. Da der Strahlenbüschel der s_q projectivisch ist dem Kegelschnittbüschel der K_Q, indem zwei entsprechende Elemente s_q und K_Q Nullpunksörter für denselben Punkt Q sind, der umgekehrt auch eindeutig bestimmt ist, wenn einer der Nullpunktsörter gegeben ist, so sind also die Punkte der gemeinsamen Nullpunktscurve die Durchschnittspunkte eines Kegelschnittbüschels und eines projectivischen Strahlenbüschels, also die Punkte einer Curve dritter Ordnung; dieselbe geht bekanntlich durch die vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels und das Centrum des Strahlenbüschels hindurch, in unserem Falle also durch A_1, B_1, C_1, P_1, A_2, also: die sechs Doppelpunkte liegen auf der gemeinsamen Nullpunktscurve, und der dritte Schnittpunkt einer Doppellinie des einen Systems mit der Curve ist ihr Nullpunkt in Bezug auf das andere System; die Ecke eines der beiden Doppeldreiecke und dieser Nullpunkt einer vierten Doppellinie haben als beigeordneten Rest den dieser vierten Doppellinie gegenüberliegenden Doppelpunkt. Die gemeinsame Nullgeradenenveloppe ist, wie die reciproke Betrachtung ergibt, eine Curve dritter Classe, von der die Doppellinien Tangenten sind. Dabei ist noch folgendes zu bemerken: sobald der Strahlenbüschel der s_q, der Kegelschnittbüschel der K_Q und die projectivische Beziehung zwischen beiden gegeben ist, steht die gemeinsame Nullpunktscurve fest, und doch ist damit noch nicht festgestellt, was für eine Gerade a_2 durch P_1 die dem Punkt A_2 gegenüberliegende Doppellinie sein soll. Es gibt also unendlich viele Nullsystempaare, die 4 Doppelpunkte und dieselbe Nullpunktscurve gemeinsam haben. Am Ende des nächsten Paragraphen werden wir im Anschluss an diese Tatsache neue interessante Beziehungen kennen lernen.

3) Gegeben sind sieben beliebige Geraden 1–7, jeder dieser Geraden ist einer ihrer Punkte, resp. I—VII als ihr Nullpunkt zugewiesen. Man soll zu irgend einer Geraden 8 der Ebene ihren Nullpunkt VIII bestimmen.

Dass es nur ein solches Doppeldreieck gibt, d. h. dass unser System eindeutig ist, geht aus folgender Erwägung hervor: würde es mehrere Doppeldreiecke geben, also mehrere Nullsystene, so würden je zwei von den Systemen Anlass geben zu einer gemeinsamen Nullpunktscurve und einer Nullgeradenenveloppe. Auf der ersteren müssten nach den Erörterungen der vorigen Aufgabe ausser den Punkten I—VII auch die sechs Doppelpunkte der beiden Systeme liegen. Nun ist aber eine solche Nullpunktscurve als Curve dritter Ordnung durch 9 Punkte bestimmt. 10 beliebige Punkte der Ebene werden im allgemeinen nicht einer solchen Curve angehören. Ist uns also irgend ein Nullsystem gegeben und wir greifen ganz willkürlich 7 Geraden mit ihren Nullpunkten heraus, so werden diese 7 Punkte mit den drei Doppelpunkten des Systems nicht einer Curve 3. Ordnung angehören. Andrerseits müssten wir aber doch, wenn wir jetzt umgekehrt zu diesen 7 Elementpaaren das System construirten, unter den verschiedenen eventuellen Lösungen auch dieses angenommene System bekommen. Wir kommen also durch die Annahme der Mehrdeutigkeit unserer Aufgabe zu dem Widerspruche, dass zehn Punkte, die wir so wählen können, dass sie nicht einer Curve dritter Ordnung angehören, unter allen Umständen auf einer solchen liegen müssten. Die Aufgabe ist also eindeutig.

Der Entwicklung unserer Lösung müssen nun noch die Erklärung einiger Abkürzungen und einige geometrische Beziehungen vorausgeschickt werden, die im Folgenden jeden Augenblick wiederkehren werden. Unter $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) wollen wir einen Kegelschnitt verstehen, der die Geraden 1, 2, 3, 4 berührt, unter K (I. II, III, IV) einen solchen, der durch die Punkte I, II, III, IV geht. Der Büschel der K (I, II, III, IV) ist der Büschel aller derjenigen Kegelschnitte, welche durch die Punkte I, II, III, IV gehen etc. Irgend ein $K(\ldots)$ hat das Doppelverhältniss m, das heisse: jeder seiner Punkte bildet mit den vier in der Klammer angegebenen Punkte dies Doppelverhältniss, das Doppelverhältniss μ eines $\mathfrak{K}(\ldots)$ habe die reciproke Bedeutung. Die geometrischen Beziehungen, die wir nötig haben, sind folgende:

a) Werden die Büschel der K (I, II, III, V) und der K (I, II, III, VI) projectivisch aufeinander bezogen, so ist der Ort des vierten Schnittpunktes entsprechender Kegelschnitte eine Curve 4. Ordnung, die die drei allen gemeinsamen Schnittpunkte I, II, III zu Doppelpunkten hat.

b) Diese Curve kann auch zerfallen. So z. B. ist eine projectivische Beziehung zwischen den beiden Büscheln durch

die Bestimmung hergestellt, dass dieser Ort ein K (I, II, III, IV) sein soll.

Diese und die reciproken Beziehungen werden wir verwenden.

Um nunmehr zur Lösung selber überzugehen, so beruht dieselbe auf dem am Eingange erwähnten Grundgesetze, dass wenn a eine Doppellinie und A der gegenüberliegende Doppelpunkt ist, die Schnittpunkte $(a, 1)$, $(a, 2)$, $(a, 3)$, $(a, 4)$, $(a, 5)$, $(a, 6)$, $(a, 7)$ dieselben Doppelverhältnisse bilden, wie resp. die Verbindungslinien (A, I), (A, II), (A, III), (A, IV), (A, V), (A, VI), (A, VII). Gelingt es uns, zu den sieben gegebenen Elementpaaren eine Linie a und einen Punkt A mit dieser Eigenschaft zu finden, dann ist unsere Aufgabe gelöst. Dies suchen wir durch unsere Kegelschnittbüschel und -schaaren in der Weise zu erreichen, dass wir vier Kegelschnitte K (I, II, III, IV), K (I, II, III, V), K (I, II, III, VI), K (I, II, III, VII) zu construiren versuchen, die einen gemeinsamen vierten Schnittpunkt A haben, so dass die $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 4), $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 5), $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 6), $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 7), die resp. dasselbe Doppelverhältniss haben, eine vierte gemeinsame Tangente a haben. Wir sehen zunächst von dem Elementpaar 7, VII ab und suchen den Ort der Doppelpunkte A und die Enveloppe der zugehörigen a für die Elementpaare 1, I—6, VI zu bestimmen.

Nehmen wir irgend einen K_x (I, II, III, IV) und weisen jedem K (I, II, III, V) denjenigen K (I, II, III, VI) als entsprechend zu, der mit ihm den vierten Schnittpunkt mit K_x (I, II, III, IV) gemeinsam hat, so ist nach Satz b damit eine projectivische Beziehung zwischen diesen beiden Büscheln hergestellt. Lassen wir ferner jedem K (I, II, III, V) denjenigen $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 5) entsprechen, dessen Doppelverhältniss μ gleichen Wert mit dem Doppelverhältniss m des ersteren hat, so ist damit ebenfalls eine projectivische Beziehung zwischen Büschel und Schaar hergestellt. Beziehen wir in gleicher Weise die Schaar der $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 6) auf den Büschel der K (I, II, III, VI), so ist durch die eben festgesetzte projectivische Beziehung zwischen K (I, II, III, V) und den K (I, II, III, VI) auch eine projectivische Beziehung zwischen den $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 5) und den $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 6) hergestellt; einem beliebigen $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 5) kommt ein bestimmtes Doppelverhältniss μ zu; denselben Wert hat das Doppelverhältniss m eines bestimmten K (I, II, III, V). Dieser schneidet den K_x (I, II, III, IV) in einem vierten Punkte. Durch diesen geht ein bestimmter K (I, II, III, VI) mit einem Doppelverhältniss m_1 und es gibt einen einzigen $\mathfrak{R}$ (1, 2; 3, 6), dessen Doppelverhältniss

$$\mu_1 = m_1$$

ist. Die so auf einander bezogenen $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 5) und $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 6) sind also auch projectivisch. Das Erzeugniss ihrer vierten gemeinsamen Tangenten wird aber im allgemeinen nicht wieder ein Kegelschnitt sein, da ja nach Voraussetzung durch die Punkte I—VII die Geraden 1—7 ganz willkürlich gezogen sind, sondern eine Curve vierter Classe mit den Doppeltangenten 1, 2, 3. Eine Curve vierter Classe hat mit einem Kegelschnitt acht Tangenten gemeinsam. Diese Enveloppe wird also ausser ihren drei Doppeltangenten mit $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 4) noch zwei weitere Tangenten gemeinsam haben, t_1 und t_2. Jede von diesen beiden Tangenten berührt also je einen Kegelschnitt der drei Schaaren; die entsprechenden Kegelschnitte der drei Büschel gehen durch einen und denselben vierten Punkt, resp. T_1 und T_2 auf K_x (I, II, III, IV); es ist also klar, dass T_1 und T_2 Punkte des gesuchten Ortes, t_1 und t_2 Tangenten der gesuchten Enveloppe sind. Auf jedem solchen K_x aus dem Büschel der K (I, II, III, IV) liegen ausser I, II, III, die ja wol auch dem gesuchten Orte angehören werden, zwei weitere Punkte T_1 und T_2; an jeden $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 4) gehen zwei weitere Tangenten t_1, t_2. Es handelt sich darum die Ordnung dieser Curve der T_1, T_2 resp. die Classe der reciproken Curve festzustellen. Dazu kommen wir durch folgende Erwägung: Hat man einen Doppelpunkt T und die zugehörige Doppellinie t bestimmt, so hat es keine Schwierigkeit, auf t die beiden weiteren Doppelpunkte zu construiren, mit Hilfe der Bedingung T (I, II, III, IV, V, VI) $\overline{\wedge}$ t (1, 2, 3, 4, 5, 6). Zwei mögliche Doppeldreiecke liegen, wie wir wissen, mit den Punkten I—VI auf einer Curve dritter Ordnung, der gemeinsamen Nullpunktscurve. Wüssten wir im voraus, dass die drei Punkte eines Doppeldreiecks mit den sechs Punkten I—VI die Punkte einer einzigen Curve dritter Ordnung sind, so wäre damit festgestellt, dass der gesuchte Ort dritter Ordnung ist. Denn die Endpunkte zweier beliebigen Doppeldreiecke liegen mit den Punkten I—VI auf einer solchen C_3, die durch ein einziges solche Doppeldreieck schon eindeutig bestimmt ist; ihr müssten also alle Doppeldreiecke einbeschrieben sein. Es wäre aber ja doch denkbar, dass die Ecken eines Doppeldreiecks mit den Ecken I—VI die Grundpunkte eines Büschels von C_3 bildeten, deren jeder zwei Dreiecke einbeschrieben wären. Diese Annahme widerlegt sich, ganz abgesehen von den Widersprüchen, die sich dann aus unserer Construction der Curve ergeben würden, am besten in folgender Weise: da jedes solche Dreieck mit den Punkten I—VI Anlass zu einem Curvenbüschel gibt, jeder Curvenbüschel aber eine Curve enthalten müsste, der das gesuchte Doppeldreieck — das auch dem Elementpaar 7. VII genügt — einbeschrieben wäre, so würde auch dieses Doppeldreieck mit I—VI die Grundpunkte

eines Büschels bilden. Dann müssten seine drei Ecken, wenn wir Elementpaar VI, 6 mit VII, 7 vertauschen, auch mit den Punkten I. II, III, IV, V, VII die 9 Grundpunkte eines Büschels bilden. Das ist aber nicht möglich. Denn 8 Punkte können nicht zwei verschiedene Punkte VI und VII als beigeordneten Rest haben. Also: die Ecken aller zu sechs Elementpaaren möglichen Doppeldreiecke liegen mit den Nullpunkten auf einer Curve dritter Ordnung, die Seiten berühren mit den Nullgeraden eine Curve dritter Classe. Von der Curve dritter Ordnung als gegebener Nullpunktscurve ausgehend, können wir das Resultat so aussprechen:

„Bestimmt man die Enveloppe der Nullgeraden einer Curve dritter Ordnung in Bezug auf ein Nullsystem, dessen Doppeldreieck der Curve einbeschrieben ist, so erhält man eine Curve dritter Classe. Das Doppeldreieck ist dieser Enveloppe natürlich umschrieben. Ausser diesem Dreieck aber gibt es noch unendlich viele andere, welche auch dieser Enveloppe umschrieben und der C_3 einbeschrieben sind. Jedes dieser Dreiecke kann die Stelle des Doppeldreiecks versehen. d. h. wenn wir irgend eines dieser Dreiecke zum Doppeldreieck eines Nullsystems wählen und irgend einem Punkt der C_3 die Nullgerade des anfänglichen Systems auch in Bezug auf dieses neue System zuweisen, so haben alle Curvenpunkte in Bezug auf beide Systeme dieselben Nullgeraden. In Bezug auf alle so herstellbaren Nullsysteme ist die C_3 die gemeinsame Nullpunktcurve, die Curve 3ter Classe (-„C^{3}“) die gemeinsame „Nullgeradenenveloppe“. Durch jeden Punkt der C_3 gehen an die C^3 drei Tangenten: eine derselben ist die Nullgerade des Punktes, die andern beiden s_1 und s_2 die durch diesen Punkt gehenden Doppellinien; die dritte zugehörige Doppellinie, die das Doppeldreieck vervollständigt, ist die Verbindungslinie derjenigen beiden Schnittpunkte von s_1, s_2 mit der C_3, die nicht ihre Nullpunkte sind. Reciprok schneidet jede Tangente der C^3 die C_3 in drei Punkten, deren einer der Nullpunkt der Tangente ist. Die andern beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 sind die beiden Doppelpunkte dieser Tangenten, der dritte zugehörige Doppelpunkt wird ausgeschnitten von denjenigen beiden Tangenten durch S_1 und S_2, die nicht ihre Nullgeraden sind. Zwei beliebige solche Doppeldreiecke liegen, wie aus den Schlussbemerkungen des vorigen Abschnittes sich ergiebt, derartig zu einander, dass zu den drei Ecken des einen Dreiceks und dem Nullpunkt einer Seite des zweiten Dreiecks die Gegenecke dieser Seite der beigeordnete Rest ist.

Haben wir nun mit Hilfe der Elementpaare I bis VI, 1 bis 6, das eine Curvenpaar, wir wollen es für die Folge $C_{3(VI)}$ und $C^{3}_{(6)}$ nennen, construirt, so können wir, indem wir ein Elementpaar, etwa

6, VI, durch 7, VII ersetzen, in derselben Weise ein zweites Curvenpaar $C^3_{(VII)}$ und $C^3_{(7)}$ herstellen, dem auch das gesuchte Doppeldreieck ein- resp. umschrieben sein muss, und zwar können der Eindeutigkeit der Lösung wegen nur drei von den neuen Durchschnittspunkten sich für die gesuchten Doppelpunkte eignen. In der Tat: fünf von diesen neun Punkten sind die Punkte I—V. Der sechste Punkt, der nicht Doppelpunkt sein kann, wird in folgender Weise erhalten: die Geraden 1—5 bilden einen Kegelschnitt, der sowol als $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 4) wie als $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 5) betrachtet werden kann; in dem einen Falle entspricht ihm aber ein bestimmter K (I, II, III, IV), in dem andern ein bestimmter K (I, II, III, V) und diese beiden Kegelschnitte werden im allgemeinen nicht auch zusammenfallen, wenn die Geraden 1—5, die wir den Punkten I—V zuweisen, ganz beliebig sind. Sie werden also einen weiteren Punkt P gemeinsam haben. P ist offenbar ein Punkt beider C_3. 1) geht durch P ein K (I, II, III, VI); ihm entspricht ein $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 6); $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 4, 5) und $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 6) haben eine weitere gemeinsame Tangente p. p ist die P gegenüberliegende Doppellinie in Bezug auf das Elementpaar 1—6, I—VI, denn durch P gehen drei Kegelschnitte, K (I, II, III, IV), K (I, II, III, V), K (I, II, III, VI), und die entsprechenden Kegelschnitte der drei Schaaren $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 4), $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 5), $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 6), wovon die ersten beiden zufällig zusammenfallen, haben p zur vierten gemeinsamen Tangente. Durch P geht 2) ein K (I, II, III, VII); der entsprechende ($\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 7) hat mit $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 4, 5) eine vierte Tangente p' gemeinsam, und es ist wiederum klar, dass P und p' zusammengehörige Doppelelemente in Bezug auf 1, I—2, II—3, III—4, IV—5, V—7 VII sind.

P ist also der uns noch fehlende sechste Durchschnittspunkt der $C_{3(VI)}$ und $C_{3(VII)}$, kann aber nicht Doppelpunkt sein, weil ihm in Bezug auf die zwei Gruppen von sechs Elementpaaren zwei verschiedene Doppellinien, resp. p und p' entsprechen. Die sechste gemeinsame Tangente der beiden Curven $C^3_{(VI)}$ und $C^3_{(VII)}$, die keine gesuchte Doppellinie sein kann, wird reciprok der eben angeführten Construction vermittelst des Kegelschnittes K (I, II, III, IV, V) erhalten. Diese Linie muss notwendig die Nullgerade zum Punkte P sein. Jede C^3 lässt sich ja doch als die Enveloppe der Nullgeraden zu der zugehörigen C_3 auffassen in Bezug auf unendlich viele Nullsysteme, deren Doppeldreiecke alle der C_3 einbeschrieben sind, unter anderen auch in Bezug auf das gesuchte Nullsystem. Dieses liefert aber zu einem und demselben Punkte P nur eine Nullgerade t.

Anm. 2. Es ergibt sich aus dieser Erwägung folgende merkwürdige Beziehung: Hat man fünf beliebige Punkte I—V, und durch

jeden Punkt geht eine Gerade, resp. 1—5, so umhüllen die 5 Geraden einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4, 5), gleiches Doppelverhältniss haben mit ihm resp. ein K (I, II, III, IV) und ein K (I, II, III, V), die einen 4. Punkt P gemeinsam haben. Ebenso haben die zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ (1, 3, 3, 4) und $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 5), welche dem Kegelschnitt K (I, II, III, IV, V) entsprechen, eine vierte Tangente t gemeinsam. t geht durch P.

Um nun unsere Aufgabe, zum Punkte VIII die Nullgerade 8 zu bestimmen, linear lösen zu können, ist es notwendig, dass wir die Curven $C_{3\,VI}$, $C_{3\,VII}$ und C^3_{VI}, C^3_{VII} linear construiren können. Diese Construction ergibt sich unmittelbar aus der Möglichkeit, den Punkt P und seine Nullgerade t linear zu construiren. Denn wir können aus den sechs Elementpaaren I—VI, 1—6, sechs verschiedene Gruppen von fünf Elementpaaren herstellen, und jede Gruppe ergibt ein solches Elementpaar P. t, von welchem P der $C_{3(VI)}$, t der $C^3_{(VI)}$ angehört.

Da wir also diese beiden Curvenpaare zeichnen können, so lässt sich zu Punkt VIII in folgender Weise seine Nullgerade 8 bestimmen: wir verbinden VIII mit I und bestimmen die zwei weiteren Tangenten, die ausser 1 von I an die C^3_{VI} und die zwei, welche noch an die C^3_{VII} gehen — die Aufgabe, von einer Geraden, deren einen Schnittpunkt mit einer C_3 man kennt, die beiden andern Schnittpunkte zu bestimmen, lässt sich auf mannigfache Art linear lösen; eine Lösung soll weiter unten angegeben werden —, bestimme auf diesen vier Geraden ihre Nullpunkte (einer von den Schnittpunkten ist jedesmal der zu I gehörige Doppelpunkt, der dritte ist eben dieser Nullpunkt. Die 4 Geraden seien t_1, t_2, t_3, t_4, ihre Nullpunkte resp. T_1, T_2, T_3, T_4; der Kegelschnitt, der durch T_1, T_2, T_3, T_4 geht und 1 in I berührt, ist der Nullpunktskegelschnitt zu I in Bezug auf das gesuchte System; er schneide die Gerade VIII—I in A; dann ist A der Nullpunkt dieser Geraden, in der gleichen Weise können wir den Nullpunkt B der Geraden VIII—II den Nullpunkt C der Geraden VIII—III den Nullpunkt D der Geraden VIII—IV bestimmen. Der Kegelschnitt, der durch VIII, A, B, C, D geht, ist der Nullpunktskegelschnitt zu VIII, seine Tangente 8 in VIII ist die Nullgerade zu VIII. Die Bestimmung des Nullpunktes VIII, wenn die Gerade 8 gegeben ist, ist reciprok.

II.

Wir gehen nun zu den Anwendungen des Systems über. Aus dieser Construction eines ebenen Nullsystems aus sieben seiner

Elementpaare ergeben sich einige besonders einfache Lösungen von Problemen der linearen Construction von Curven dritter Ordnung:

1) Zu acht Punkten eines Curvenbüschels den neunten zu finden:

Die 8 Punkte seien benannt mit I, II, III, IV, V, A, B, C. Man zeichne das Dreieck ABC und mache es zum Doppeldreieck eines beliebigen Nullsystems. Die Nullgeraden der 5 anderen Punkte seien resp. 1, 2, 3, 4, 5. Die beiden Kegelschnitte K (I, II, III, IV) und K (I, II, III, V), die gleiches Doppelverhältniss mit $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4, 5) haben, jenachdem man diesen Kegelschnitt als $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) oder als $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 5) betrachtet, schneiden sich in einem vierten Punkte P, der der gesuchte ist.

2) eine C_3 zu construiren aus 9 gegebenen Punkten I, II, III, IV, V, VI, A, B, C.

Man stelle wieder ein Nullsystem mit dem Doppeldreieck A, B, C her. Die Nullgeraden der anderen sechs Punkte seien resp. 1, 2, 3, 4, 5, 6. Die Gerade 6 ist Tangente an einen $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) und an einen $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 5); die beiden entsprechenden Kegelschnitte K (I, II, III, IV) und K (I, II, III, V) schneiden sich in einem weiteren Punkte P, der zugleich ein Punkt der C_3 ist.

3) wenn man von einer Geraden x einen Durchschnittspunkt X_1 mit einer C_3 kennt, die beiden andern Durchschnittspunkte X_2 und X_3 zu construiren. Man construire ein beliebiges Nullsystem, dessen Doppeldreieck der C_3 einbeschrieben ist, und von welchem x, X_1 ein Elementpaar ist. Dann bestimme man von den unendlich vielen der C_3 einbeschriebenen Doppeldreiecken, die man zur Erzeugung derselben Nullgeradenenveloppe benutzen kann, dasjenige, von welchem x eine Seite ist. Die beiden auf x liegenden Ecken desselben sind die gesuchten Punkte X_2 und X_3.

4) zu einer beliebigen Tangente p einer C^3 den Berührungspunkt P zu construiren. Zum Verständniss der Lösung müssen wir wieder auf die Construction der Curven C_3 und C^3 aus sechs Elementpaaren zurückgreifen. Ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) gab mit den beiden Scharen der $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 5) und $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 6) Anlass zu einer Curve vierter Classe; die zwei weiteren Tangenten, welche diese Curve ausser den drei Doppeltangenten 1, 2, 3 mit $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) gemeinsam hatte, waren Tangenten der gesuchten C^3, die also mit diesem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) die Tangenten 1, 2, 3, 4 und eben diese beiden Tangenten, t_1 und t_2, gemeinsam hatte. Nun berührt die Gerade 4 einen $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 5) und einen $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 6); ihnen entsprechen resp. ein K (I, II, III, V) und ein K (I, II, III,

VI), die sich in einem vierten Punkte P schneiden, durch den auch ein bestimmter K (I, II, III, IV) geht. Der entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) gibt zu einer Curve vierter Classe Anlass, die die mit diesem $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) die drei Doppeltangenten 1, 2, 3 die Tangente 4 und dann nur noch eine weitere Tangente A gemeinsam hat. Folglich hat die C^3 mit diesem $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) nur fünf Tangenten gemeinsam, und man kann sich mit der Erwägung, dass die Kegelschnitte einer Schaar durch continuirliche Veränderung eines derselben sich beschreiben lassen, leicht klar machen, dass die sechste Tangente mit 4 zusammenfällt und die Gerade 4 in ihrem Berührungspunkte mit $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) schneidet, der also auch der Berührungspunkt der C^3 ist. Daraus ergibt sich die folgende Construction der Aufgabe, zu einer beliebigen Tangente einer C^3 den Berührungspunkt zu construiren. Man beschreibe der C^3 ein beliebiges Dreieck um und mache es zum Doppeldreieck eines beliebigen Nullsystems. Man greife fünf beliebige Tangenten mit ihren Nullpunkten.

1, I, 2, II, 3, III, 5, V, 6, VI, heraus, wähle die Tangente p, deren Berührungspunkt P wir bestimmen wollen, und ihren Nullpunkt $\mathfrak{P}$ zum Elementpaar 4, IV und bestimme in der eben erläuterten Weise den zu 4 gehörigen $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4), der eben p in diesem Punkte P berührt. Auf die reciproke Construction brauche ich wol nicht weiter einzugehen.

III.

Unter einem einer C_3 einbeschriebenen Nullsystembüschel wollen wir für die Folge die Gesamtheit aller Nullsysteme verstehen, zu denen die C_3 gemeinsame Nullpunktscurve ist, und die sechs gegebene Elementpaare gemeinsam haben (deren Nullpunkte also auf dieser C_3 liegen); alle Doppeldreiecke dieser Systeme sind also dieser C_3 einbeschrieben. Für die Folge werden wir den Begriff des Nullsystembüschels auch auf die Gesamtheit dieser Doppeldreiecke übertragen. Die Angehörigkeit zweier solchen Dreiecke zu einem und demselben Nullsystembüschel soll dadurch ausgedrückt sein, dass wir die Dreiecke „coordinirt" nennen.

Es soll zunächst folgender Satz bewiesen werden, der die Umkehrung der eben gewonnenen Beziehung zwischen Nullpunktscurve und Nullgeradenenveloppe bildet:

Jede einfach unendliche Mannigfaltigkeit erster Ordnung von Dreiecken, die einer C_3 einbeschrieben und einer C^3 umschrieben

sind, enthält alle Dreiecke eines den beiden Curven ein- resp. umschriebenen Nullsystembüschels. Eine solche Mannigfaltigkeit ist dann jedenfalls von der ersten Ordnung, wenn jeder Punkt X der C_3 Eckpunkt eines einzigen Dreiecks ist. Denn alle Punkte einer C_3 machen eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit vom dritten Grade aus. Nun bilden doch immer drei von den Punkten der Curve die Ecken eines einzigen Dreiecks. Folglich wird die Mannigfaltigkeit der Dreiecke einfach unendlich vom ersten Grade sein. Man kann das ja auch daraus erkennen, dass aus dem Büschel der Nullsysteme ein System eindeutig bestimmt ist, sobald man einer bel. Geraden irgend einen ihrer Punkte M als Nullpunkt zuweist. Es gibt also genau soviel Dreiecke, als eine Gerade m Punkte hat. Auf dieser Tatsache beruht der nachfolgende Beweis des Satzes:

Irgend ein Punkt A_x der C_3 ist Eckpunkt eines Dreiecks $A_xB_xC_x$. Dann geht an die C^3 durch A_x noch eine Tangente a_x. Irgend ein anderer Punkt A_λ ist ebenfalls sowol Eckpunkt eines Dreiecks, als Schnittpunkt einer dritten Tangente a_λ. Nehmen wir nun auf a_λ einen beliebigen Punkt M an und construiren alle diejenigen Kegelschnitte, welche durch M, A_λ gehen und je einem Dreieck unserer gegebenen Mannigfaltigkeit umschrieben sind, so erhalten wir genau so viel Kegelschnitte, als Dreiecke vorhanden sind, also eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit vom ersten Grade. Eine solche Mannigfaltigkeit ist aber ein Kegelschnittbüschel, und ein solcher wird ausser den zwei Punkten M, A_λ noch zwei Punkte Q_1 Q_2 als Grundpunkte haben. (Dass sie nicht immer imaginär sein können, werden wir alsbald erkennen.) Dann haben die Geraden MQ_1 und MQ_2 offenbar die Eigenschaft, dass, wenn man alle Nullsysteme bildet, in Bezug auf welche A_λ, b_λ ein Paar zusammengehöriger Elemente und je ein Dreieck unserer Mannigfaltigkeit das Doppeldreieck ist, Q_1 und Q_2 die Nullpunkte zu MQ_1 und MQ_2 in Bezug auf alle diese Systeme sind. Nehmen wir also zwei von diesen Nullsystemen und bilden die gemeinsame Nullpunktscurve, so geht dieselbe allemal durch diese Punkte Q_1, Q_2, die also gleichzeitig allen diesen gemeinsamen Nullpunktscurven angehören, zu denen diese Mannigfaltigkeit von Nullsystemen Anlass gibt. Nimmt man nun aber statt M einen beliebigen andern Punkt M' auf $A_\lambda M$, so findet man, dass auch M' zu zwei allen diesen Curven gemeinsamen Punkten Q_1' und Q_2' Anlass gibt.

Ein dritter Punkt M'' würde ebenso zu zwei solchen Punkten Q_1'' und Q_2'' geführt haben. Also: alle diese Curven haben unendlich viele Punktpaare gemeinsam, fallen also in eine einzige Curve zusammen. Da ferner die gemeinsame Nullpunktscurve zweier Systeme

auch ihren Doppeldreiecken umschrieben ist, diese Curve aber, die wir eben erhalten haben, gemeinsame Nullpunktscurve zu allen Nullsystemen ist, die sich mit Hilfe der gegebenen Dreiecke als Doppeldreiecke und des weiteren Elementpaars $A\lambda$, $a\lambda$ bilden lassen, so müssen dieser Curve alle gegebenen Dreiecke einbeschrieben sein, d. h. sie deckt sich mit der gegebenen C_3. Hat man nun ein Dreieck Δ_1 und sucht zu der C_3 die Nullgeradenenveloppe in Bezug auf das Dreieck Δ_1 als Doppeldreieck und $A\lambda$, $a\lambda$ als Elementpaar, so erhält man eine Curve $C^3\Delta_1$. Nimmt man ein Dreieck Δ_2 und behält $A\lambda$, $a\lambda$ als Elementpaar bei, so ist in Bezug auf diese beiden Systeme, das mit dem Dreieck Δ_1 und das mit dem Dreieck Δ_2, wie wir eben bewiesen haben, die gemeinsame Nullpunktscurve, also

$$C^3\Delta_2 \equiv C^3\Delta_1$$

alle Systeme haben auch dieselbe Nullgeradenenveloppe, die also notwendig die Enveloppe aller unserer Dreiecke sein muss, womit unser Satz bewiesen ist.

Wir können aus diesem Beweise über die Nullpunkte dreier Tangenten der C^3, die von einem Punkte der Ebene ausgehen, eine Beziehung ableiten. Die zwei weiteren Tangenten der C^3, die ausser $a\lambda$ von dem Punkte M ausgehen, haben ihre Nullpunkte in Q_1 und Q_2 und $A\lambda$, M, Q_1, Q_2 sind die Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels, der alle Doppelpunkttripel des Nullsystems auf der C_3 ausschneidet. Er wird also auch das Doppelpunkttripel ausschneiden, von dem eine der drei Tangenten, die von M ausgehen, z. B. $a\lambda$ eine Seite ist; $a\lambda$ schneide C_3 ferner in den Punkten A_μ und B_μ, die also Punkte eines Tripels sind; der dritte zugehörige Doppelpunkt sei C_μ. Dann muss der Kegelschnitt des Büschels, der dieses Tripel ausschneidet, in die Gerade $a\lambda$, die die drei Punkte M, A_μ, B_μ enthält, und eine zweite Gerade die gegenüberliegende gemeinsame Sehne $Q_1 Q_2$ zerfallen; ihr dritter Schnittpunkt mit der C_3 ist also dieser Doppelpunkt C_μ. Daraus ergibt sich folgende neue Beziehung zwischen den Punkten einer C_3 und den Tangenten einer Nullgeradenenveloppe C^3.

„Nimmt man eine beliebige Tangente $a\lambda$ der C^3 und construirt von jedem ihrer Punkte das Paar weiterer Tangenten, so gehen die Verbindungslinien der zugehörigen Nullpunktpaare durch denjenigen Punkt C_μ der C_3, der der Tangente $a\lambda$ als Doppelpunkt gegenüberliegt."

IV.

Ueber Nullsystemnetze und ihre Beziehung zu Steiner'schen Punktpaarsystemen.

Sei einer C_3 ein beliebiges Nullsystembüschel einbeschrieben. Ein Dreieck desselben sei ABC, ein anderes $A_1B_1C_1$. A_1B_1 schneide die C_3 noch in D_1; dann ist der Punkt C_1 den vier Punkten A, B, C, D_1 beigeordnet. Folglich schneiden sich, wenn D der dritte Schnittpunkt der Seite AB mit der C_3 ist, CD_1 und C_1D in einem und demselben Punkte M_1 der Curve. Behalten wir das Dreieck ABC bei, ersetzen aber das Dreieck $A_1B_1C_1$ durch das Dreieck $A_2B_2C_2$, so haben analog, wenn D_2 der dritte Schnittpunkt von A_2B_2 mit der Curve ist, DC_2 und CD_2 einen und denselben dritten Schnittpunkt mit der C_3 gemeinsam. Nehmen wir irgend ein Dreieck $A_\mu B_\mu C_\mu$, so schneiden sich ebenso DC_μ und CD_μ in einem Punkte der Curve (wobei D_μ der dritte Schnittpunkt von $A_\mu B_\mu$ ist. Man bekommt also alle Punktepaare $C_\mu D_\mu$, zu welchen ein Nullsystem Anlass gibt, indem man ein Punktpaar D—C mit einem beliebigen Punkt X der Curve verbindet und ihn die ganze Curve durchlaufen lässt. Die dritten Schnittpunkte von DX und CX resp. C_μ und D_μ, sind dann jedesmal wieder ein entsprechendes Punktpaar.

Daraus geht hervor: alle Punktpaare $C_\mu D_\mu$ eines Nullsystembüschels bilden ein Steiner'sches Punktpaarsystem. In der Folge wird öfters die Ausdrucksweise wiederkehren: „ein Nullsystembüschel hat ein bestimmtes Punktpaarsystem". Zwei Dreiecke wollen wir coordinirt nennen, wenn ihre Punktpaare demselben System angehören. Alle Dreiecke, die ein Punktpaar gemeinsam haben, wollen wir einen Dreieckbüschel nennen. Es ist interessant, dass durch einen solchen Dreieckbüschel offenbar auch alle Punktpaare eines Punktpaarsystems erhalten werden können. In dieser Beziehung könnte man einen solchen Büschel einen ausgearteten Nullsystembüschel nennen. Alle Dreiecke, die einem und demselben Dreiecke, also auch unter sich, coordinirt sind, wollen wir ein Dreiecksnetz nennen, alle Nullsysteme, zu denen ein solches Netz Anlass gibt, ein Nullsystemnetz. Zwei Dreiecke eines Netzes bestimmen eindeutig einen Nullsystembüschel. Denn seien die beiden Dreiecke $A_xB_xC_x$, $A_\mu B_\mu C_\mu$ mit resp. den dritten Seitenschnittpunkten $\mathfrak{C}_x$, $\mathfrak{B}_x$, $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{C}_\mu$, $\mathfrak{B}_\mu$, $\mathfrak{A}_\mu$ (wo $\mathfrak{C}_x$ der dritte Schnittpunkt von A_x, B_x sei u. s. w.); dann ist für die Construction des Nullsystems erstens das Dreieck $A_xB_xC_x$ gegeben, zweitens sind zu drei Geraden $A_\mu B_\mu$, $B_\mu C_\mu$, $A_\mu C_\mu$ ihre Nullpunkte resp. $\mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{B}_\mu$, $\mathfrak{C}_\mu$ gegeben, also mehr als

nötig ist, um ein System zu construiren; ein zweites System des Büschels erhält man, wenn $A_\varkappa B_\varkappa C_\varkappa$ mit $A_\mu B_\mu C_\mu$ vertauscht. Wenn man ein beliebiges Punktpaar $C_\mu D_\mu$ auf der Curve annimmt, so ist bekanntlich damit das ganze Punktpaarsystem, also auch das zugehörige Dreieck- und Nullsystemnetz bestimmt. Ist ein bestimmtes Nullsystem gegeben, von welchem ein Dreieck $A_\mu B_\mu C_\mu$ ist, ist D_μ der dritte Schnittpunkt von $B_\mu C_\mu$ und man sucht dasjenige Dreieck des Systems, das in D_μ seinen Eckpunkt hat, so hat man nur die Nullgerade zu demjenigen Punkte D_ν' zu construiren, der dem Punkte D_μ entspricht, wenn man ihn in dem Punktpaarsystem, das dem Nullsystem zugrunde liegt, als Punkt C_ν auffasst.

Diesen Punkt D_ν' kann man, wie man erkennt, wenn man einen Punkt G dem Punkte D_μ mehr und mehr nähert, in der Weise construiren, dass man in D_μ die Tangente zeichnet und ihren Tangentialpunkt E mit C_μ verbindet; diese Linie schneidet die Curve zum dritten Mal in D_ν'. In einem Falle fällt D_ν' mit C_μ zusammen, dann, wenn C_μ und D_μ' conjugirte Punkte sind. Unter den drei conjugirten Nullsystemnetzen wollen wir die drei Netze verstehen, die als Punktpaarsysteme je eines der drei conjugirten Punktpaarsysteme haben. Ein Dreieck eines solchen Netzes hat bekanntlich die Eigenschaft, dass die dritten Schnittpunkte der drei Seiten auf einer Geraden liegen. Wir werden diese drei Netze weiter unten eingehend studiren, im voraus aber von der eben erwähnten Eigenschaft der Dreiecke schon Gebrauch zu machen haben.

V.

Nun wollen wir zwei Anwendungen von dem in III bewiesenen Satze machen.

1) Beschreiben wir allen Dreiecken eines einer C_3 einbeschriebenen Nullsystembüschels die Dreiecke ein, die gleichzeitig der C_3 einbeschrieben sind, verbinden also bei jedem Dreieck die dritten Schnittpunkte der drei Seiten unter einander, dann erhalten wir wieder die Dreiecke eines der C_3 einbeschriebenen Nullsystembüschels. Die Zahl der so erhaltenen Dreiecke ist selbstverständlich genau so gross, wie die Zahl der Dreiecke des gegebenen Nullsystems, deren jedem je eines einbeschrieben ist, also bilden sie auch eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit.

Zweitens sind sie alle einer C^3 umschrieben, wie aus folgender Erwägung hervorgeht: Ein beliebiger Punkt $\mathfrak{A}$ der Curve hat eine Gerade BC zur Nullgeraden in Bezug auf den gegebenen System-

büschel, die Seite eines Doppeldreiecks ABC ist. Die Nullpunkte der beiden andern Seiten des Dreiecks seien $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$; dann sind $\mathfrak{AB}$ und $\mathfrak{AC}$ zwei Tangenten der gesuchten Enveloppe. Ausser den zwei Tangenten durch $\mathfrak{A}$ gibt es noch eine dritte, die zwei Nullpunkte eines andern andern Doppeldreiecks verbindet. Sind nämlich die Nullpunkte zweier zusammengehörigen Doppelseiten b_1 und c_1, die sich in A_1 schneiden mögen, $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{C}_1$, und sind $A_x B_x C_x$ die Eckpunkte eines beliebigen Doppeldreiecks, dann liegen also A_1, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ A_x, B_x, C_x auf einem Kegelschnitt, dem Nullpunktskegelschnitt zu A_1, also ist der dritte Schnittpunkt $\mathfrak{A}_2$ von $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ beigeordneter Rest zu A_1, A_x, B_x, C_x. Solcher Punkttripel, wie A_1, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ gibt es aber ebenso viele als es Curvenpunkte gibt. Sobald der Punkt A_1 gegeben ist, ist ein solches Tripel A_1, B_1, C_1 und damit auch der beigeordnete Rest $\mathfrak{A}_2$ eindeutig bestimmt. Ist, wie in unserem Falle, umgekehrt der beigeordnete Rest $\mathfrak{A}$ gegeben, so erledigt sich die Frage nach einer weiteren Tangente durch $\mathfrak{A}$ mit der Frage nach der Existenz eines solchen Punktes A_1, der zusammen mit $A_x B_x^{\pi} C_x$ dem Punkte $\mathfrak{A}$ beigeordnet ist. Solcher Punkte aber gibt es einen einzigen, also auch eine weitere Tangente durch $\mathfrak{A}$. Die Curve ist also dritter Classe. Damit aber sind die Kriterien für die Anwendbarkeit des Satzes III gegeben. Die Dreiecke bilden einen neuen Nullsystembüschel. In der Tat unterscheiden sich die drei Tangenten, die von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{A}$ der C_3 ausgehen. in der Weise, dass zwei von ihnen zusammengehören als Linien, die $\mathfrak{A}$ mit einem andern Nullpunkte verbinden, die dritte zwei anderweitige Nullpunkte verbindet und $\mathfrak{A}$ als dritten Schnittpunkt enthält; das ist die Nullgerade zu $\mathfrak{A}$ in Bezug auf den neuen Systembüschel.

Wir wollen der Kürze wegen für die Folge die Punkte eines Punktpaars unterscheiden in „Eckpunkt" (eines Dreiecks) und „Nullpunkt" (der gegenüberliegenden Seite) und bei zwei Punktpaaren von gleichartigen Punkten (Nullpunkten oder Eckpunkten) und ungleichartigen Punkten (1 Nullpunkt und 1 Eckpunkt) sprechen.

VI.

Ueber Grassmann'sche Dreiecke.

Aus der eben angestellten Betrachtung ergibt sich ohne weiteres die Grassmann'sche Lösung der Aufgabe: ein Dreieck zu construiren das einer C_3 einbeschrieben ist und durch drei beliebige auf der C_3 gegebenen Punkte geht. Wir müssen die Lösung hier deswegen

analysiren, weil die Betrachtungen des folgenden Paragraphen sich darauf stützen. Das Dreieck der gegebenen Punkte sei $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ (Fig. 2).

$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ habe den dritten Schnittpunkt c, der von $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ sei a, der von $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ b. Denken wir uns nun, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ sei Doppeldreieck eines Nullsystembüschels, der einem andern Nullsystembüschel einbeschrieben ist, von dem $A_1 B_1 C_1$ ein Doppeldreieck sei; C_1 liege $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gegenüber u. s. w. Dann ist das Punktpaarsystem des eingeschriebenen Nullsystembüschels gegeben durch $\mathfrak{C}$c ($\mathfrak{C}$ Eckpunkt, c Nullpunkt); das des umschriebenen Dreiecks ist gegeben durch $C_1\mathfrak{C}$ (C_1 Eckpunk,t $\mathfrak{C}$ Nullpunkt). Betrachten wir aber in dem umschriebenen System C_1 als Nullpunkt, so entspricht ihm bekanntlich als Eckpunkt der Punkt c. Soll also die Aufgabe gelöst werden, zu $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ zu construiren, so läuft die Aufgabe darauf hinaus, ein Punktpaarsystem zu construiren, wenn man zu einem gesuchten Punkte C_1 desselben seinen Eckpunkt e und seinen Nullpunkt $\mathfrak{C}$ kennt, jenachdem man ihn selbst als Nullpunkt oder Eckpunkt des Systems betrachtet. Nun ist, wie wir am Ende des § IV. ausgeführt haben, der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie $\mathfrak{C}$c mit der C_3, C', der Tangentialpunkt von C_1. Die vier Tangenten von e an die Curve ergeben also die 4 Berührungspunkte C_1, C_2, C_3, C_4, die Eckpunkte der vier gesuchten Dreiecke sind. Also:

Zu einem Nullsystembüschel giebt es ein einbeschriebenes, aber vier umschriebene Nullsystembüschel. Da das Punktpaarsystem eines Büschels, welcher einem andern Nullsystembüschel A einbeschrieben ist, sich aus dem Punktpaarsystem von A ohne Zuhilfenahme eines Doppeldreiecks ableiten lässt, so können wir folgenden Satz aussprechen, der sich auch noch anders beweisen lässt:

„Alle Nullsystembüschel, welche den Nullsystembüscheln eines Netzes einbeschrieben sind, bilden wieder ein Netz." Diesen geometrischen Sinn hat es, wenn wir in der Folge sagen werden, ein Netz ist einem andern Netze, oder auch, ein Punktpaarsystem ist einem andern Punktpaarsystem ein- oder umschrieben.

Zwischen zwei solchen Punktpaarsystemen besteht ein einfacher Zusammenhang: in dem umschriebenen Systeme entspricht dem Punkte C_1 als einem Eckpunkt der Punkt $\mathfrak{C}$, als einem Nullpunkt der Punkt e (s. Fig. 1); in dem einbeschriebenen Systeme entspricht dem Eckpunkt $\mathfrak{C}$ der Nullpunkt c. Daraus ergiebt sich folgender Satz:

„Bestimmen wir zu jedem Punkte eines Punktpaarsystems seinen Nullpunkt und seinen Eckpunkt, so ergeben alle so construirten Punktpaare das einbeschriebene Punktpaarsystem."

VII.

2) Mit jedem Nullsystemnetz ist noch ein zweites gegeben. Sei C Eckpunkt und D zugehöriger Nullpunkt eines solchen Netzes, so erhalten wir, wenn wir die Functionen von D und C vertauschen, also C zum Nullpunkt, D zum Eckpunkt machen, ein zweites Netz. Selbstverständlich geht dann dieser Rollenwechsel innerhalb sämtlicher Punktpaare des Systems vor sich. Zwei solche Nullsystemnetze, die dasselbe Punktpaarsystem haben, nur dass Nullpunkt und Eckpunkt in der eben erläuterten Weise vertauscht sind, wollen wir zwei reciproke Netze nennen, in dem gleichen Sinne von zwei reciproken Nullsystemen und zwei reciproken Dreiecken sprechen. Auf die gegenseitigen Beziehungen zweier solcher Netze werden wir weiter unten zu sprechen kommen (§ IX). Für die folgenden Betrachtungen haben wir zunächst einen Satz zu beweisen: „Die Netze, die zwei reciproken Netzen einbeschrieben sind, sind wieder reciprok."

Zum Beweise nehmen wir ein Punktpaar $C-D$ und betrachten zwei reciproke Dreiecke, die dieses Punktpaar gemeinsam haben. Ist ABC das eine Dreieck (s. Fig. 2), so ist F Eckpunkt, G zugehöriger Nullpunkt des einbeschriebenen Punktpaarsystems. Zum reciproken Dreieck wollen wir das Dreieck BED wählen, welches in der Tat D zum Eckpunkt, C zum Nullpunkt hat. Das Dreieck, welches diesem Dreieck einbeschrieben ist, ist ACG; von dem einbeschriebenen Punktpaarsystem ist also in der Tat G Eckpunkt, F zugehöriger Nullpunkt, womit unser Satz bewiesen ist.

VIII.

Ein curventheoretisches Problem.

Anmerkung. Statt von „umschriebenen und einbeschriebenen Nullsystembüscheln" zu sprechen, werden wir im folgenden auch die Ausdrücke: „Ueber- und Unterordnung" gebrauchen. Es soll folgendes Problem in Angriff genommen werden: wenn wir von einem beliebigen Punkte P oder C_3 die vier Tangenten an dieselbe legen, von jedem der vier Berührungspunkte aus den Process wiederholen und so fortfahren in infinitum, bekommen wir schliesslich alle Tangenten der Curve oder nur eine directe Mannigfaltigkeit?

Wir construiren zu P einen seiner drei conjugirten Punkte P_1 und zeichnen wir ein beliebiges Dreieck mit P als Eckpunkt und P_1 als gegenüberliegenden Nullpunkt; bei einem solchen conjugirten

Dreiecke artet bekanntlich das einbeschriebene Dreieck in eine gerade Linie aus. Weiter geht also die „Unterordnung" nicht. Ziehen wir von P aus die vier Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4, deren Berührungspunkte resp. Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sein mögen, ziehen P_1Q_1, P_1Q_2, P_1Q_3, P_1Q_4, welche Geraden die C_3 noch einmal in P_1', P_2', P_3', P_4' schneiden mögen, so sind nach dem vorhergehenden P_1P_1', P_1P_2', P_1P_3', P_1P_4' Punktpaare der vier übergeordneten Netze. Ziehen wir von P_1', P_2', P_3', P_4' wieder die Tangenten und wiederholen den eben angestellten Process, so ergiebt jeder einzelne Berührungspunkt ein neues Berührungspunktquadrupel. Es ist bei beliebiger Fortsetzung des Processes nie möglich, dass ein Berührungspunkt $P^{(n)}$ mit einem früher schon gefundenen Punkte $P^{(m)}$ zusammenfalle, denn wäre es möglich, dann würde man also von einem Netze $P_1P^{(n)}$ aus durch fortgesetztes Ueberordnen zu einem Netze $P_1P^{(m)}$ kommen, das mit dem ersteren entweder identisch ist oder ihm reciprok wäre. Ginge man also von $P_1P^{(m)}$ aus und ordnete fortgesetzt unter, so müsste man schliesslich auch zu $P_1P^{(n)}$ kommen, und weil reciproke Netze auch reciproke Unterordnungen haben, man also keine von einander verschiedenen Punktpaarsysteme bekommt, wenn man von zwei reciproken Systemen die Unterordnungen bildet, so müsste man nun, wenn man das Unterordnen fortsetzte, schliesslich wieder zu dem Punktpaarsystem $P_1P^{(m)}$ oder $P_1P^{(n)}$ kommen, würde sich also in einem Cirkel bewegen, der weder beim Ueberordnen noch beim Unterordnen verlassen würde. Nun haben wir aber doch zum Ausgangspunkt unseres Ueberordnungsprocesses die gerade Linie genommen; wenn wir also von einem der erreichten Punktpaare, $P_1P^{(m)}$, den Rückweg einschlagen, dann müssen wir auch wieder auf die gerade Linie zurückkommen. Dann ist aber ein solcher Cirkel nicht möglich, da mit der geraden Linie das Unterordnen aufhört. Mit dieser Annahme widerlegt sich auch die Annahme, dass wir schliesslich alle Punkte der Curve erhalten werden. Denn wählen wir zum Ausgangspunkt statt des Punktes P einen anderen der zu P_1 conjugirten Punkte, P', und unterziehen das Punktpaar P_1P' dem Process fortgesetzter Ueberordnung, so kann in dieser Reihe der Berührungspunkte keiner mit einem Punkte der anderen Reihe zusammenfallen; denn würde das der Fall sein, dann hätten ja die beiden Reihen ein gemeinsames Punktpaar. Wäre das der Fall, dann müsste man aus der einen Reihe durch fortgesetztes Ueberordnen in die andere Reihe hineinkommen; das ist aber unmöglich; denn jedes Dreieck der einen Reihe führt durch fortgesetztes Unterordnen schliesslich auf die gerade Linie, die durch Ueberordnen aus der anderen Reihe nicht erhalten werden kann, weil der Process der Ueberordnung bei einem Dreieck überhaupt nicht zu einer geraden Linie führen kann. Es ist möglich, dass die

Ueberordnungen eines Dreiecks alle vier imaginär werden. Nicht aber ist möglich, dass eine Ueberordnung in eine gerade Linie ausartet. Es giebt also, weil ein Punkt P_1 drei conjugirte Punkte P, P', P'' hat, jedenfalls drei solche Berührungspunktgruppen, die keine gemeinsamen Punkte haben können. Es lassen sich aber ohne Schwierigkeit solcher Gruppen unendlich viele aufstellen. Die Reihe der auf einander folgenden Punkte der einen conjugirten Gruppe sei P, P', P'', . . . $P^{(n)}$ und zwar sei das die Reihe in absteigender Linie, so dass $P^{(n)}$, P_1 conjugirt ist; die anderen zwei conjugirten Punkte seien $P_1^{(n)}$, $P_2^{(n)}$. Die auf einander folgenden Punktpaare sind dann also PP_1, $P'P_1$, $P''P_1$, . . . $P^{(n)}P_1$.

Greifen wir nun ein Punktpaar $P_1P^{(x)}$ heraus und bestimmen zu $P^{(x)}$ den Punkt, der ihm entspricht in dem Punktpaarsystem gegeben durch $P_1P^{(g)}$, so zwar, dass $P^{(g)}P^{(x)}$ und $P_1P_x^{(g)}$ sich in einem Punkte der Curven schneiden. — Dann sind auch $P_1^{(x)}$ und $P_x^{(g)}P^{(g)}$ Punktpaare eines Systems. — Unterziehen wir nun das Punktepaar $P_x^{(g)}P^{(x)}$ dem Process der Unterordnung unter Beibehaltung von $P_x^{(g)}$ als festem Centrum, dann wäre es denkbar, dass auch alle folgenden Berührungspunkte $P^{(x)}'$, $P^{(x)}''$. $P^{(x)}{}^{(n)}$ mit Punkten aus der Ueber- und Unterordnungsreihe von $P_1^{(g)}$ coincidiren würden; dann würde diese neue Reihe also keine Punkte ergeben, die nicht auch schon in der ersten Reihe enthalten sind. Nur die Aufeinanderfolge der Punkte wäre eine andere. Nun ist $P_x^{(g)}$ letzter Punkt der Reihe $P_x^{(g)}P^{(g)}$; sollten die Reihen dieselben Punkte ergeben, so müsste $P_x^{(g)}$, also auch von $P_1^{(g)}$ aus erreicht werden können. Ganz analog der Construction des Punktes $P_x^{(g)}$ hätten wir aber auch einen Punkt $P_\mu^{(g)}$, $P_\nu^{(g)}$ construiren können, und weil diese Punkte den Punkten der Reihe $PP'P''$ eindeutig entsprechen, so müssten diese neuen Punkte schliesslich alle Punkte der ersten Reihe ergeben. Nun war aber das Punktpaar $P_1P^{(g)}$ aus seiner Reihe ganz willkürlich gewählt worden, wir konnten auch irgend ein anderes Punktpaar $P_1P^{(h)}$ nehmen; dann wären wir analog zu einer Punktreihe $P_x^{(h)}$, $P_\mu^{(h)}$, $P_\nu^{(h)}$ gekommen, von der wir dann ebenfalls Uebereinstimmung mit der ersten Punktreihe und damit auch mit der zweiten annehmen müssten. Nun ist es nicht denkbar, dass eine Punktreihe sich decken kann mit einer anderen Reihe von Punkten, die im Vergleich zu der ersteren eine höhere unendliche Mannigfaltigkeit darstellt. Die Unhaltbarkeit dieser Annahme lässt sich aber auch noch unmittelbarer zeigen.

Ordnen wir unter und über von $P^{(g)}P_x^{(g)}$ aus, das eine Mal mit $P^{(g)}$ als festem Centrum, das andere Mal mit $P_x^{(g)}$, so müssten wir, wenn unsere Annahme richtig wäre, beide Male dieselben Punkte

bekommen. Wäre also z B. P_x ein Punkt, der von $P^{(g)}$ aus erreicht wird, so müsste derselbe Punkt, vielleicht allerdings nach einer grösseren oder kleineren Zahl von Ueber- oder Unterordnungen, oder überhaupt das eine Mal durch Ueberordnung, das andere Mal durch Unterordnung, auch von $P_x^{(g)}$ aus erhalten werden können. Sei nun aber der nächste Punkt, den wir beim Unterordnen mit $P_x^{(g)}$ als Centrum nach $P^{(g)}$ bekommen, $P^{(g)'}$; dann kann $P^{(g)'}$ nicht auch von $P^{(g)}$ aus erreicht werden. Denn $P^{(g)}P_k^{(g)}$ und $P_k^{(g)}P^{(g)'}$ sind Punktpaare desselben Punktpaarsystems. Entspricht $P^{(g)}$ als Eckpunkt $P_x^{(g)}$ als Nullpunkt, so entspricht ihm als Nullpunkt der Punkt $P^{(g)'}$ als Eckpunkt oder umgekehrt.

Damit ist aber nachgewiesen, dass von der Punktreihe $P^{(g)}$, $P^{(g)'}$ höchstens eine endliche Anzahl mit der Punktreihe P, P^1 zusammenfallen kann. Indem wir von der unendlichen Anzahl der übrigen Punkte einen beliebigen mit P_1 verbinden, erhalten wir eine Ueber- und Unterordnungsreihe, die mit keiner der drei conjugirten Reihen identisch sein kann (der Beweis, dass diese Reihe auch nicht mit den andern beiden conjugirten Reihen übereinstimmen kann, ist dem eben geführten analog). Auch die Unterordnung kommt also bei einer solchen Reihe niemals zu einem Abschluss. Solcher Reihen können wir also beliebig viele construiren. Bei einem beliebigen Dreiecke, das man einer Curve dritter Ordnung einbeschreibt, führt also weder die Ueber- noch die Unterordnung je zu einem Abschluss.

Nun haben wir zwar bewiesen, dass eine bestimmte Folge von Tangenten der C_3, wie sie sich aus dem Process der Unter- und Ueberordnung ergiebt, nicht alle Tangenten der C_3 liefert, aber das am Beginn von VIII. gestellte Problem ist damit noch nicht explicite bewiesen. Implicite dürfte aber dieser Beweis mit dem anderen auch gegeben sein. Wenn man durch irgend einen constructiven Vorgang eine Reihe von Punkten erhält, so wird es von einem beliebigen Punkte nicht selbstverständlich sein, dass er dieser Reihe angehört, das muss erst bewiesen werden. Ebenso ist es in unserem Falle, nachdem wir von einem ganz analogen Processe den Beweis geliefert haben, dass er nicht alle Punkte liefert, das a priori gegebene, dass ein beliebiger Punkt nicht erhalten wird; die gegenteilige Annahme würde eines Beweises bedürfen, der sicher nicht geliefert werden kann.

Denn beginnen wir mit irgend einem Punkte P den Ueber- und Unterordnungsprocess in Bezug auf ein beliebiges Centrum P_1 und gleichzeitig mit P den fraglichen Process, bei dem wir also analog

dem Unterordnen zu P den Tangentialpunkt P', zu P' wieder den Tangentialpunkt P'' construiren, analog dem Ueberordnen zu P, das Tangentenquadrupel construiren, von jedem Berührungspunkt aus wieder das Tangentenquadrupel u. s. w.

Dann erhalten wir, wenn wir den Vorgang des Ueberordnens bei beiden Processen n mal fortsetzen, beide Male dieselbe Zahl von Punkten, wie gross auch n sein möge. Wächst nun n in infinitum, dann müsste der Fall eintreten, dass der zu untersuchende Process keine neuen Punkte mehr liefert, weil er bereits sämtliche Punkte der Curve ergeben hat, der andere Process aber immer noch neue Punkte liefert. Wir würden so also zu dem absurden Schlusse kommen, dass das Ganze weniger Punkte enthält, als einer seiner Teile; in der Tat ergeben sich also nicht alle Punkte. Und zwar giebt es bei diesen Processen nicht etwa einen Grenzpunkt. Wir müssen vielmehr annehmen, dass jede solche Reihe eine unendliche Anzahl von Grenzstrecken ergiebt, innerhalb deren keine Punkte erreicht werden.

Wir haben soeben den Nachweis geführt, dass sich unendlich viele Punkte angeben lassen, von denen aus die Unterordnung in Bezug auf ein festes Centrum nicht aufhört. Dabei drängt sich folgende Frage auf: wenn wir P_1 zum Centrum wählen und die Unter- und Ueberordnung mit P beginnen, wird der dritte Schnittpunkt von PP_1 mit der Curve, P_2, auch der Reihe angehören? Es lässt sich zeigen, dass das nicht der Fall sein kann. Ein beliebiger Punkt x der Curve wird ja überhaupt einer gegebenen Reihe nicht angehören. P_2 ist aber kein beliebiger Punkt, sondern mit P_1 und P als dritter Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie gegeben. Es wäre also wol möglich, dass diese Bedingung ganz oder teilweise darin zum Ausdruck kommen würde, dass P_2 der Ueber- und Unterordnungsreihe von P, gebildet in Bezug auf das feste Centrum P_1 angehörte. Dann müsste diese Eigentümlichkeit immer da bestehen, wo diese Bedingung gegeben ist. Anderseits, wenn wir von irgend einem Punkt P, der auch eine ganz specielle Lage zu P_1 annehmen kann, nachweisen können, der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie gehört der Reihe nicht an, dann ist diese Eigenschaft des dritten Schnittpunktes, der Reihe anzugehören, da wo sie auftritt, eine zufällige, die mit der Bedingung des dritten Schnittpunkts nichts zu tun hat. Dann wird also im allgemeinen dieser dritte Schnittpunkt der Reihe nicht angehören.

Wir nehmen zur Prüfung der Frage zu P_1 einen seiner conjugirten Punkte P. P_2 sei der dritte Schnittpunkt von PP_1. Der

gemeinsame Tangentialpunkt von P und P_1 sei P_3; dann ist dieser Punkt P_2 conjugirt. Der Ergänzungspunkt zu P_2P_3 sei P_4; P_4 ist also, wenn wir von P an mit P_2 als festem Centrum unterordnen, der auf P folgende Punkt. Nun erhalten wir ein Punktpaar desselben Punktpaarsystems, wenn wir die Punkte P_2, P_4 vertauschen und statt von P_4 an mit P_2, von P_2 an mit P_4 unterordnen.

Nun ist P_1P eine Tangente der Cayley'schen Curve. Das Centrum der Unterordnung war der Ergänzungspunkt, der Ausgangspunkt einer von den beiden conjugirten Punkten. Der nächstfolgende Unterordnungsstrahl P_2P_3 ist wiederum eine Tangente der Cayley'schen Curve. Unser Tausch hat zur Folge, dass wieder der Ergänzungspunkt Centrum, ein conjugirter Punkt Ausgangspunkt wird, wir werden also wieder eine Tangente der Cayley'schen Curve erhalten u. s. w. Nur in einem Falle wäre es nun möglich, dass dieser Process aufhörte, wenn es einmal vorkäme, dass der Ergänzungspunkt mit einem der conjugirten Punkte zusammenfiele. Eine solche Tangente ist aber eine gemeinsame Tangente der Cayley'schen Curve und der Curve dritter Ordnung. Da es deren im ganzen neun giebt, so deckt sich die Frage nach der Zugehörigkeit einer solchen Tangente zu unserer Tangentenreihe mit der Frage, ob diese alle Tangenten enthält oder nur eine discrete Mannigfaltigkeit. Nehmen wir nun irgend ein anderes conjugirtes Punktpaar $P_1'P'$ mit dem dritten Schnittpunkt P_2' und verfahren genau in derselben Weise wie oben; dann werden wir auch hier lauter Tangenten der Cayley'schen Curve erhalten. In der neuen Ueber- und Unterordnungsreihe muss es auch eine Tangente geben, deren Punktpaar mit P_2P coordinirt ist, wenn unsere Annahme richtig sein sollte. Wenn wir von diesen beiden coordinirten Gliedern aus die Entwicklung der beiden Reihen betrachten, so wird es uns klar, dass wir stets coordinirte Tangenten erhalten werden, die niemals in eine zusammenfallen können, und von denen überhaupt nie eine mit irgend einer der andern Reihe zusammenfallen kann. Damit ist diese Annahme der principiellen Zugehörigkeit des dritten Schnittpunktes zu einer von den zwei Reihen der beiden anderen Punkte widerlegt. Gleichzeitig ersehen wir daraus: „Wenn man zu einem conjugirten Punktpaar den Ergänzungspunkt construirt, zu diesem seinen conjugirten Punkt, zu dem neuen Punktpaar wieder den Ergänzungspunkt und so fortfährt, dann erhält man nur eine discrete Mannigfaltigkeit von Tangenten."

IX.

Reciproke und conjugirte Netze.

Ist ein Nullsystembüschel, der einer C_3 einbeschrieben ist, gegeben, so lassen sich mit Hilfe dieses einen Büschels in folgender Weise sämtliche Büschel des reciproken Netzes construiren. Der Nullsystembüschel, von dem wir ausgehen, heisse A. Von jedem Punkte P einer beliebigen Geraden p der Ebene gehen an die zu A gehörige C^3 drei Tangenten t_1, t_2, t_3, die ihre Nullpunkte, resp. T_1, T_2, T_3 auf der C_3 haben; alle Dreicke T_1, T_2, T_3, die in dieser Weise mit Hilfe der Punkte einer und derselben Geraden p construirbar sind, ergeben einen zu A reciproken Nullsystembüschel. Dass wir eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit erster Ordnung von Dreiecken bekommen, liegt auf der Hand: so viel Dreiecke, als die Gerade p Punkte hat. Dass diese Dreiecke eine Curve dritter Classe umhüllen, ist ebenfalls leicht nachzuweisen. Ein solches Punkttripel T_1, T_2, T_3, veranlasst durch P, liegt mit einem Doppelpunkttripel A z. B. RST auf einem Kegelschnitt, dem Nullpunktskegelschnitt zu dem Punkte P in Bezug auf irgend eines der Dreiecke als Dopppeldreieck, P liegt also auch auf demselben. Der dritte Schnittpunkt von T_1T_2 mit der C_3 sei T_4. Das Punkttripel, von dem T_4 ein Punkt ist, erhalten wir, wenn wir zu T_4 die Nullgerade t_4 in Bezug auf A construiren, die p in einem Punkte P_1 treffen möge. P_1 ist der P analoge Punkt; die zwei weiteren Tangenten, t_5, t_6, die er an die C^3 schickt, ergeben die zu T_4 gehörigen zwei weiteren Punkte T_5, T_6. Von T_4 gehen also an die zu untersuchende Enveloppe T_1T_2, T_4T_5, T_4T_6. T_4 ist beigeordneter Rest zu R, S, T, T_3. Man kann sich leicht klar machen, dass irgend ein Punkt Tx zwei Tangenten $TxTy$ und $TxTz$ liefert, wo $TxTyTz$ ein Punkttripel bilden, und noch eine weitere Tangente $TxTsTv$, wo $TsTv$ zusammengehörige Punkte eines Tripels sind. Wir haben es also in der Tat mit einer Curve dritter Classe zu tun, und diese Dreiecke Tx, Ty, Ts sind einander coordinirt. Nun hat p drei Schnittpunkte mit der C_3. P', P'', P'''.

Die Nullgerade zu P' sei p'; dann gehen an die C^3 des Büschels A noch zwei weitere Tangenten p_1' und p_2', die also zusammengehörige Doppelseiten desselben sind. Dieselben zwei Tangenten sind aber auch zusammengehörige Doppelseiten des neuen Büschels, wie aus seiner Entstehung aus dem Büschel A sich ergiebt. Damit ist aber der reciproke Charakter der beiden Büschel festgestellt und

gleichzeitig eine merkwürdige Beziehung zwischen zwei reciproken Büscheln gewonnen.

„Construirt man in den Doppelpunkttripeln eines Nullsystembüschels, der einer C_3 einbeschrieben ist, die Tangenten an die C^3 eines reciproken Nullsystembüschels, so hat jedes solche Tangententripel einen gemeinsamen Schnittpunkt und alle diese Schnittpunkte erfüllen eine Gerade. Vertauscht man in dieser Construction die Functionen der beiden Nullsysteme, so bekommt man dieselbe Gerade." Man kann also mit Hilfe eines Nullsystembüschels und sämtlicher Geraden der Ebene sämtliche Nullsystembüschel des reciproken Netzes construiren. Zu interessanten Beziehungen führen diese Betrachtungen, wenn wir sie auf ein specielles Nullsystemnetz anwenden, nämlich auf eines von den drei conjugirten Netzen. Ein solches Netz hat die Eigenschaft, dass es mit seinem reciproken Netz zusammenfällt. Denn greift man einen beliebigen Nullsystembüschel heraus, aus diesem ein Doppelpunkttripel ABC und zwei conjugirte Punkte D, E, so ist sowol E beigeordnet den vier Punkten A, B, C, D, als auch D den vier Punkten A, B, C, E.

Wir kommen so auf folgenden Satz: Aus jedem Nullsystembüschel eines conjugirten Nullsystemnetzes lassen sich sämtliche andere mit Hilfe sämtlicher Geraden der Ebene construiren. Nun kann man aber auch einen conjugirten Nullsystembüschel als reciprok zu sich selbst betrachten. Unsere früheren Betrachtungen führen uns dann zu folgender Beziehung: Construirt man in den Doppelpunkttripeln eines conjugirten Nullsystembüschels die Nullgeraden, so haben diese Geradentripel je einen gemeinsamen Schnittpunkt, und alle diese Schnittpunkte erfüllen eine Gerade. Die Gerade sei „die dem Nullsystembüschel zugehörige" Gerade, einer ihrer Punkte heisse zugeordnet demjenigen Doppelpunkttripel, dessen drei Nullgeraden sich in ihm schneiden. Nun wissen wir aus der Theorie dieser Punkttripel, dass die drei Nullpunkte eines conjugirten Doppeldreiecks auf einer Geraden liegen. Offenbar ist diese Gerade reciprok dem zugeordneten Punkte. Wie also die zugeordneten Punkte in der zugehörigen Geraden sich schneiden, so werden die zugeordneten Geraden in einem zugehörigen Punkte sich treffen. Wir kommen so zu folgender Construction eines conjugirten Nullsystembüschels: alle Strahlen eines Strahlenbüschels treffen eine C_3 in drei Punkten. Die drei conjugirten Punkte bilden die Doppelpunktstripel eines conjugirten Nullsytembüschels. Die zu den Doppelpunktstripeln gehörigen Nullgeradentripel liefern in ihren gemeinsamen Schnittpunkten die Punkte der „zugehörigen Geraden". Durch Betrachtung derjenigen drei Strahlen des Strahlenbüschels, die Tan-

genten der Caley'schen Curve sind, kommt man zu der Erkenntniss, dass zugehöriger Punkt und zugehörige Gerade eines conjugirten Nullsystembüschels Pol und Polare in Bezug auf eine von den drei Curven sind, von denen die gegebene die Hesse'sche ist.

Anm. Mit Hilfe dieser Beziehung zwischen Pol und Polare einer Curve dritter Ordnung lassen sich manche Sätze aus der Polarentheorie einer Curve dritter Ordnung besonders einfach beweisen. Wir wollen hier nur ein Beispiel anführen:

Nehmen wir irgend zwei Punkte Q und Q_1 der Ebene, so geben sie Anlass zu zwei verschiedenen conjugirten Nullsystembüscheln C_1^3 und C_2^3. Die beiden Büschel haben, weil ein und demselben Netze angehörig, ein Doppeldreieck gemeinsam, dasjenige, dessen drei Ecken A_1, B_1, C_1 conjugirt sind resp. den drei Durchschnittspunkten der Verbindungslinie QQ_1. Jedem Nullsystembüschel gehört eine besondere Gerade zu, resp. g und g_1. Dem Doppeldreieck $A_1 B_1 C_1$ gehört ein bestimmter Punkt P_1 auf g_1 und ein bestimmter Punkt P_2 auf g_1 zu. Legen wir durch A_1, B_1, C_1, P_1, P_2 den Kegelschnitt, so muss dieser die C_3 in einem weiteren conjugirten Dreiecke schneiden. Denn es ist eine fundamentale Eigenschaft dieser conjugirten Dreiecke, die sich aber auch von unsern Betrachtungen aus ohne Mühe beweisen lässt, dass ein beliebiger Kegelschnitt, der einem solchen Dreieck umschrieben ist, noch ein zweites Dreieck enthält. Nun können aber zwei Nullsystembüschel, wenn sie nicht ganz zusammenfallen sollen, nur ein Dreieck gemeinsam haben; dieser Kegelschnitt wird also das Punkttripel $A_1 B_1 C_1$ doppelt mit der C_3 gemeinsam haben, d. h. sie in diesen drei Punkten berühren. Daraus folgt gleichzeitig, dass dieser Kegelschnitt auch g_1 und g_2 berühren wird. Denn jeder andere Punkt P_1' auf g_1 oder P_2' auf g_2 gehört einem anderen von $A_1 B_6 C_1$ verschiedenen Dreieck zu, während ja doch ein Kegelschnitt, der zwei Dreiecke eines conjugirten Nullsystemnetzes enthält, zugleich auch die zwei Punkte enthält, die den beiden Dreiecken in dem Nullsystembüschel zugehören, das sie mit einander bilden. Seien z. B. $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ die zwei Doppelpunkttripel die auf K liegen, P_1 und P_2 die den Dreiecken zugeordneten Punkte, so schneiden sich also die drei für alle Systeme des Büschels gemeinsamen Nullgeraden, die durch A_2, B_2, C_2 gehen, in P_2, und wenn wir $A_1 B_1 C_1$ zum Doppeldreieck wählen, so geht also der Nullpunktskegelschnitt zu P_2 durch beide Doppelpunktstripel, ebenso der Nullpunktskegelschnitt zu P_1; die beiden Kegelschnitte müssen also in einen zusammenfallen.

Würde also der fragliche Kegelschnitt noch einen Punkt P_1' auf g' enthalten, so müsste er auch dem Dreieck umschrieben sein,

das zu diesem Punkte gehört. Nehmen wir nun andere und andere Punkte Q_1, Q_2 auf der Verbindungslinie $Q_1 Q_2$, so erhalten wir andere und andere Polaren g_1, g_2 und andere und andere zugehörige Nullsysteme; aber das Punkttripel $A_1 B_1 C_1$ bleibt bestehen und ebenso dieser Kegelschnitt. Wir haben damit den bekannten Satz von der Polokonik abgeleitet: „Die Polokonik einer Geraden berührt die Hesse'sche Curve in dem der Geraden conjugirten Punkttripel."

Zusatz. Lässt sich der conjugirte Nullsystembüschel B aus dem conjugirten Nullsystembüschel A mittelst der Geraden p erzeugen, und sind die Schnittpunkte von p P_1, P_2, P_3, so erhalten wir aus dem Doppeldreieck von $A_1 P_1 Q_1 R_1$, das Doppeldreieck zu B, indem wir die Nullpunkte Q_1', R_1', von $P_1 Q$, $P_1 R$ mit einander verbinden, also das Doppeldreieck $P_1 Q_1' R_1'$; $Q_1' R_1'$ ist die zugeordnete Gerade zu $P_1 Q_1 R_1$; ebenso können wir die Dreiecke $P_2 Q_2' R_2'$, $P_3 Q_3' R_3'$ construiren.

Nun sind die zugeordneten Geraden dieser drei Doppeldreiecke von B resp. $Q_1 R_1$, $Q_2 R_2$, $Q_3 R_3$. Aber: alle zugeordneten Geraden eines conjugirten Nullsystembüschels schneiden sich in einem Punkte, dem zugehörigen Punkte dieses Systems. Daraus ergibt sich folgender Satz: Die den drei Durchschnittspunkten einer beliebigen Geraden gegenüberliegenden Doppelseiten eines conjugirten Systembüschels schneiden sich in einem Punkte. In dieser Weise gibt ein conjugirtes Nullsystemnetz Anlass zu einem Netze von reciproken Systemen.

X.

Beziehungen zwischen der C_3 und einer Curve C^2.

Die Punkte, die die C_3 mit einer Curve C^3 gemeinsam hat, lassen sich in folgender Weise bestimmen. Die C^3 sei gebildet von irgend einem Nullsystembüschel M. Greifen wir aus der Zahl der Doppeldreiecke ein beliebiges, ABC, heraus, wo den drei Ecken A, B, C resp. die drei Seiten a, b, c gegenüberliegen, so entspricht jedem Strahlenbüschelcentrum Q auf a als Ort der Nullpunkte der durch Q gehenden Strahlen eine Gerade s_Q durch A. Durch Q gehen zwei weitere Tangenten Qx_1 und Qx_2 an die C^5, und ihre beiden Nullpunkte x_1 und x_2 sind die zwei weitereren Schnittpunkte, die s_Q mit der C_3 gemeinsam hat. Wird nun eine solche Tangente der C^3 gleichzeitig die C_3 in ihrem Nullpunkte x_1 berühren, so wird x_1 ein Berührungspunkt der beiden Curven sein.

Das geht, wenn es überhaupt einer weiteren Erwägung bedarf, daraus hervor, dass, wenn wir zum Punkte x_1 in Bezug auf ein beliebiges Doppeldreieck ABC den Nullpunktskegelschnitt feststellen, dieser Qx_1, also auch die C_3 in x_1 berührt. Weil dieser Kegelschnitt ausser x_1, A, B, C, also nur noch einen Punkt mit der C_3 gemeinsam hat, so geht also an die C^3 von x_1 nur noch eine weitere Tangente. x_1 wird also auch ein Punkt der C^3 sein. Nehmen wir nun zu jedem Q der Seite Q die konische Polare, so gehen bekanntlich alle die Kegelschnitte durch die vier Pole von a in Bezug auf die C_3. Nun ist das Strahlenbüschel der s_q projectivisch der Punktreihe der Q, und diese ist wiederum projectivisch dem Büschel ihrer konischen Polaren. Also wird auch das Strahlenbüschel der s_q projectivisch dem Büschel der konischen Polaren sein, ihr Erzeugniss also eine Curve dritter Ordnung, die mit der gegebenen C_3 9 Punkte gemeinsam hat. Unter diesen 9 werden aber auch die Punkte A, B, C sein: A als Centrum des erzeugenden Strahlenbüschels der s_q, B und C als gleichzeitige Punkte der C_3 und Eckpunkte des Doppeldreiecks, durch die also sowol ihr Strahl s_q (resp. AC und AB), als auch ihre konische Polare geht. Die andern sechs Durchschnittspunkte aber werden solche Punkte X_1 sein, in welchen sich die beiden Curven berühren. Also:

„Eine C_3 hat mit einer Nullgeradenenveloppe C^3 sechs Berührungspunkte und sechs Durchschnittspunkte gemeinsam."

Nehmen wir irgend einen der sechs Durchschnittspunkte A', dessen Nullgerade a' sei, so sind die beiden anderen Tangenten, welche von A' an die C^3 gehen, $A'B'$ und $A'C'$, unendlich benachbart.

Das Doppeldreieck $A'B'C'$ ist also ausgeartet, indem zwei Seiten $A'B'$, $A'C'$, also auch die zwei Ecken B' und C' zusammengefallen sind. Die Gerade $B'C'$, die A' gegenüberliegende Doppelseite, ist also eine weitere gemeinsame Tangente der Curven. Diese Beziehung können wir so aussprechen:

„Unter den Nullgeraden der Punkte einer C_3 in Bezug auf ein ihr einbeschriebenes Nullsystembüschel sind 12 Tangenten der C_3, 6 davon haben ihren Nullpunkt im Berührungspunkt, die andern sechs im Tangentialpunkt; die diesen letzteren gegenüberliegenden Doppelpunkte sind die sechs Durchschnittspunkte der C_3 und der Nullgeradenenveloppe."

Unsere Construction der sechs Berührungspunkte ergibt gleichzeitig den Satz, dass dieselben mit irgend einem Doppelpunktstripel des Nullsystems neun associirte Punkte ergeben.

Nun sind sämtliche Doppelpunktstripel, gebildet von den Doppeldreiecken eines Nullsystemnetzes, einander beigeordnet. Denn zwei beliebige solche Doppeldreiecke $A_\varkappa B_\varkappa C_\varkappa$ und $A_\mu B_\mu C_\mu$ sind einander coordinirt. Wir kommen so zu folgendem Satze:

„Sämtliche Berührungspunktgruppen eines Nullsystemnetzes sind einander beigeordnet."

XVI.

Eigenschaften der imaginären Brennpunkte der Centralkegelschnitte.

Von

Franz Rogel.

Centralkegelschnitte haben bekanntlich vier Brennpunkte, von welchen zwei imaginär sind und auf der Nebenaxe liegen.

Die Untersuchung der Eigenschaften der Letzteren ist Zweck und Ziel dieser Zeilen.

Derselben liegt jene von Dr. Ernst Wilhelm Fiedler[1]) durch Einführung complexer Elemente in die Geometrie des Maasses in's Werk gesetzte Erweiterung der geometrischen Begriffsbildung zu Grunde.

Sie besteht darin, dass die analytischen Ausdrücke für Beziehungen und Eigenschaften reeller Elemente, wie Abstand, Winkel, Richtungscoefficient, Teilungsverhältniss, als Definitionen fortbestehend auch für imaginäre Elemente giltig angenommen werden.

Unter dieser Voraussetzung werden die Sätze über Doppelelemente von Involutionen und über Pole und Polaren von Kegelschnitten in dem Falle imaginärer Punkte und Geraden als richtig anzusehen sein.

---

1) Analytische Geometrie der Kegelschnitte v. Salmon-Fiedler, 5. Aufl. I 21, 63, 93, ff.

Als Folgerungen erscheinen ferner die später zur Verwendung kommenden Hilfssätze:

Wenn in einem Dreiecke ABC die Seiten AC und BC imaginär und gleich gross sind, so halbirt

(α) die Verbindungslinie der Spitze C mit dem Halbirungspunkt M der reellen oder imaginären Grundlinie den Winkel an der Spitze und umgekehrt

(β) die Halbirende des Winkels an der Spitze halbirt auch die Grundlinie und steht auf ihr senkrecht.

Der Beweis stützt sich auf die Tatsache, dass die Spitze S in der Aequidistanten CM liegt, welche als Normalstrahl einer elliptischen Strahlen-Involution aufgefasst werden kann, welche die Seiten AC und BC zu (imaginären) Doppelstrahlen hat, deren Winkel nach Obigem von CM halbirt wird.

Nach diesen vorbereitenden Sätzen bietet die Aufsuchung der Eigenschaften der imaginären Brennpunkte keine nennenswerten Schwierigkeiten mehr dar.

In erster Linie soll nun der Beziehungen gedacht werden, in welchen sie zu den reellen Brennpunkten stehen.

Beide Paare sind Doppelpunkte von Involutionen, welche durch den Schnitt eines und desselben Paares von Parallelstrahlenbüscheln mit den Axen AA' und BB' entstehen.

Ist nämlich p die Polare eines beliebigen Punktes P in der Ebene eines Centralkegelschnittes, $\pi = PM$ das von P auf p gefällte Lot und Q der Schnittpunkt von p mit dem conjugirten Diameter PO, so sind P und Q in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirt und bilden Punktreihen, welche mit den durch die Polaren p und die Lote π gebildeten Parallelstrahlenbüscheln bzhw. perspectivisch liegen.

Letztere schneiden nun auf AA_1 eine hyperbolische Involution mit den reellen Brennpunkten $F_1 F_2$ als Doppelpunkte und auf BB_1 eine elliptische mit den imaginären Brennpunkten J_1. J_2, dem Centralpunkt O und den entsprechenden Punkten U, V ab. Fällt P in die Curve, so sind die Schnittpunkte von Tangente und Normale mit der Nebenaxe ebenfalls entsprechend und ihre Abstände von O bzhw.

$$\frac{b^2}{y}, \quad -\frac{ye^2}{b^2}$$

somit $-e^2$ die Potenz, und

$$(0, \ \pm ic)$$

die Coordinaten der imaginären Brennpunkte.

Ihre mit AA' parallel laufenden Polaren treffen BB' in den Punkten

$$\left(0, \ \mp\frac{b^2}{e}i\right)$$

Die durch J gehende Parallele a zu AA' ist conjugirt und normal zu BB', a und BB' können daher als Normalstrahlen einer durch conjugirte Gerade gebildeten Involution mit dem Scheitel J angesehen werden. Ein anderes Paar conjugirter Geraden ist J_1F_1 und J_1F_2, denn es geht J_1F_2 durch den Pol

$$M\left(\frac{a^2}{e}, \ \frac{b^2}{ei}\right) \text{ von } J_1F_1.$$

Ihre Gleichungen sind

$$ix+y-ei=0, \quad ix+y+ei=0$$

das Product ihrer Richtungscoefficienten

$$i^2=-1=\operatorname{tang}\overline{F_2J_1}\,.\,a\,.\,\operatorname{tang}\overline{F_1J_1}\,.\,a$$

daher auch

$$\operatorname{tang}\overline{ga}\,.\,\operatorname{tang}\overline{g'a}=-1$$

unter g, g' zwei beliebige conjugirte durch J_1 gehende Gerade verstanden.

Wenn nun durch letztere Gleichung auch bei complex conjugirten Geraden der Begriff des Senkrechtstehens definirt wird, so lässt sich behaupten:

(1). „Alle durch einen imaginären Brennpunkt gehenden Paare „conjugirter Geraden stehen aufeinander senkrecht".

Der über XY als Durchmesser construirte Kreis hat mit BB' die Punkte J_1, J_2 gemein; denn es ist

$$0x\,.\,0y=\overline{0F}=-(ie)^2$$

Wird nun in diesem Kreise ein beliebiger Punkt Z angenommen und werden die Normalstrahlen der, aus den in Bezug auf die Curve

conjugirten Geraden gebildeten Involution mit dem Scheitel in Z bestimmt, so gehen dieselben durch X, Y. Denn werden die durch Z gehenden Normalstrahlen ermittelt und ein Kreis durch die Schnittpunkte mit AA' mit dem Mittelpunkt in AA' gelegt, so geht derselbe nach Obigem auch durch J_1, J_2, muss daher mit dem durch X, Y gehenden Kreise identisch sein, da beide die Punkte Z, J_1, J_2 gemein haben:

(2). „Die Verbindungslinien der in der Hauptaxe liegenden „Punkte irgend eines durch die beiden imaginären Brennpunkte „gehenden Kreises mit einem beliebigen Punkte desselben sind die „Normalstrahlen jener durch die conjugirten Geraden gebildeten „Involution."

Da irgend eine Tangente eines Kegelschnittes mit jeder durch den Berührungspunkt gehenden Geraden, also auch mit der Normalen conjugirt ist, so gilt:

(3). „Tangente und Normale irgend eines Punktes Z eines Cen„tral-Kegelschnittes wird erhalten, wenn die Schnittpunkte des durch „Z und die imaginären Brennpunkte gehenden Kreises und der „Nebenaxe mit Z verbunden werden".

Bei der Construction des Kreises können die imaginären Punkte leicht durch reelle ersetzt werden. Es ist dabei nur nötig 0 und Z zu verbinden und in dieser Linie einen Punkt Z' so zu bestimmen, dass

$$0Z \,.\, 0Z' = e^2$$

wird, dann sind Z' und der bezüglich AA' symmetrisch liegende Punkt Z'' ebenfalls Punkte des Kreises.

Da der Pol irgend einer Focalsehne auf der Leitlinie des imaginären Brennpunktes liegt, so folgt:

(4). „Die Verbindungslinien eines imaginären Brennpunktes „mit dem Berührungspunkte einer beliebigen Tangente und ihrem „Schnittpunkte mit der entsprechenden Leitlinie stehen aufeinader „senkrecht".

Irgend ein ausserhalb oder innerhalb der Curve gelegener Punkt kann als Mittelpunkt einer Strahleninvolution betrachtet werden, deren Doppelstrahlen die reellen resp. imaginären Tangenten an die Curve sind; die Normalstrahlen halbiren den von ihnen ein-

schlossenen Winkel, zufolge (2) aber auch den von den Verbindungslinien dieses Punktes mit den Brennpunkten J_1, J_2 gebildeten Winkel:

(5). „Die Halbirungslinien der von zwei beliebigen reellen „oder imaginären Tangenten eines Centralkegelschnittes gebildeten „Winkel halbirt auch den von den Verbindungslinien des Schnitt„punktes der Tangenten mit den imaginären Brennpunkten einge„schlossenen Winkel".

Hieraus folgt:

(6). „Die Halbirungslinien der Winkel, welche die imaginären „Brennstrahlen eines Punktes mit der Nebenaxe einschliessen und „die Tangente der Curve in diesem Punkte schneiden sich in der „Nebenscheiteltangente".

Zu einer gegebenen reellen oder imaginären Tangente lässt sich demnach, wenn die imaginären Punkte gegeben sind; eine beliebige zweite Tangente finden, oder:

(7). „Ein Centralkegelschnitt ist unzweideutig bestimmt, wenn „eine Tangente und die imaginären Brennpunkte gegeben sind".

Ist statt der Tangente ein Curvenpunkt P gegeben, und wird derselbe mit J_1, J_2 verbunden, so ist es unbestimmt, welche von den Halbirungslinien des Winkels J_1PJ_2 Tangente, und welche Normale ist, daher:

(8). „Durch die imaginären Brennpunkte und einen Punkt des „Kegelschnitts ist letzterer nicht bestimmt; den Bedingungen ent„sprechen zwei sich rechtwinklig schneidende Kegelschnitte".

Durch Verbindung des als ganz beliebig aufzufassenden Schnittpunktes K von p und π mit Punkten der Involution (U, O, V, ∞) entsteht eine Strahleninvolution mit den Normalstrahlen KU, KV und den Doppelstrahlen KJ_1, KJ_2:

(9). „Der von den Verbindungslinien irgend eines Punktes K „der Ebene eines Centralkegelschnittes mit den imaginären Brenn„punkten eingeschlossene Winkel wird durch die Normalstrahlen „jener Involution halbirt, welche durch die durch K gehenden con„jugirten Geraden gebildet wird".

Liegt K auf der Curve selbst, so gilt:

(10). „Tangenten und Normalen für irgend einen Punkt eines „Centralkegelschnittes halbiren die von den imaginären Brennstrahlen „eingeschlossenen Winkel".

Ist $M(x, y)$ ein Curvenpunkt und N der Schnittpunkt der Normalen und der kleinen Axe, so ist

$$J_1N = ie + \frac{e^2}{b^2}y, \quad J_1M = b - i\frac{ey}{b}$$

$$J_2N = ie - \frac{e^2}{b^2}y, \quad J_2M = b + i\frac{ey}{b}$$

(worin für die Hyperbel ib statt b zu nehmen ist)
folglich

$$\frac{J_1M}{J_2M} = \frac{J_1N}{J_2N}:$$

(11). „Die Normale teilt die Entfernung der imaginären Brenn„punkte in zwei den Brennstrahlen proportiale Abschnitte".

Fig. 2[1]). Sind T_1, T_2 Berührungspunkte zweier sich in P schneidenden reellen oder imaginären Tangenten, so sind T_1, T_2 Doppelpunkte einer auf T_1T_2 liegenden durch conjugirte Punkte gebildeten Involution. Ist ferner J_1 der Scheitel einer zu derselben perspectivisch liegenden Strahleninvolution, so sind J_1T_1, J_1T_2 ihre Doppelstrahlen; zwei entsprechende Punkte sind die Schnittpunkte Z von T_1T_2 mit der Polaren von J_1 und E von J_1P mit T_1T_2; nun sind J_1Z und J_1P conjugirt, folglich stehen sie aufeinander senkrecht (1) und halbiren als Normalstrahlen die von den Doppelstrahlen J_1T_1, J_1T_2 gebildeten Winkel:

(12). „Die Verbindungslinie eines imaginären Brennpunktes mit „dem reellen Schnittpunkte zweier reeller oder imaginärer Tan„genten halbirt den von den Verbindungslinien dieses Brennpunktes „mit den Berührungspunkten der Tangenten gebildeten Winkel".

Schneidet die Tangenten PT_1 und PT_2 eine beliebige dritte mit dem Berührungspunkte X in A und B, und werden Schnitt- und Berührungspunkte mit einem imaginären Brennpunkte J verbunden, so ist (12)

---

[1]) Beim Lesen der Figur ist einfach J_1, J_2 statt F_1, F_2 zu denken.

$$\overline{AJX} = \tfrac{1}{2}\overline{T_1JX}$$
$$\overline{BJX} = \tfrac{1}{2}\overline{T_2JX}$$
$$\overline{AJX}+\overline{XJB} = \tfrac{1}{2}(\overline{T_1JX}+\overline{T_2JX})$$

oder

$$\overline{AJB} = \tfrac{1}{2}\overline{T_1JT_2} = \text{const.}$$

(13). „Werden zwei feste Tangenten t_1, t_2 eines Centralkegel-„schnittes von einer dritten veränderlichen in den Punkten A, B „geschnitten, so ist der von den Verbindungslinien derselben mit „einem imaginären Brennpunkte eingeschlossene Winkel constant „und zwar halb so gross als der von den Verbindungslinien dieses „Brennpunktes mit den Berührungspunkten der festen Tangenten „gebildete Winkel".

Wird durch J_1 eine beliebige die Centralcurve in M, N schneidende Focalsehne, ferner MJ_2, NJ_2 gezogen, und der Schnittpunkt P der Tangenten in M, N mit J_2 verbunden, so entsteht ein aus Brennstrahlen gebildetes Dreieck MNJ_2, dessen Winkel durch die Normalen in M, N und durch J_2P halbirt werden.

Da aber auch die Winkelhalbirenden eines aus imaginären Seiten gebildeten Dreieckes sich in einem Punkte schneiden, so gilt:

(14). „Die Verbindungslinie des Schnittpunktes der Tangenten „in den Endpunkten einer imaginären Focalsehne mit dem Schnitt-„punkte der entsprechenden Normalen geht durch den anderen ima-„ginären Brennpunkt und ist die Halbirungslinie des Winkels der „Brennstrahlen der Sehnen-Endpunkte".

Die algebraische Summe der imaginären Brennstrahlen eines Curvenpunktes (x, y) drückt sich aus durch:

$$\sqrt{x^2+(y+ie)^2} \pm \sqrt{x^2+(y-ie)^2}$$
$$= \left(b + i\tfrac{e}{b}y\right) + \left(b - i\tfrac{e}{b}\right) \text{ bei der Ellipse}$$

$(e = \sqrt{a^2-b^2})$ und $= \left(ib + \tfrac{e}{b}y\right) - \left(ib + \tfrac{e}{b}y\right)$,

$(e = \sqrt{a^2+b^2})$ bei der Hyperbel daher:

(15). „Bei der Ellipse ist die Summe der imaginären Brenn-„strahlen eines Punktes gleich der kleinen Axe, bei der Hyperbel

„ist die Differenz derselben gleich der mit der imaginären Einheit „multiplicirten kleinen Axe.

Mit Hilfe dieses Satzes und der bekannten Roberval'schen Ueberlegungen lässt sich der Satz (10) noch auf eine zweite Art beweisen.

Bei der Bewegung eines Curvenpunktes M zu dem unendlich nahen N wird der zugehörige imaginäre Brennstrahl r_1 zufolge (15) um eine unendlich kleine Grösse δ zunehmen, wenn der zweite r_2 um dieselbe Grösse — bei der Ellipse ab- — und bei der Hyperbel zunimmt. Die Verlängerungen r_1, r_2 über M, N hinaus bilden demnach ein unendlich kleines imaginäres Viereck $MNPQ$, dessen Seiten sich nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung von δ unterscheiden und daher als gleich gross angenommen werden können. Da nun M, N von P, Q gleich weit abstehen, so ist $MN \perp PQ$; zufolge des Hilfssatzes (α) halbiren diese mit der Tangenten- und Normalenrichtung coincidirenden Diagonalen aber die Winkel an ihren Endpunkten, d. h. die von den Brennstrahlen eingeschlossenen Winkel.

Das Product der genannten Brennstrahlen ist

$$\left(-b+i\frac{e}{b}y\right)\left(-b-i\frac{e}{b}y\right)=b^2+\frac{e^2}{b^2}y^2$$
$$=\frac{a^2}{b^2}y^2+\frac{b^2}{a^2}x^2:$$

(16). „Das Rechteck der imaginären Brennstrahlen eines Punktes „ist gleich dem Quadrate des dem seinen conjugirten Diameters".

Nach Einführung von Polarcoordinaten, die von einem imaginären Brennpunkte J_1 und der Nebenaxe aus gezählt worden ist, wenn mit r_2, θ, Brennstrahl und Anomalie bezeichnet wird

$$y = r\cos t + ie$$

und wegen

$$r = b - i\frac{e}{b}y$$

$$r_1 = \frac{q}{1+i\frac{e}{b}\cos\theta} \quad \text{bzhw.} \quad r_2 = \frac{q}{1-i\frac{e}{b}\cos\theta}$$

wo

$q = \frac{a^2}{b}$ bei der Ellipse und $q = \frac{a^2}{b} i$ bei der Hyperbel

die Länge des zur Nebenaxe senkrechten imaginären Brennstrahles, also den sich auf imaginäre Brennpunkte beziehenden Parameter bezeichnet. Hieraus folgt

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{2}{q}$$

(17). „Das harmonische Mittel zwischen den Abschnitten einer „imaginären Focalsehne ist unveränderlich und dem Parameter „$\left(\frac{a^2}{b}\right)$ gleich."

Durch Vergleich des Productes mit der Summe imaginärer Brennstrahlen

$$r_1 r_2 = \frac{q^2}{1 + \frac{e^2}{b^2}\cos^2\theta}, \quad r_1 + s_2 = \frac{2q}{1 + \frac{e^2}{b^2}\cos^2\theta}$$

ergiebt sich:

(18). „Das Rechteck aus den Abschnitten einer imaginären „Focalsehne steht zur ganzen Sehne in einem unveränderlichen Ver„hältnisse."

Da das Quadrat des Halbmessers, der mit der Nebenaxe den Winkel θ bildet,

$$d^2 = \frac{\pm a^2}{1 + \frac{e^2}{b^2}\cos^2\theta}$$

und die parallele Focalsehne (18)

$$\frac{2q}{1 + \frac{e^2}{b^2}\cos^2\theta} = \frac{2}{b} d^2$$

ist, so folgt:

(19). Das Rechteck aus einer imaginären Folalsehne und der „Nebenaxe giebt das Quadrat des zu ihr parallelen Durchmessers".

Hieraus geht mit Rücksicht auf die bekannte Tatsache, dass die Summe zweier conjugirten Diameter constant ist, noch hervor:

(20). „Die Summe der zu zwei conjugirten Diametern parallelen „imaginären Focalsehnen ist constant".

Die Längen zweier zu einander rechtwinkligen imaginären Focalsehnen sind, wie aus obigem bekannt,

$$\frac{2q}{1+\frac{e^2}{b^2}\cos^2\theta}, \quad \frac{2q}{1+\frac{e^2}{b^2}\sin^2\theta}$$

daher:

(21) „Die Summe der Reciproken zweier aufeinander senkrecht „stehenden imaginären Focalsehnen ist constant."

Liegen auf der verlängerten J_2T_1 (Fig. 2) zwei Punkte H in Abständen

$$HT_1 = T_1J_1$$

von T_1, so ist zufolge (15) HJ_2 bei der Ellipse $= 2b$ und bei der Hyperbel $= i2b$, wenn das eine mal H ausserhalb, das andre mal innerhalb der Curve genommen wird. Es entsteht hiebei das gleichschenklige Dreieck J_1HT_1, dessen Winkel an der Spitze T_1 durch die Tangente resp. Normale halbirt wird (10); zufolge des Hilfssatzes (β) halbiren letztere dann aber auch die Grundlinie HJ_1 in M. Da nun M und 0 die anstossenden Seiten J_1H und J_1J_2 des Dreieckes HJ_1J_2 halbiren, so muss

$$M0 = \tfrac{1}{2}HJ_2 \text{ sein:}$$

(22). „Die Fusspunkte der aus den imaginären Brennpunkten „auf ihre Tangenten gefällten Lote liegen bei der Ellipse auf dem „einbeschriebenen Kreise und bei der Hyperbel auf einem concen„trischen imaginären Kreise mit dem Radius $= ib$".

Wenn aus den Brennpunkten J_1. J_2 Lote auf eine beliebige Tangente gefällt werden, deren Fusspunkte P_1, P_2 heissen mögen, so liegen dieselben auf einem concentrischen Kreise mit dem Radius

$$r = b \text{ resp. } = ib$$

Trifft J_1P_1 diesen Kreis in dem zweiten Schnittpunkte Q, dann ist zufolge der symmetrischen Lage

$$J_1 Q = J_2 P_2$$

ist ferner R der Fusspunkt des vom Centrum 0 auf $P_1 Q$ gefällten Lotes

$$OR = d$$

so ist

$$P_1 J_1 \cdot J_1 Q = P_1 R + R J_1)(P_1 R - R J_1) =$$
$$= (\sqrt{r^2 - d^2} + \sqrt{-e^2 - d^2})\,(\sqrt{r^2 - d^2} - \sqrt{-e^2 - d^2}) = r^2 + e^2 = a^2$$

(23). „Das Product der aus den beiden imaginären Brenn„punkten eines Centralkegelschnittes auf irgend eine Tangente des„selben gefällten Lote ist gleich dem Quadrate der Hauptaxe".

Werden in dem Vierecke $J_1 J_2 P_1 P_2$ die sich in M schneidenden Diagonalen $J_1 P_2$, $J_2 P_1$ und durch M eine (Fig. 3) [1]) Senkrechte zur Tangente $P_1 P_2$ gezogen, welche dieselbe in T und BB' in N schneidet, so liegen die Punkte $TMN\infty$ harmonisch, daher

$$MT = MN$$

Wird ferner J_1 und J_2 mit T verbunden und beide Gerade bis zum Schnittpunkte U mit $J_1 P_1$ verlängert, so sind die Punktreihen $TMN\infty$ und $UP_1 J_1 \infty$ perspectivisch, daher

$$UP_1 = P_1 J_1$$

Das die letzteren Punkte aus T projicirende Strahlenbüschel ist somit auch harmonisch, daher halbirt TN den Winkel $J_1 TJ_2$ der dem Punkte T entsprechenden Brennstrahlen, folglich ist T ein Punkt der Curve und TN eine Normale:

(24). „Die Geraden, welche je einen imaginären Brennpunkt „mit dem Fusspunkte der Normale vom andern Brennpunkt auf eine „Tangente verbindet, schneiden einander in der entsprechenden Nor„male des Centralkegelschnittes und halbiren sie".

Ist M ein beliebiger Punkt, $MM' \parallel DE$ L_1, L_2 die Leitlinien der imaginären Brennpunkte, welche von MM' in H, H' geschnitten werden, ferner HJ_1 senkr. a. $J_1 H'$, so sind HJ_1, $H'J_1$ conjugirt (1), hal-

1) Siehe Anmerkung zu Fig. 2.

biren als Normalstrahlen einer Involution daher den von ihren Doppelstrahlen J_1M, J_1M' eingeschlossenen Winkel; zufolge (11) ist dann

$$\frac{MJ_1}{MH} = \frac{M'J_1}{M'H}$$

Nun ist bei der Ellipse

$$M'J_1 = MJ_2 = BB' - J_1M$$
$$M'H = DE - HM$$

daher

$$\frac{MJ_1}{MH} = \frac{BB' - J_1M}{DD - HM} = \frac{0B}{0D}$$

und wegen

$$0D = \frac{\overline{0B}^2}{0J_1}$$

auch

$$-\frac{0J}{0B} = i\frac{e}{b}$$

Bei der Hyperbel ist

$$M'J_1 = MJ_1 = BB' + J_1M$$
$$M'H = DE + HM$$

daher

$$\frac{MJ_1}{MH} = \frac{BB' + J_1M}{DE + HM} = \frac{0J_1}{0B} = i\frac{e}{b}$$

(25). „Das Verhältniss der Abstände eines jeden Punktes eines „Centralkegelschnittes von einem der imaginären Brennpunkte und „seiner Polaren ist unveränderlich und zwar $= i\frac{e}{b}$; bei der Ellipse „ist dieses Verhältniss kleiner, bei der Hyperbel grösser als „die imaginäre Einheit".

Die Gleichung der Tangente am Ende einer Brennpunkts-Abscisse ist

$$bx + iey = b^2$$

woraus

$$x = b - i\frac{c}{b}y,$$

also gleich dem Brennstrahl des Punktes (x, y):

(26). „In einem Centralkegelschnitte ist der imaginäre Brenn„strahl eines jeden Punktes gleich der bis zum Schnitte mit der

„Tangente am Endpunkt der Brennpunktsabscisse verlängerten Ab„scisse des Punktes".

Bei allen diesen Sätzen, welchen sich noch eine grosse Anzal minder einfacher anreihen lassen, tritt die Analogie mit jenen über reelle Brennpunkte deutlich zu Tage.

Der Schlüssel um aus den Eigenschaften reeller die entsprechenden imaginärer Brennpunkte zu finden, ergiebt sich aus folgender Betrachtung.

Jede Eigenschaft reeller Brennpunkte lässt sich, wenn von der Abhängigkeit von Coordinaten gegebener Punkte und Geraden als nicht in Betracht kommend abgesehen wird, ausdrücken durch

$$f(a,\ b,\ \pm e) = 0 \qquad (\gamma)$$

Um auf imaginäre Brennpunkte überzugehen, ist es nun nur notwendig, a mit b zu vertauschen, wenn sich diese Gleichung auf eine Ellipse bezieht.

Es verwandelt sich dann

$$\pm e = \pm\sqrt{a^2-b^2} \text{ in } \pm\sqrt{b^2-a^2} = \pm ie$$

d. h. die Abscissen der imaginären Brennpunkte, welche auf der in die Abscissenaxe fallenden kleinen Axe liegen.

Die correspondirenden Eigenschaften der Hyperbel gehen hieraus offenbar durch Vertauschung von b mit ib hervor.

Es lässt sich demnach aussprechen:

(27). „Um von einem Satze über reelle auf den entsprechen„den der imaginären Brennpunkte überzugehen, ist bei der „Ellipse a mit b [1]), und bei der Hyperbel a mit ib zu vertauschen".

Besondere Erwähnung verdient der Fall, wo in der Gleichung (γ) weder a noch b explicit auftritt. Die durch dieselbe ausgedrückte

1) Es sind hierunter auch die Richtungen von a und b zu verstehen, daher kommt in (26) statt „Ordinate" „Abscisse" zu stehen.

Eigenschaft wird daher wörtlich auch für imaginäre Brennpunkte Geltung haben. (Vergl. die Sätze 1, 4, 5. 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 18, 20, 21, 24, [25]).

Schliesslich möge noch ein, keines Beweises bedürfender umkehrbarer Folgesatz (15) Platz finden.

(28). „Bei Centralrotationsflächen 2. Ordnung ist die Summe „oder Differenz der Entfernungen irgend eines ihrer Punkte von „zwei fixen, reellen oder imaginären Punkten der Rotationsaxe „constant u. zw. gleich der in der Rotationsaxe liegenden Axe „der Fläche, welche beim einschaligen Rotationshyperboloid noch „mit der imaginären Einheit zu multipliciren ist".

XVII.

Zur fünften Form der Integrabilitätsbedingungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Von

Ernst Schultz.

Bezeichnen wir $p = \frac{\partial z}{\partial x}$:

$$p_1 = \varphi_1(x_1 \ldots x_n, a_1, p_2 \ldots p_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_m = \varphi_m(x_1 \ldots x_n, a_1 \ldots a_m \ldots, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_n = \varphi_n(x_1 \ldots x_n, a_1 \ldots a_n)$$

Ferner

$$p_1 = \psi_1(x_1 \ldots x_n, a_1 \ldots a_m, p_{m+1} \ldots p_n)$$
$$p_2 = \psi_2(x_1 \ldots x_n, a_1 \ldots a_m, p_{m+1} \ldots p_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_m = \psi_m(x_1 \ldots x_n, a_1 \ldots a_m, p_{m+1} \ldots p_n)$$

Bestehen die Gleichungen:

$$(p_1 - \varphi_1, p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = \Phi_1 = 0$$
$$(p_2 - \varphi_2, p_{m+2} - \varphi_{m+1}) = \Phi_2 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(p_m - \varphi_m, p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = \Phi_m = 0$$

so bestehen auch die Gleichungen

$$(p_1 - \psi_1,\ p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = \Psi_1 = 0$$
$$(p_2 - \psi_2,\ p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = \Psi_2 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(p_m - \psi_m,\ p_{m+2} - \varphi_{m+1}) = \Psi_m = 0$$

Die Ableitung dieses Satzes ist in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung von Paul Mansion nicht ganz correct, und bei den schliesslich erhaltenen Relationen hat eine Verwechselung der φ und ψ stattgefunden. Es soll hier der richtige Beweis geliefert werden.

Es ist klar, dass $\varphi_m = \psi_m$ identisch sind. Es wird ψ_{m-1} identisch φ_{m-1}, wenn wir in φ_{m-1} für p_m ψ_m setzen. Wir erhalten also die Identität:

$$\psi_{m-1} = \varphi_{m-1}(x_1 \ldots x_n,\ a_1 \ldots a_{m-1},\ \psi_m,\ p_{m+1} \ldots p_n)$$

Es kommt also hierin p_m nur insofern vor, als es in ψ_m enthalten ist. Differentiiren wir partiell nach x, so besteht die Relation

$$\frac{\partial(p_{m-1} - \psi_{m-1})}{\partial x} = \frac{\partial(p_{m-1} - \varphi_{m-1})}{\partial x} + \frac{\partial(p_{m-1} - \varphi_{m-1})}{\partial \psi_m}\,\frac{\partial \psi_m}{\partial x}$$

Diese besteht für alle x. Anders wird es jedoch, wenn wir nach den p differentiiren. Wir erhalten

$$\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial p} = \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial p} + \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial \psi_m}\,\frac{\partial \psi_m}{\partial p}$$

Diese Gleichung besteht für alle p bis auf p_m. Es enthält nämlich φ_{m-1}, p_m explicit. Das φ_{m-1}, welches nach Substitution von ψ_m für p_m identisch ψ_{m-1} wird, enthält p_m nicht explicit. Es wird also

$$\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial p_m} = \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial p_m}\,\frac{\partial \psi_m}{\partial p_m}$$

Hiefür können wir auch schreiben

$$\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial p_m} = \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial p_m} - \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial p_m} + \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial \psi_m}\,\frac{\partial \psi_m}{\partial p_m}$$

$$\frac{\partial(p_{m-1} - \psi_{m-1})}{\partial p_1} = \frac{\partial(p_{m-1} - \varphi_{m-1})}{\partial p_1} + \frac{\partial(p_{m-1} - \varphi_{m-1})}{\partial p_1}\,\frac{\partial \psi_m}{\partial p_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial(p_{m-1} - \psi_{m-1})}{\partial p_{m-1}} = \frac{\partial(p_{m-1} - \varphi_{m-1})}{\partial p_{m-1}} + \frac{\partial(p_{m-1} - \varphi_{m-1})}{\partial p_{m-1}}\,\frac{\partial \psi_m}{\partial p_{m-1}}$$

$$\frac{\partial(p_{m-1}-\psi_{m-2})}{\partial p_m} = \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\partial p_m} + \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial p_m} + \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial p_m}$$

$$\frac{\partial(p_{m-1}-\psi_{m-2})}{\partial p_{m+1}} = \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\partial p_{m+1}} + \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial p_m}$$

. . . . . .

Dementsprechend ergiebt sich

$$(p_{m-1}-\psi_{m-2},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) = (p_{m-1}-\varphi_{m-1},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) + \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\partial p_m}(\psi_m,\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) - \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial p_m}\frac{\partial(p_{m+1}-\varphi_{m+1})}{\partial x_m}$$

Es ist

$$(\psi_m,\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) + \frac{\partial(p_{m+1}-\varphi_{m+1})}{\partial x_m} = (\psi_m - p_m,\ p_{m+1}-\varphi_{m+1})$$

Also erhalten wir

$$(p_{m-1}-\psi_{m-1},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) = (p_{m-1}\varphi_{m-1},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) + \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\partial p_m}(\psi_m - p_m,\ p_{m+1}-\varphi_{m+1})$$

oder

$$= (p_{m-1}-\varphi_{m-1},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) + \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial p_m}\psi_m$$

Wollen wir jetzt die entsprechende Gleichung für ψ_{m-2} ableiten, so haben wir zu beachten, dass φ_{m-2} identisch ψ_{m-2} wird, wenn wir in φ_{m-2} für $p_m\psi_m$, und für $p_{m-1}\psi_{m-1}$ einsetzen. Wir erhalten also:

$$\psi_{m-2} = \varphi_{m-2}(x_1 \ldots x_n,\ a_1 \ldots a_{m-2},\ \psi_{m-1},\ \psi_m,\ p_{m+1} \ldots p_n)$$

Es ist hiebei zu beachten, dass in diesem φ_{m-2}

$$p_{m-1} \text{ und } p_m$$

explicit nicht mehr vorkommen. Es wird folgende Relation für alle x bestehen:

$$\frac{\partial(p_{m-2}-\psi_{m-2})}{\partial x} = \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial x} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m-1}}\frac{d\psi_{m-1}}{\partial x} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial x}$$

Wenn wir nun nach den verschiedenen p differentiiren, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{\partial(p_{m-2}-\psi_{m-2})}{\partial p_1} = \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_1} + \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial p_1} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_m}\frac{\partial\varphi_m}{\partial p_1}$$

. . . . . .

$$\frac{\partial(p_{m-2}-\psi_{m-2})}{\partial p_{m-2}} = \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m-2}} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial p_{m-2}} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial p_{m-2}}$$

$$\frac{\partial(p_{m-2}-\psi_{m-2})}{\partial p_{m-1}} = \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m-1}} + \frac{\partial q_{m-2}}{\partial p_{m-1}} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial p_{m-1}} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial p_{m-1}}$$

$$\frac{\partial(p_{m-2}-\psi_{m-2})}{\partial p_m} = \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_m} + \frac{\partial\varphi_{m-2}}{\partial p_m} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial p_m} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial p_m}$$

$$\frac{\partial(p_{m-2}-\psi_{m-2})}{\partial p_{m+1}} = \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m+1}} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial p_m} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_m}\frac{\partial\varphi_m}{\partial p_m}$$

. . . . . .

Folglich wird

$$(p_{m-2}-\psi_{m-2},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) = (p_{m-2}-\varphi_{m-2},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m-1}}(\psi_{m-1},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) - \frac{\partial\varphi_{m-2}}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial(p_{m+1}-\varphi_{m+1})}{\partial x_{m-1}} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_m}(\psi_m,\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) - \frac{\partial\varphi_{m-2}}{\partial p_m}\frac{\partial(p_{m+1}-\varphi_{m+1})}{\partial x_m}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$(p_{m-2}-\psi_{m-2},\ p_{m-2}-\varphi_{m-2}) = (p_{m-2}-\varphi_{m-2},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) + \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m-1}}(\psi_{m-1}-p_{m-1},\ p_{m+2}-\varphi_{m+1}) + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_m}(\psi_m-p_m,\ p_{m+1}-\varphi_{m+1})$$

Führen wir die Φ und Ψ ein, so erhalten wir:

$$(p_{n-2} - \psi_{n-2},\ p_{n+1} - \varphi_{n+1}) = \Phi_{n-2} + \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial p_{n-1}} \Psi_{n-1} + \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial p_n} \Psi_n$$

Da ψ_n identisch φ_n ist, so muss auch Ψ_n identisch Φ_n sein. Diese Identität besteht jedoch nicht mehr für

$$\Psi_{n-1} \text{ und } \Phi_{n-1}$$

u. s. w. Wir gelangen also zu folgendem Gleichungssystem:

$$\Psi_{n-1} = \Phi_{n-1} + \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial p_n} \Phi_n$$

$$\Psi_{n-2} = \Phi_{n-2} + \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial p_{n-1}} \Psi_{n-1} + \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial p_n} \Phi_n$$

$$\Psi_{n-3} = \Phi_{n-3} + \frac{\partial \varphi_{n-3}}{\partial p_{n-2}} \Psi_{n-2} + \frac{\partial \varphi_{n-3}}{\partial p_{n-1}} \Psi_{n-1} + \frac{\partial \varphi_{n-3}}{\partial p_n} \Phi_n$$

. . . . . .

$$\Psi_1 = \Phi_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2} \Psi_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_3} \Psi_3 + \ldots\ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_n} \Phi_n$$

Aus diesen Gleichungen können wir die Ψ als Funktionen der Φ darstellen, indem wir die erhaltenen Werte von $\Psi_n, \ldots, \Psi_{n-1}$ in das nächst niedrige Ψ_{n-1} einsetzen.

Ferner bemerke ich noch, dass die Determinante dieses Systems den Wert $(-1)^{n-1}$ hat.

Aus diesem Gleichungssystem folgt nun, dass die $\Psi = 0$ werden, sobald die Φ gleich 0 sind, was zu zeigen war.

Stettin, Juli 1894.

XVIII.

Zur Bour's Methode der Integration eines Systems simultaner partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von

Ernst Schultz.

Ist ein System von m simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit n Vartabeln gegeben, so sind nach der Methode von Bour noch weitere $n - m$ Gleichungen zu suchen, sodass der Ausdruck

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots p_n dx_n$$

integrabel wird.

Diese neu zu bestimmenden Gleichungen lassen sich in einzelnen Fällen durch Zerlegung der gegebenen Gleichungen in mehrere leicht finden. Ein vortreffliches Beispiel ist das von Mansion in seiner Theorie der partiellen Differentialgleichungen behandelte System:

$$p_1 p_3 - x_2 x_4 = 0; \quad p_2 p_4 - x_1 x_3 = 0 \tag{1}$$

wo

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ ist.}$$

Es sind hier noch zwei Gleichungen zu suchen, um $p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 + p_4 dx_4$ zu einem vollständigen Differential zu machen.

Die beiden gegebenen Gleichungen lassen sich in folgende zerlegen:

(2) $$\frac{x_2}{p_3} = f_1; \quad \frac{p_2}{x_3} = [illegible] \quad \frac{x_4}{p_4} = [illegible] \quad \frac{p_4}{x_4} = [illegible]$$

Die Grössen f_1 und f_2 können [illegible] Grössen $x_1 \ldots x_4$, $p_1 \ldots p_4$ [illegible] das Gleichungssystem [illegible] eine Lösung von [illegible] zu bestimmen, dass die [illegible]

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 + p_4 dx_4$$

integrabel zu machen. [illegible]

(3) $$H_1 = x_2 - f_1 p_3 = 0 \quad E_2 = p_3 - f_2 x_4 = 0$$
$$H_3 = x_1 - f_2 p_4 = 0 \quad E_4 = p_4 - f_1 x_3 = 1$$

so sind f_1 und f_2 so zu bestimmen, dass die [illegible]

$$[illegible] = 1$$

identisch befriedigt werden, wo

$$(H_i, H_k) = \frac{\partial H_i}{\partial x_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial H_i}{\partial x_4}\frac{\partial H_k}{\partial p_4} - \frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial x_1} - \ldots - \frac{\partial H_i}{\partial p_4}\frac{\partial H_k}{\partial x_4} \text{ etc.}$$

Führen wir die Rechnung aus, [illegible] als Functionen der Grössen $x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3, p_4$ [illegible] wir folgende Bedingungsgleichungen:

$$(H_1, H_2) = -x_4 \frac{\partial f_1}{\partial p_2} - p_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - f_1 x_1 \frac{\partial f_1}{\partial p_3} - f_1 p_1 \frac{\partial f_1}{\partial p_4} + p_1 p_4 [illegible] = 1$$

$$(H_1, H_3) = -p_4 \frac{\partial f_2}{\partial p_2} - f_2 p_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_4} - p_1 \frac{\partial f_2}{\partial p_3} - f_2 p_1 \frac{\partial f_2}{\partial p_4} + p_1 p_4 [illegible] = 1$$

$$(H_1, H_4) = 1 - f_1 f_2 + p_1 x_1 [illegible] = 1$$

$$(H_2, H_4) = -x_4 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + f_1 p_1 \frac{\partial f_1}{\partial p_4} + x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - f_1 p_4 \frac{\partial f_1}{\partial p_4} + x_4 x_1 [illegible] = 1$$

$$(H_2, H_3) = f_1 f_2 - 1 + p_1 x_4 [illegible] = 1$$

$$(H_3, H_4) = -x_1 \frac{\partial f_2}{\partial p_1} - p_4 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + f_2 p_4 \frac{\partial f_2}{\partial p_3} - f_2 x_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_4} + p_4 x_1 [illegible] = 1$$

(f_1, f_2) oder (f_1, f_2) ist analog dem Ausdruck (H_i, H_k) gebildet. Damit die beiden Reihen dieser Gleichungen identisch verschwinden, muss zunächst

$$(p_1 - \psi_1,\ p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = \Psi_1 = 0$$
$$(p_2 - \psi_2,\ p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = \Psi_2 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(p_m - \psi_m,\ p_{m+2} - \varphi_{m+1}) = \Psi_m = 0$$

Die Ableitung dieses Satzes ist in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung von Paul Mansion nicht ganz correct, und bei den schliesslich erhaltenen Relationen hat eine Verwechselung der φ und ψ stattgefunden. Es soll hier der richtige Beweis geliefert werden.

Es ist klar, dass $\varphi_m = \psi_m$ identisch sind. Es wird ψ_{m-1} identisch φ_{m-1}, wenn wir in φ_{m-1} für p_m ψ_m setzen. Wir erhalten also die Identität:

$$\psi_{m-1} = \varphi_{m-1}(x_1 \ldots x_n,\ a_1 \ldots a_{m-1},\ \psi_m,\ p_{m+1} \ldots p_n)$$

Es kommt also hierin p_m nur insofern vor, als es in ψ_m enthalten ist. Differentiiren wir partiell nach x, so besteht die Relation

$$\frac{\partial(p_{m-1} - \psi_{m-1})}{\partial x} = \frac{\partial(p_{m-1} - \varphi_{m-1})}{\partial x} + \frac{\partial(p_{m-1} - \varphi_{m-1})}{\partial \psi_m}\,\frac{\partial \psi_m}{\partial x}$$

Diese besteht für alle x. Anders wird es jedoch, wenn wir nach den p differentiiren. Wir erhalten

$$\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial p} = \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial p} + \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial \psi_m}\,\frac{\partial \psi_m}{\partial p}$$

Diese Gleichung besteht für alle p bis auf p_m. Es enthält nämlich φ_{m-1}, p_m explicit. Das φ_{m-1}, welches nach Substitution von ψ_m für p_m identisch ψ_{m-1} wird, enthält p_m nicht explicit. Es wird also

$$\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial p_m} = \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial p_m}\,\frac{\partial \psi_m}{\partial p_m}$$

Hiefür können wir auch schreiben

$$\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial p_m} = \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial p_m} - \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial p_m} + \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial \psi_m}\,\frac{\partial \psi_m}{\partial p_m}$$

$$\frac{\partial(p_{m-1} - \psi_{m-1})}{\partial p_1} = \frac{\partial(p_{m-1} - \varphi_{m-1})}{\partial p_1} + \frac{\partial(p_{m-1} - \varphi_{m-1})}{\partial p_1}\,\frac{\partial \psi_m}{\partial p_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial(p_{m-1} - \psi_{m-1})}{\partial p_{m-1}} = \frac{\partial(p_{m-1} - \varphi_{m-1})}{\partial p_{m-1}} + \frac{\partial(p_{m-1} - \varphi_{m-1})}{\partial p_{m-1}}\,\frac{\partial \psi_m}{\partial p_{m-1}}$$

$$\frac{\partial(p_{m-1}-\psi_{m-2})}{\partial p_m} = \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\partial p_m} + \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial p_m} + \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial p_m}$$

$$\frac{\partial(p_{m-1}-\psi_{m-2})}{\partial p_{m+1}} = \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\partial p_{m+1}} + \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial p_m}$$

. . . . . .

Dementsprechend ergiebt sich

$$(p_{m-1}-\psi_{m-2},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) = (p_{m-1}-\varphi_{m-1},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) + \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\partial p_m}(\psi_m,\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) - \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial p_m}\frac{\partial(p_{m+1}-\varphi_{m+1})}{\partial x_m}$$

Es ist

$$(\psi_m,\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) + \frac{\partial(p_{m+1}-\varphi_{m+1})}{\partial x_m} = (\psi_m - p_m,\ p_{m+1}-\varphi_{m+1})$$

Also erhalten wir

$$(p_{m-1}-\psi_{m-1},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) = (p_{m-1}\varphi_{m-1},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) + \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\partial p_m}(\psi_m - p_m,\ p_{m+1}-\varphi_{m+1})$$

oder

$$= (p_{m-1}-\varphi_{m-1},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) + \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial p_m}\psi_m$$

Wollen wir jetzt die entsprechende Gleichung für ψ_{m-2} ableiten, so haben wir zu beachten, dass φ_{m-2} identisch ψ_{m-2} wird, wenn wir in φ_{m-2} für $p_m\,\psi_m$, und für $p_{m-1}\,\psi_{m-1}$ einsetzen. Wir erhalten also:

$$\psi_{m-2} = \varphi_{m-2}(x_1 \ldots x_n,\ a_1 \ldots a_{m-2},\ \psi_{m-1},\ \psi_m,\ p_{m+1} \ldots p_n)$$

Es ist hiebei zu beachten, dass in diesem φ_{m-2}

$$p_{m-1} \quad \text{und} \quad p_m$$

explicit nicht mehr vorkommen. Es wird folgende Relation für alle x bestehen:

$$\frac{\partial(p_{m-2}-\psi_{m-2})}{\partial x} = \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial x} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m-1}}\frac{d\psi_{m-1}}{\partial x} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial x}$$

Wenn wir nun nach den verschiedenen p differentiiren, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$p_4 = \frac{ap_3 x_1 x_3}{1+ax_1 x_4}$$

Mit Substitution dieses Wertes von p_4 geht die erste Gleichung über in

$$x_2 = ap_3^2\left(x_3 - \frac{ax_1 x_3 x_4}{1+ax_1 x_4}\right)$$

Mithin erhalten wir für p_3:

$$p_3 = \sqrt{\frac{x_2(1+ax_1x_4)}{ax_3}}$$

wobei wir das doppelte Zeichen mit $\sqrt{\ }$ verbinden. Für p_1 erhalten wir

$$p_1 = \frac{ax_3 x_4 p_3}{1+ax_1 x_4}$$

und für p_2

$$p_2 = \frac{1+ax_1 x_4}{ap_3}$$

Wir erhalten also für ds:

$$ds = \frac{ax_3 x_4}{1+ax_1 x_4}p_3\,dx_1 + \frac{1+ax_1 x_4}{ap_3}dx_2 + p_3\,dx_3 + \frac{ax_1 x_3}{1+ax_1 x_4}p_3\,dx_4$$

Setzen wir nun den für p_3 erhaltenen Wert ein, so erhalten wir

$$ds = \sqrt{\frac{ax_2 x_3}{1+ax_1 x_4}}x_4\,dx_1 + \sqrt{\frac{ax_2 x_3}{1+ax_1 x_4}}x_1\,dx_4 + \sqrt{\frac{x_3(1+ax_1 x_4}{ax_2}}dx_2 + \sqrt{\frac{x_3(1+ax_1 x_4)}{ax_3}}dx_3$$

Hieraus ergiebt sich:

$$ds = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{ax_2 x_3}{1+ax_1 x_4}}d(1+ax_1 x_4) + 2\sqrt{\frac{1+ax_1 x_4}{a}}d\sqrt{x_2 x_3}$$

folglich wird

$$ds = 2d\sqrt{\frac{x_2 x_3(1+ax_1 x_4)}{a}}$$

Wenn wir jetzt integriren, so erhalten wir

$$s+b = 2\sqrt{\frac{x_2 x_3(1+ax_1 x_4)}{a}}$$

Dies ist eine neue Lösung des Gleichungssystems (1), welche von Mansion nicht angegeben wird.

Ausser dem unter (2) angegebenen System können die gegebenen Gleichungen (1) auch in folgendes System zerlegt werden:

$$\frac{x_2}{p_1} = \frac{p_3}{x_4} \quad \text{und} \quad \frac{x_1}{p_2} = \frac{p_4}{x_3}$$

oder, wenn wir die Functionen f_1 und f_2 einführen, so erhalten wir das System:

$$(5) \qquad \frac{x_2}{p_1} = f_1; \quad \frac{p_3}{x_4} = f_1: \quad \frac{x_1}{p_2} = f_2; \quad \frac{p_4}{x_3} = f_2$$

Setzen wir jetzt

$$H_1 = x_2 - p_1 f_1; \quad H_3 = p_3 - x_4 f_1; \quad H_3 = x_1 - p_2 f_2; \quad H_4 = p_4 - x_3 f_2$$

Jetzt sind die Functionen f_1 und f_2 so zu bestimmen, dass die Bedingungsgleichungen

$$(H_i, H_k) = 0$$

identisch erfüllt werden. Führen wir die Rechnung aus, so erhalten wir:

$$(6) \quad \begin{aligned}
(H_1, H_2) &= -x_4 \frac{\partial f_1}{\partial p_2} - p_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - f_1 x_4 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - f_1 p_3 \frac{\partial f_1}{\partial p_4} \\
&\quad + p_1 x_4 (f_1, f_1) = 0 \\
(H_1, H_3) &= -f_2 + f_1 + p_1 p_2 (f_1, f_2) = 0 \\
(H_1, H_4) &= -x_3 \frac{\partial f_2}{\partial p_2} - p_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_4} - p_1 f_2 \frac{\partial f_1}{\partial p_3} - f_1 x_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\
&\quad + p_1 x_3 (f_1, f_2) = 0 \\
(H_2, H_3) &= f_2 x_4) \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + f_1 p_2 \frac{\partial f_2}{\partial p_1} + x_4 \frac{\partial f_1}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\
&\quad + p_2 x_4 (f_1, f_2) = 0 \\
(H_2, H_4) &= -f_1 + f_2 + x_3 x_4 (f_1, f_2) = 0 \\
(H_3, H_4) &= -x_3 \frac{\partial f_2}{\partial p_1} - p_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_4} - p_2 f_2 \frac{\partial f_2}{\partial p_3} - f_2 x_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\
&\quad + p_2 x_3 (f_2, f_2) = 0
\end{aligned}$$

Damit diese Gleichungen erfüllt werden, muss zunächst $f_1 = f_2$ sein, ferner können wir $f_1 = f_2$ gleich einer Constanten setzen. Es sei

$$f_1 = f_2 = a$$

Alsdann erhalten wir für die Grössen p folgende Werte:

$$p_1 = \frac{x_2}{a}; \quad p_2 = \frac{x_1}{a} \quad p_3 = a x_4; \quad p_4 = a x_3$$

Dementsprechend ist

$$dz = \frac{x_2}{a}dx_1 + \frac{x_1}{a}dx_2 + a x_4 dx_3 + a x_3 dx_4$$

und durch Integration erhalten wir

$$z + b = \frac{x_1 x_2}{a} + a x_3 x_4$$

Dies ist die zweite Lösung, welche Mansion angiebt.

Diese Methode lässt erkennen, dass diese Lösungen Gruppen von Gleichungssystemen angehören. Nehmen wir nämlich den Fall, dass f_1 und f_2 reciprok sind, so gelangen wir zu dem Gleichungssystem:

$$\frac{x_2}{p_3} = \frac{p_4}{x_1} = \frac{x_3}{p_2} = \frac{p_1}{x_4}$$

Hieraus können wir also folgende Gleichungssysteme bilden

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} &1)\quad x_2 x_4 = p_1 p_3 \quad \text{und} \quad x_1 x_3 = p_2 p_4 \\ &2)\quad x_1 x_2 = p_3 p_4 \quad \text{und} \quad x_3 x_4 = p_1 p_2 \\ &3)\quad x_2 p_2 = p_3 x_3 \quad \text{und} \quad x_1 p_1 = x_4 p_4 \end{aligned}$$

Das erste System ist das gegebene, von welchem wir ausgingen. Lösungen von dieser Gruppe sind:

$$z + b = a x_1 x_4 + \frac{x_2 x_3}{a} \quad \text{und} \quad z + b = 2\sqrt{\frac{x_2 x_3}{a}(1 + a x_1 x_4}$$

Nehmen wir den Fall, wo $f_1 = f_2$ sein muss, um die Bedingungsgleichungen zu erfüllen, so erhalten wir das System

$$\frac{x_2}{p_1} = \frac{p_3}{x_4} = \frac{x_1}{p_2} = \frac{p_4}{x_3}$$

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungssysteme:

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} &1)\quad x_2 x_4 = p_1 p_3 \quad \text{und} \quad x_1 x_3 = p_2 p_4 \\ &2)\quad x_2 p_2 = x_1 p_1 \quad \text{und} \quad x_3 p_3 = x_4 p_4 \\ &3)\quad x_2 x_3 = p_1 p_4 \quad \text{und} \quad x_1 x_4 = p_2 p_3 \end{aligned}$$

Das erste Gleichungssystem dieser Gruppe ist das gegebene Gleichungssystem. Diese Gruppe hat die Lösung:

$$z + b = \frac{x_1 x_2}{a} + a x_3 x_4$$

Da die beiden Gruppen (A) und (B) in den ersten Gleichungssystemen übereinstimmen, so wird eine Lösung der Gruppe (A) auch eine Lösung des ersten Gleichungssystems der Gruppe (B) sein, jedoch wird sie keine Lösung des zweiten und dritten Gleichungssystems von (B) sein. Und ebenso umgekehrt wird eine Lösung der Gruppe (B) eine Lösung des ersten Gleichungssystemes von (A) sein, jedoch keine Lösung des zweiten und dritten Gleichungssystems von (A). Von der Richtigkeit kann man sich durch die Ausführung der Rechnung überzeugen.

Stettin, September 1894.

XIX.

Miscellen.

1.

Bemerkungen zu den aus einer Curve abgeleiteten Curven.

Anschliessend an den in dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatz: ‚Ueber eine allgemeine Eigenschaft der Curve der reciproken Ordinate" sei folgendes bemerkt.

Wenn man statt der Curvenordinate deren Quadrat aufträgt, so ist für dieselbe Abscisse die Subtangente der neuen Curve gleich der halben Subtangente der ursprünglichen Curve.

Der Beweis ergibt sich leicht mittelst der Differentialrechnung, kann aber auch ohne dieselbe durch eine geometrische Betrachtung erbracht werden.

Ist $y = f(x)$ die Gleichung der Urcurve, so ist

$$y = [f(x)]^2$$

jene der abgeleiteten Curve. Dann ist bekanntlich die Subtangente der Urcurve gleich

$$\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Für die abgeleitete Curve ist

$$\frac{dy}{dx} = 2f(x)f'(x)$$

daher ihre Subtangente

$$\frac{[f(x)]^2}{2f(x)f'(x)} = \frac{f(x)}{2f'(x)}$$

wodurch nach Vergleichung mit der Subtangente der Urcurve die Behauptung, durch die Differentialrechnung erwiesen, folgt.

Soll der Beweis durch eine geometrische Betrachtung geliefert werden, so muss zuerst die abgeleitete Curve einer Geraden bekannt sein.

Geht die Gerade durch den Coordinatenursprung, so lautet ihre Gleichung

$$y = a^2 x^2$$

woraus folgt, dass diese eine Parabel ist, deren Scheitel der Coordinatenursprung und deren Achse der positive Teil der Ordinatenachse ist.

Ist P ein Punkt der Urcurve, P' der aus ihm abgeleitete, so findet man die Tangente T in P, wenn man P mit dem unendlich nahen Punkt Q der Urcurve verbindet. Q hat zum abgeleiteten Punkt Q', und die Verbindungslinie $P'Q'$ ist dann auch Tangente an die abgeleitete Curve. Wenn man aber zu allen Punkten der Tangente T die abgeleiteten Punkte bestimmt, so erfüllen diese nach früherem die durch P' und Q' hindurchgeht. Parabel und abgeleitete Curve haben demnach in P' die nämliche Tangente T'. Schneidet T die Abscissenache in M, so ist M der Scheitel der Parabel und die in M auf der Abscissenachse in positiver Richtung errichtete Senkrechte die Achse derselben*). Ist N der Fusspunkt der von P auf die Parabelachse gefällten Senkrechten, und macht man in negativer Richtung

$$MO = NM$$

so ist NO bekanntlich die Subtangente der Parabel und daher OP' die Tangente der abgeleiteten Curve. Diese Tangente schneidet die Abscissenachse in R, und ist S der Fusspunkt der Ordinate von P, so ist zu zeigen, dass

$$MR = RS$$

ist, was unmittelbar aus der Congruenz der Dreiecke MOR und RSP' folgt.

Wird die Wurzel aus der Ordinate statt dieser aufgetragen, so ist für dieselbe Abscisse die Subtangente der abgeleiteten Curve doppelt so gross als die Subtangente der Urcurve.

---

*) Eine Figur wurde hier nicht angebracht, da der geneigte Leser sich dieselbe leicht selbst entwerfen oder vorstellen kann.

Beweis mittelst der Differentialrechnung. Ist

$$y = f(x)$$

die Gleichung der Urcurve, so ist

$$y = \sqrt{f(x)}$$

jene der abgeleiteten Curve. Die Subtangente der letzteren ist, da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

gleich

$$\frac{2f(x)}{f'(x)}$$

während jene der Urcurve nur

$$\frac{f(x)}{f'(x)}$$

beträgt.

Beweis durch eine geometrische Betrachtung. Ist

$$y = ax$$

die Gleichung einer Geraden gegeben, so ist

$$y = \sqrt{ax} \quad \text{oder} \quad y^2 = ax$$

die Gleichung der aus ihr abgeleiteten Curve. Also diese eine Parabel, deren Scheitel der Coordinatenursprung und deren Achse die positive Abscissenachse ist.

Es sei P ein Punkt der Urcurve, T die Tangente in demselben, M ihr Schnittpunkt mit der Abscissenaxe. Der aus P abgeleitete Punkt sei P', Q der unendlich nahe Punkt der Urcurve zu P, der auch in T liegen muss. Ist Q' der aus Q abgeleitete Punkt, dann ist die Verbindungslinie $P'Q'$ die Tangente T' in P'. Sie schneide die Abcissenachse in R. Ist S der Fusspunkt der Ordinate von P, so ist

$$RM = MS$$

weil T' auch zugleich Tangente der aus T abgeleiteten Parabel ist.

Wilhelm Rulf.

2.

Fundamentalauflösungen der Pell'schen Gleichung.

Die Fundamentalauflösungen der Pell'schen Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1$$

lassen sich zum grossen Teil in Classen einteilen, innerhalb deren die Determinanten sowol wie die Auflösungen T, U arithmetische Reihen bilden. Die erste Classe sei die folgende:

D.	T.	U.
2	3	2
6	5	2
12	7	2
20	9	2
30	11	2
42	13	2

u. s. w.

Die Determinanten bilden hier eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung, für welche die Formel

$$x^2 + 3x + 2 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

gilt. Die Auflösungen T sind die ungeraden Zahlen von 3 an und die Auflösungen U sind lauter 2.

Eine andere Classe ist diese:

D.	T.	U.
3	2	1
8	3	1
15	4	1
24	5	1
35	6	1
48	7	1

u. s. w.

Die Determinanten bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung, welcher die Formel

$$x^2 + 4x + 3 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

zu Grunde liegt. Die Auflösungen T sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 2 an und die Auflösungen U sind lauter 1.

Eine dritte Classe ist diese:

D.	*T.*	*U.*
5	9	4
10	19	6
17	33	8
26	51	10
37	73	12
50	99	14

u. s. w.

Die Determinanten bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^2+4x+5 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Auflösungen T bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$2x^2+8x+9 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

und die Auflösungen U sind die geraden Zahlen von 4 an.

Die vierte Classe ist die folgende:

D.	*T.*	*U.*
7	8	3
14	15	4
23	24	5
34	35	6
47	48	7
62	63	8

u. s. w.

Die Determinanten bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^2+6x+7 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Auflösungen T bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^2+6x+8 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

und die Auflösungen U sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 3 an.

Die fünfte Classe ist diese:

D.	*T.*	*U.*
11	10	3
18	17	4
27	26	5
38	37	6
51	50	7
66	65	8

u. s. w.

Die Determinanten bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^4+6x+11 \quad (x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

Die Auflösungen T bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^2+6x+10 \quad (x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

und die Auflösungen U sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 3 an.

Für die übrigen Determinanten und Auflösungen der Pell'schen Gleichung scheint die Aufstellung solcher Reihen schwieriger zu sein.

Es darf noch besonders darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Quadrate der ungeraden Zahlen immer eine Zerlegung von der Form

$$t^2 - D2^2 = 1$$

zulassen, wo D eine Zahl von der Form

$$x^2+3x+2 \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

ist. Ferner sei noch bemerkt, dass bei den Determinanten der Classe 1 die erste Differenzreihe eine Reihe von auf einanderfolgenden geraden Zahlen bildet, und dass bei denjenigen Determinanten oder Auflösungen der Classen 2, 3, 4 und 5, welche arithmetische Reihen zweiter Ordnung sind, die erste Differenzreihe immer aus einer Reihe von auf einanderfolgenden ungeraden Zahlen besteht.

Oldenburg i. Gr.

G. Speckmann.

3.

Ueber die Auflösung der Pell'schen Gleichung.

Ist a eine beliebige Zahl, so sind die Zahlen

$$(a^2+1)^2-1 = a^4+2a^2 \quad \text{und} \quad (a^2-1)^2-1 = a^4-2a^2$$

wieleicht ersichtlich, durch a^2 teilbar und der Quotient ist $= a^2 \pm 2$. — Setzt man nun um den Quotienten $a^2 \pm 2$ als Determinante in eine Pell'sche Gleichung

$$T^2 - DU^2 = 1$$

ein, so kann man für die Lösung T die Zahl $a^2 \pm 1$ und für die Lösung U die Zahl a^2 annehmen, denn

1) $$(a^2 \pm 1)^2 - (a^2 \pm 2)\,a^2 = 1$$

Eine grosse Anzahl von Lösungen der Pell'schen Gleichung lässt sich in dieser Weise bestimmen. Erweitert wird die Gleichung 1) sodann dadurch, dass man an a^2 den beliebigen Multiplicator n anfügt. Es erhält die Gleichung dadurch die Form

2) $$(na^2 \pm 1)^2 - (n^2a^2 \pm 2n)\,a^2 = 1$$
$$(a = 1.\ 2,\ 3,\ \ldots \infty;\quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \infty)$$

Die Fundamentalauflösungen der Pell'schen Gleichung lassen sich auch in Classen einteilen, innerhalb deren die Determinanten sowol wie auch die Auflösungen T und U arithmetische Reihen bilden. Es mögen einige dieser Classen hier folgen.

Classe 1.

D.	T.	U.
2	3	2
6	5	2
12	7	2
20	9	2

u. s. w.

Die Determinanten bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^2+3x+2 \quad (x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

Die Auflösungen T sind die ungeraden Zahlen von 3 an und die Auflösungen U sind lauter 2.

2. Classe.

D.	*T.*	*U.*
3	2	1
8	3	1
15	4	1
24	5	1

u. s. w.

Die Determinanten bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^4+4x+3 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Auflösungen T sind die Zahlen der nat. Zahlenreihe von 2 an und die Auflösungen U sind lauter 1.

3. Classe.

D.	*T.*	*U.*
5	9	4
10	19	6
17	33	8
26	51	10

u. s. w.

Die Determinanten bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^2+4x+5 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Auflösungen T bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$2x^2+8x+9 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

und die Auflösungen U sind die geraden Zahlen von 4 an.

4. Classe.

D.	*T.*	*U.*
7	8	3
14	15	4
23	24	5
34	35	6

u. s. w.

Die Determinanten bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^2+6x+7 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Auflösungen T bilden ebenfalls eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^2+6x+8 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

und die Auflösungen U sind die Zahlen der nat. Zahlenreihe von 3 an.

5. Classe.

D.	*T.*	*U.*
11	10	3
18	17	4
27	26	5
38	37	6

u. s. w.

Die Determinanten bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^2+6x+11 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Auflösungen T bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^2+6x+10 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

und die Auflösungen U sind die Zahlen der nat. Zahlenreihe von 3 an.

6. Classe.

D.	*T.*	*U.*
12	7	2
32	17	3
60	31	4
96	49	5

Die Determinanten bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$4x^2+19x+11 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

und die Auflösungen U sind die Zahlen der nat. Zahlenreihe von 2 an.

Die angegebenen Lösungsformeln

1) $$(a^2 \pm 1)^2 - (a^2 \pm 2)a^2 = 1$$

und

2) $$(na^2 \pm 1)^2 - (n^2a^2 \pm 2n)a^2 = 1$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots \infty$$
$$a = 1, 2, 3, \ldots \infty$$

können dahin erweitert werden, dass sie allgemein für die Lösung einer Gleichung

$$T^2 - DU^2 = m^2$$

anzuwenden sind. Die betreffenden Lösungsformen erhalten dann den Ausdruck

3) $$(a^2 \pm m)^2 - (a^2 \pm 2m)a^2 = m^2$$

und

4) $$(na^2 \pm m)^2 - (n^2a^2 \pm 2nm)a^2 = m^2$$

$$a, m, n = 1, 2, 3, \ldots \infty$$

Die Fundamentalauflösungen der allgemeinen Gleichung

$$T^2 - DU^2 = m^2$$

können für ein $m > 1$ auch in Classen eingeteilt werden, innerhalb deren die Determinanten sowol wie auch die Auflösungen T, U arithmetische Reihen bilden.

Oldenburg i. Gr.

G. Speckmann.

4.

Ueber die Zerlegung der Zahlen von der Form $4n+1$ in zwei Quadrate.

Erhebt man eine Reihe a von auf einanderfolgenden geraden Zahlen zur 2. Potenz und addirt zu jeder dieser Potenzzahlen das Quadrat b einer ungeraden Zahl, so entsteht eine arithmetische Reihe s von Zahlen von der Form $4n+1$.

Beispiele:

1)

$a =$	4,	16,	36,	64,	100,	144,	196, . . .
$b =$	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1, . . .
$s =$	5,	17,	37,	65,	101,	445,	197, . . .

Die Reihe s_1 ist eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung, welcher die Formel

$$4x^2 + 8x + 5 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

zu Grunde liegt.

2)
$$\begin{array}{lllllllll} a = 4, & 16, & 36, & 64, & 100, & 144, & 196, & \ldots \\ b = 9, & 9, & 9, & 9, & 9, & 9, & 9, & \ldots \\ \hline s_2 = 13, & 25, & 45, & 73, & 109, & 153, & 205, & \ldots \end{array}$$

Die Reihe s_2 ist eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$4x^2 + 8x + 13 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

Allgemein lautet die Formel für die Verbindungen der geraden Zahlen mit der zweiten Potenz einer ungeraden Zahl z:

$$4x^2 + 8x + (z^2 + 4) \quad (x = 0, 1, 2, \ldots; \quad z = 1, 3, 5, 7, \ldots)$$

Man kann die Reihen s_n auch in leichter Weise dadurch bilden, dass man zu den Zahlen einer jeweiligen Reihe die zwischen der zu dieser Reihe gehörigen ungeraden Quadratzahl und der nächstfolgenden ungeraden Quadratzahl bestehende Differenz hinzu zählt. Es ist z. B.

$$\begin{array}{lllllllll} s_1 = & 5, & 17, & 37, & 65, & 101, & 145, & 197, & \ldots \\ s_2 = & 13, & 25, & 45, & 73, & 109, & 153, & 205, & \ldots \\ s_3 = & 29, & 41, & 61, & 89, & 125, & 169, & 221, & \ldots \end{array}$$

u. s. w.

Die Differenz zwischen den Zahlen der Reihen s_1 und s_2 ist

$$= 9 - 1 = 8$$

Die Differenz zwischen den Zahlen der Reihen s_2 und s_3 ist

$$= 25 - 9 = 16$$

Allgemein ist die Differenz zwischen den Zahlen der Reihen $s_1, s_2, \ldots s_n$ gleich $8x$ $(x = 1, 2, 3, \ldots)$ und es gilt für die Bildung der Verticalreihen des Systemes der Reihen s_n die Formel

$$8x + n \quad (x = 0, 1, 2, \ldots; \quad n = 5, 17, 37, \ldots)$$

Für mässig grosse Zahlen könnte man leicht eine Tafel der Reihen s_n anfertigen und daraus die zu einer Zahl $4n+1$ derselben gehörigen Quadrate bequem entnehmen.

G. Speckmann.

5.

Ueber die Reihensysteme, deren Modul ein Vielfaches von 6 ist.

In meinen „Beiträgen zur Zahlenlehre“ [1]) habe ich Pag. 40 den folgenden Satz aufgestellt und begründet:

1) Verlag von Eschen & Fasting zu Oldenburg i. Gr

„Ist eine Zahl Z von der Form $xn \mp 1$ gegeben und hat „ein Primfactor p derselben ebenfalls die Form $xn \mp 1$, „so ist $\frac{Z \pm 1}{x} \mp \frac{p \pm 1}{x}$ durch p teilbar."

Da nun jede Primzahl > 3 die Form $6n \mp 1$ oder $6xn \pm r$ hat, so kann bei denjenigen Zahlen, die aus Factoren von der Form $6n \mp 1$ zusammengesetzt sind, für den anzuwendenden Modul x immer ein Vielfaches der Zahl 6 gesetzt werden. Es dürfte deshalb eine Aufstellung der primitiven Zahlformen für diejenigen Reihensysteme, deren Modul von der Frm $6n$ ist, nicht ohne Nutzen sein. — Es ist nun gleich ersichtlich, dass in einem Reihensystem mit dem Modul $6n$ nur diejenigen Anfangsglieder, die eine Primzahl oder ein ungerades Vielfaches einer Primzahl darstellen, nebst der Zahl 1, relativ prim zum Modul sein können. Es ist deshalb leicht, die betreffenden Zahlformen zu finden. — Praktisch wendet man dazu die folgende Regel an: Man dividire zunächst den Modul $6n$ durch 2 und stelle fest, welche Zahlen von der Form $6n \mp 1$ unter $\frac{6n}{2}$ liegen. Von diesen Zahlen kann man dann diejenigen streichen, die mit $6n$ den gleichen Teiler haben. Setzt man die übrig gebliebenen Zahlen nebst der 1 in die Formel $6xn \pm r$ nach einander für r ein, so erhält man für das betr. System die sämtlichen Formen, in denen Anfangsglied und Differenz zu einander relativ prim sind.

Für die Moduln 6, 12, 18, 24, 30 mögen die betreffenden Formen hier folgen.

Modul:	Zahlformen:
6	$6n \pm 1$
12	$12a \pm 1$
	$12n \pm 5$
18	$18n \pm 1$
	$18n \pm 5$
	$18n \pm 7$
24	$24n \pm 1$
	$24n \pm 5$
	$24n \pm 7$
	$24n \pm 11$

1) $$\cos\lambda \cdot x + \cos\mu \cdot y + \cos\nu \cdot z - p = 0 \qquad (d^2F.$$

Dieser Gleichung müssen die Coordinaten des Punktes P_1, d. i. x_1, y_1, z_1 genügen, also ist

2) $$\cos\lambda \cdot x_1 + \cos\mu \cdot y_1 + \cos\nu \cdot z_1 - p = 0 \qquad (P_1.$$

Durch die unendlich kleine Verschiebung σ möge der Punkt P_1 in die Lage P_2 mit den Coordinaten x_2, y_2, z_2 kommen; dann ist

3) $$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \sigma \cdot \cos\alpha \\ y_2 &= y_1 + \sigma \cdot \cos\beta \\ z_2 &= z_1 + \sigma \cdot \cos\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (P_2$$

Bezeichnet man wieder, wie auf Seite 243, den Abstand des Punktes P_2 von der Ebene des Elements d^2F mit ds_1, so ist

4) $$ds_1 + \cos\lambda \cdot x_2 + \cos\mu \cdot y_2 + \cos\nu \cdot z_2 - p$$

setzt man hierin die Werte aus den Gleichungen 3) ein und subtrahirt dann die Gleichung 2), so bleibt:

5) $$cd_1 = (\cos\alpha \cdot \cos\lambda + \cos\beta \cdot \cos\mu + \cos\gamma \cdot \cos\nu)\sigma$$

In dieser Gleichung ist der eingeklammerte Factor auf der rechten Seite der cosinus des Winkels, den die Richtung von σ mit der Normalen der Ebene 1) bildet. Bezeichnet man denselben mit ω, so ist

6) $$ds_1 = \cos\omega \cdot \sigma$$

Multiplicirt man ds_1 mit d^2F, so erhält man d^3V, nämlich:

7) $$d^3V = \cos\omega \cdot \sigma \cdot d^2F$$

Integrirt man erst nach σ, so erhält man für eine endliche Länge σ:

8) $$d^2V = \cos\omega \cdot \sigma \cdot d^2F$$

Integrirt man nun zwei Mal in Bezug auf d^2F und bezieht die Integrale auf die ganze Fläche F, so kann man $\cos\omega$ vor die Integralzeichen setzen, wenn F eben ist, also λ, μ und ν constant sind, und erhält demnach für eine ebene Fläche F und für einen endlichen Wert σ:

9) $$V = (\cos\omega \cdot \sigma)F = \sigma(\cos\omega \cdot F)$$

Beide Formen zeigen V als gleichwertig mit einem normalen Cylinder, dessen Normalquerschnitt und Höhe im ersten Fall bzhw. F und $\cos\omega \cdot \sigma$, im zweiten Fall $\cos\omega \cdot F$ und σ sind.

Multiplicirt man Gl. 5) direct mit d^2F, ohne Einführung von ω, so erhält man

10) $d^3V = (\cos\alpha \cdot \cos\lambda + \cos\beta \cdot \cos\mu + \cos\gamma \cdot \cos\nu) d^2F \cdot \sigma$

und für endliche Werte von σ:

11) $d^2V = (\cos\alpha \cdot (\cos\lambda \cdot d^2F) + \cos\beta(\cos\mu \cdot d^2F) + \cos\gamma(\cos\nu \cdot d^2F))\,\sigma$

Nach Seite 240 kann man hierfür schreiben:

12) $d^2V = (\cos\alpha \cdot d^2F_{yz} + \cos\beta \cdot d^2F_{xz} + \cos\gamma \cdot d^2F_{xy})\,\sigma$

Integrirt man diese Gleichung zwei Mal, so erhält man

13) $V = (\cos\alpha \cdot F_{yz} + \cos\beta \cdot P_{xz} + \cos\gamma \cdot F_{xy})\,\sigma$

In dieser Gleichung sind F_{yz}, F_{xz} und F_{xy} die Projectionen des Randes der Fläche F bzhw. auf die YZ-, XZ- und XY-Ebene. In Worten kann man den Inhalt der Gleichung etwa so aussprechen:

„Bewegt sich eine beliebige Fläche F, deren Randpro-
„jectionen auf die Coördinaten-Ebenen F_{yz}, F_{xz} und F_{xy}
„sind, parallel fortschreitend nach der Richtung σ, die
„mit den Coordinatenachsen die Winkel α, β und γ bildet,
„um eine endliche Strecke σ vorwärts, so ist das beschrie-
„bene Volumen gleich der Summe von drei normalen Cy-
„lindern, als deren Normalquerschnitte und Höhen man
„entweder F_{yz}, F_{xz}, F_{xy} und $\cos\alpha \cdot \sigma$, $\cos\beta \cdot \sigma$, $\cos\gamma \cdot \sigma$,
„oder $\cos\alpha \cdot F_{yz}$, $\cos\beta \cdot F_{xz}$, $\cos\gamma \cdot F_{xy}$ und σ als Höhe
„für alle drei betrachten kann; im letztern Fall kann man
„sich statt dessen auch einen einzigen Cylinder mit dem
„Normalquerschnitt gleich der Summe der Querschnitte
„jener drei und der Höhe σ denken."

Setzt man in Gleichung 13) nach einander

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

so werden in jedem Falle die beiden andern Winkel gleich 90^0 und die Richtung von AA_1 oder σ wird nach einander parallel zur X-, Y-, Z-Achse. Die Gleichung ergiebt für diese einzelnen Fälle

$$\alpha = 0, \quad Y_z = F_{yz} \cdot \sigma$$
$$\beta = 0, \quad V_y = F_{xz} \cdot \sigma$$
$$\gamma = 0, \quad V_z = F_{xy} \cdot \sigma$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach einander mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und betrachtet dann die Grössen $\cos\alpha \cdot \sigma$, $\cos\beta \cdot \sigma$, $\cos\gamma \cdot \sigma$ als Verschiebungen von F nach den Richtungen der Achsen, so ergiebt die Addition der 3 Gleichungen wieder die Gleichung 13), und man erkennt in Uebereinstimmung mit § 4., dass die 3 Teilbewegungen von F nach den Richtungen der Achsen in ihrer Wirkung gleichwertig sind mit der angeschriebenen Bewegung nach der Richtung σ. Verfolgt man diesen Weg weiter, so kann man leicht alle die Sätze ableiten, welche § 4. über die Parallelverschiebung von Flächen und die dadurch bestrichenen Räume abgeleitet sind.

§ 6. Drehung einer begrenzten Fläche um eine Achse.

Die im vorigen Paragraphen bezeichnete Fläche F soll sich jetzt um die dort als Richtung der Parallelverschiebung bezeichnete Gerade AA_1, welche wieder mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet, als Achse drehen, und zwar um einen Winkel δ, der unendlich klein oder von endlicher Grösse ist. Alles Uebrige wird hier ebenso wie dort angenommen, und nach Seite 242—244 gilt auch hier, dass man statt des an dem Punkt $P_1(x_1\,y_1\,z_1)$ liegenden Flächenelements d^2F eine endliche ebene Fläche einführen kann, wenn man unter P_1 ihren Schwerpunkt versteht.

Die Gleichung der Ebene, in welcher d^2F liegt, sei folgende (vergl. Seite 16 u. ff.);

$$1) \qquad \cos\lambda \cdot x + \cos\mu \cdot y + \cos\nu \cdot z - p = 0 \qquad (d^2F.$$

Dieser Gleichung müssen die Coordinaten des Punktes P_1, d. i. $x_1\,y_1\,z_1$ genügen, also ist auch

$$2) \qquad \cos\lambda \cdot x_1 + \cos\mu \cdot y_1 + \cos\nu \cdot z_1 - p = 0 \qquad (P_1.$$

Es ist nun zunächst zu bestimmen, was aus $x_1\,y_1\,z_1$ nach einer unendlich kleinen Drehung δ um die Achse AA_1 wird. Die allgemeinste Lage der letzteren erhält man, wenn man sie nicht bestimmt durch den Anfangspunkt O, sondern durch einen beliebigen Punkt A, etwa mit den Coordinaten u, v, w gehen lässt. Es ist aber nicht erforderlich, die Rechnung von vornherein für diesen allgemeinsten Fall einzuleiten, denn man, kann wenn man die Achse durch den Anfangspunkt legt, in der Entwicklung sowol wie in den Schlussformeln nur

$$x_1 - u, \quad y_1 - v, \quad z_1 - w \quad \text{statt} \quad x_1\,y_1\,z_1$$

setzen, um die Resultate für den allgemeinsten Fall zu erhalten; um das als richtig zu erkennen, braucht man nur das Coordinatensystem parallel nach dem Punkt A verschoben zu denken. Ich nehme also bis auf weiteres an, dass die Achse AA_1 durch den Anfangspunkt gehe *). Dreht sich nun d^2F um diese Achse um den unendlich kleinen Winkel δ, wodurch P_1 nach P_2 mit den Coordinaten $x_2 y_2 z_2$ komme, so wird man setzen können (siehe Figur 14):

3)
$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \delta x \\ y_2 &= y_1 + \delta y \\ z_2 &= z_1 + \delta z \end{aligned}\right\} \qquad (P_2.$$

wo δx, δy und δz unendlich kleine, näher zu bestimmenden Grössen sind.

Man lege durch P_1 eine Ebene E normal zu OA_1, welche diese Achse im Punkte A_1 schneide; dann liegt auch P_2 in dieser Ebene, und P_1A_1 und P_2A_1, deren gleiche Länge r den Abstand des Punktes P_1 von der Achse OA_1 bezeichnen, stehen beide normal zu dieser Achse. Ist die Länge

$$\overline{OA_1} = q$$

so ist die Gleichung der Ebene E:

4)
$$\cos\alpha \,.\, x + \cos\beta \,.\, y + \cos\gamma \,.\, z - q = 0 \qquad (E.$$

Dieser Gleichung müssen die Coordinaten von P_1 sowol wie von P_2 genügen, so dass stattfindet:

$$\cos\alpha \,.\, x_1 + \cos\beta \,.\, y_1 + \cos\gamma \,.\, z_1 - q$$
$$= \cos\alpha(x_1 + \delta x) + \cos\beta(y_1 + \delta y) + \cos\gamma(z_1 + \delta z) - q$$

Ferner ist

---

*) Anmerkung. An die Stelle des Punktes A mit den Coordinaten u, v, w kann man auch einen beliebigen andern Punkt der Achse AA_1 treten lassen. Wählt man dafür den Punkt, in welchem eine von dem Anfangspunkt O auf AA_1 gezogene Normale letztere trifft, so sind die Coordinaten dieses Punkts, wenn man die Länge

$$\overline{OA} = u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma$$

mit s bezeichnet

$$u - s \,.\, \cos\alpha, \quad v - s \,.\, \cos\beta, \quad w - s \,.\, \cos\gamma$$

und sein Abstand vom Anfangspunkt O ist

$$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - s^2}.$$

$$\overline{OP_1} = \overline{OP_2}$$

was die Gleichung liefert:

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2 = x_1+\delta x)^2+(y_1+\delta y)^2+(z_1+\delta z)^2$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$5)\quad \delta y = \frac{z_1 \cdot \cos\alpha - x_1 \cdot \cos\gamma}{y_1 \cdot \cos\gamma - z_1 \cdot \cos\beta} \cdot \delta x$$

$$\delta z = \frac{x_1 \cdot \cos\beta - y_1 \cdot \cos\alpha}{y_1 \cdot \cos\gamma - z_1 \cdot \cos\beta} \cdot \delta x$$

Damit sind δy und δz als Functionen von δx gefunden, und es ist jetzt also eine Beziehung zwischen ϱx und δ zu ermitteln. Man hat:

$$\text{Bogen } P_1P_2 = r \cdot \delta$$

also

$$\delta = \frac{\overline{P_1P_2}}{r}$$

da der Bogen unendlich klein ist. Für seine Länge findet man aus den Coordinaten von P_2 und P_1

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$= \sqrt{\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2}$$

d. i. in Rücksicht auf die Gleichungen 5):

$$6)\quad \overline{P_1P_2} = \frac{\delta x}{y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta}$$
$$\times \sqrt{(y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta)^2+(z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma)+(x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha)^2}$$
$$= \frac{\delta x}{y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta}$$
$$\times \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2-(x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma)^2}$$

Ebenso findet man r aus den Coordinaten von A_1 und P_1. Setzt man die Coordinaten x_1, y_1 und z_1 von P_1 in Gleichung 4) ein, so erhält man:

$$\overline{OA_1} = q = \cos\alpha \cdot x_1 + \cos\beta \cdot y_1 + \cos\gamma \cdot z_1$$

so dass die Coordinaten von A_1 nun mit $q \cdot \cos\alpha$, $q \cdot \cos\beta$, $q \cdot \cos\gamma$ bestimmt sind. Man findet also

$$7)\quad \overline{A_1P_1} = \overline{A_1P_2} = r$$
$$= \sqrt{(q\cos\alpha - x_1)^2+(q\cos\beta - y_1)^2+(q\cos\gamma - z_1)^2}$$
$$= \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2-(x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma)^2}$$

In Rücksicht auf die Gleichungen 5), 6) und 7) geht

$$\delta = \frac{\overline{P_1 P_2}}{r}$$

über in die einfachen Beziehungen:

8) $$\delta = \frac{\delta x}{y_1 \cos\gamma - z_1 \cos\beta} = \frac{\delta y}{z_1 \cos\alpha - x_1 \cos\gamma} = \frac{dz}{x_1 \cos\beta - x_1 \cos\alpha}$$

Bevor ich weiter gehe, möge noch erwähnt werden, dass man

$$\overline{A_1 P_1} = r$$

noch einfacher als vorher so findet: Man setze

$$\overline{OP_1} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \varrho$$

dann ist

$$r = \varrho \,.\, \sin \overline{P_1 O A_1}$$

und der Winkel $P_1 O A_1$ ist bestimmt aus den Richtungen OP_1 und OA_1:

$$\cos \overline{P_1 O A_1} = \frac{x_1}{\varrho} \,.\, \cos\alpha + \frac{y_1}{\varrho} \,.\, \cos\beta + \frac{z_1}{\varrho} \cos\gamma$$

Demnach (vergl. Gl. 6)):

7a) $$r = \sqrt{1 - \cos^2 \overline{P_1 O A_1}}$$
$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - (x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma)^2}$$
$$= \sqrt{(y_1 \cos\gamma - z_1 \cos\beta)^2 + (z_1 \cos\alpha - x_1 \cos\gamma)^2 + (x_1 \cos\beta - y_1 \cos\alpha)^2}$$

Nachdem in Gleichung 8) die Beziehung zwischen δ und δx, δy und δz gefunden, findet man weiter den Abstand des Punktes $P_2(x_2, y_2, z_2)$ von der Ebene F des Flächenelements d^2F (Gleichung 1)) mit

9) $$ds_1 = \cos\lambda \,.\, x_2 + \cos\mu \,.\, y_2 + \cos\nu \,.\, z_2 - p$$

und wenn man hierin für x_2, y_2, z_2 die Werte aus Gleichung 3) einsetzt und dann Gleichung 2) abzieht:

10) $$ds_1 = \cos\lambda \,.\, \delta x + \cos\mu \,.\, \delta y + \cos\nu \,.\, \delta z$$

d. i. mit Beziehung auf die Gleichungen 8):

11) $$ds_1 = ((y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta)\cos\lambda + (z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma)\cos\mu + (x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha)\cos\nu)\delta$$

Werden diese Gleichungen multiplicirt mit d^2F, so erhält man das Volumen d^3V, nämlich (ohne Indices)

12) $$d^3V = (\cos\lambda \,.\, \delta x + \cos\mu \,.\, \delta y + \cos\nu \,.\, \delta z)d^2F$$
$$= ((y \,.\, \cos\gamma - z \,.\, \cos\beta)\cos\lambda + (z \,.\, \cos\alpha - x \,.\, \cos\gamma)\cos\mu + (x \,.\, \cos\beta - y \,.\, \cos\alpha)\cos\nu)d^2F \,.\, \delta$$ *)

---

*) Anmerkung. Man kann zu diesen Gleichungen auch auf folgendem Wege gelangen:

Legt man durch die Achse OA_3, also durch die Punkte $O(0, 0, 0)$, $A_1(q\cos\alpha, q\cos\beta, q\cos\gamma)$ und durch den Punkt $P_1(x_1y_1z_1)$ eine Ebene P, so wird die Gleichung dieser Ebene, weil sie durch den Anfangspunkt geht, von der Form sein

a) $$ax + by + cz = 0 \qquad (P$$

Mit Hülfe der Coordinaten von A_1 (vergl. Seite 343) und P_1, welche beide dieser Gleichung genügen müssen, kann man a, b und c so weit bestimmen, dass man statt der Gleichung a) für die Ebene OA_1P_1 die bestimmte Gleichung

b) $$(y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta)x + (z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma)y + (x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha)x = 0 \quad (P$$

erhält. Bildet die Ebene des Flächenelements d^2F (Gleichung 1), Seite 240) mit dieser Ebene einen Winkel φ, so ist

c) $$\cos\varphi \,.\, d^2F = \frac{(y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta)\cos\lambda + (z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma)\cos\mu + (x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha)\cos\nu}{\sqrt{(y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta)^2 + (z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma)^2 + (x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha)^2}\sqrt{\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu}} d^2F$$

Das ist die Fläche des Normal- oder Meridianschnitts des Volumens, welches d^2F bei der Drehung um die Achse OA_1 (vergl. Seite 253) bespricht. In dieser Gleichung ist

$$\sqrt{\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu} = 1$$

und nach Gleichung 7a) ist die andere Wurzelgrösse im Nenner der rechten Seite

$$= \overline{A_1P_1} = r$$

Wird die Fläche des Normalschnitts des Volumenelements, welches man wie einen (schief abgeschnittenen) Cylinder berechnen kann, multiplicirt mit $r \,.\, \delta$, so erhält man für das Volumen selbst genau wieder die obige Gleichung 12). Die Entwicklung gilt auch dann, wenn d^2F eine ebene Fläche von endlicher Grösse ist, falls $x_1y_1z_1$ die Coordinaten des Schwerpunkts derselben bezeichnen (vergl. Seite 242—244).

Uebrigens kann man Folgendes bemerken: Dividirt man die Gleichung b)

oder, indem man nach δ integrirt, für endliche Werte von δ_1 und indem man die Projectionen von d^2F auf die drei Coordinaten-Ebenen einführt (Seite 240)

$$13)\quad \begin{aligned} d^2V &= ((y\cos\gamma - z\,.\,\cos\beta)\cos\lambda + (z\,.\,\cos\alpha - x\,.\,\cos\gamma)\cos\mu \\ &\quad + (x\,.\,\cos\beta - y\,.\,\cos\alpha)\cos\nu)\,d^2F\,.\,\delta \\ &= ((y\,.\,\cos\gamma - z\,.\,\cos\beta)\,d^2F_{yz} + (z\,.\,\cos\alpha - x\,.\,\cos\gamma)d^2F_{zx} \\ &\quad + (x\,.\,\cos\beta - y\,.\,\cos\alpha)d^2F_{xy})\delta \end{aligned}$$

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichungen wird nun näher zu untersuchen sein, und es möge zunächst der besondere Fall seine Erledigung finden, wo F eine ebene Fläche von endlicher Grösse ist. Dann sind also x_1, y_1 und z_1 die Coordinaten des Schwerpunkts von F, und unter dieser Voraussetzung ist, für endliche Werte des Drehwinkels δ:

$$14)\quad \begin{aligned} V &= ((y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta)\cos\lambda + (z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma)\cos\mu \\ &\quad + (x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha)\cos\nu)F\,.\,\delta \\ &= ((y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta)F_{yz} + (z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma)F_{zx} \\ &\quad + (x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha)F_{xy})\delta \end{aligned}$$

Nach der Anmerkung auf Seite 340 bis 344 ist in der ersten dieser beiden Gleichungen der Ausdruck innerhalb der grossen Klammer gleich $r\cdot\cos\varphi$, wenn φ den Winkel bezeichnet, den die durch den Schwerpunkt P_1 und durch die Drehachse OA_1 gelegte Ebene OA_1P_1 mit der Ebene F bildet.

---

durch r, so nimmt sie die Normalform an. Daraus erkennt man weiter, dass wenn man auf der durch den Anfangspunkt gezogenen Normalen der Ebene OA_1P_1 eine Länge

$$\overline{A_1P_1} = r$$

d. i. gleich dem Abstande des Punktes P_1 von der Drehaehse abträgt, die Projectionen dieser Längen auf die Coordinatenachsen die folgenden Werte haben:

$$y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta,\quad z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma,\quad x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha$$

Damit ist die Bedeutung dieser in der ganzen Entwicklung vielfach vorkommenden Grössen klargestellt.

Auch die Linie P_1P_2 steht normal zu der Ebene OA_1P_1; die Länge ds_1 ist die Projection von

$$\overline{P_1P_2} = r\delta$$

auf die Normale der Ebene von d^2F, und da der Winkel dieser beiden Normalen ebenso wie der Winkel der zugehörigen Ebenen gleich φ sein muss, so ist auch der Wert ds_1 der Gleichung 10) so zu schreiben:

$$ds_1 = \cos\lambda\,.\,\delta x + \cos\mu\,.\,\delta y + \cos\nu\,.\,\delta z = r\delta\,.\,\cos\varphi$$

Man kann also die Gleichung auch so schreiben

$$15) \qquad V = r\cos\varphi \,.\, F\delta = F\cos\varphi \,.\, r\delta$$

Dieses Resultat lässt sich in Worten etwa so aussprechen:

„Dreht sich eine ebene Fläche F um eine beliebige Fläche „um einen Winkel δ, so ist das beschriebene Volumen „gleich der Projection von F auf die durch ihren Schwer„punkt und die Drehachse gelegte Ebene, multiplicirt mit „der Länge $r\delta$ des von dem Schwerpunkt zurückgelegten „Weges."

Die zweite Form der Gleichung 14) kann man einfach so deuten:

„Dreht sich eine ebene Fläche F um eine beliebige „Achse um einen Winkel δ, so ist das beschriebene Volu„men gleich dem in Teilen des Halbmessers ausgedrückten „Winkel d, multiplicirt mit der Summe der Inhalte dreier „normaler Cylinder, deren Grundflächen die Projectionen „von F auf die YZ-, XZ- und XY-Ebene, und deren Höhen „die Grössen $y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta$, $z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma$, $x_1\cos\beta$ „$- y_1\cos\alpha$ sind, wo x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Schwer„punkts von F und α, β, γ die Winkel der Drehachse „mit den Coordinaten-Achsen sind. — Weiter unten wird „dieser Satz in noch allgemeinerer Form auftreten."

Ist nun weiter die rotirende Fläche F nicht eben, sondern beliebig gekrümmt, so erhält man nach zweimaliger Integration der zweiten Form der Gleichung 13) folgenden Ausdruck, in welchem die Integralzeichen auf sämtliche Elemente von T zu beziehen sind:

$$16) \quad V = \delta \iint (y \,.\, \cos\gamma - z \,.\, \cos\beta)\, dF_{yz}$$
$$+ \varrho \iint (z \,.\, \cos\alpha - x \,.\, \cos\gamma)\, dF_{xz}$$
$$+ \delta \iint (x \,.\, \cos\beta - y \,.\, \cos\alpha)\, dE_{xy}$$

Als Beispiel für die Deutung der Doppel-Integrale möge das erste dienen:

Die Grösse unter den Integralzeichen ist das Element eines normalen Cylinders, dessen Basis in der YZ-Ebene die Projection d^2F_{yz} von d^2F ist und demnach die Ordinaten y und z hat, und ersten Höhe $y\cos\gamma - z\cos\beta$ ist, parallel zur Y-Achse zu messen. Setzt man letzteren Ausdruck gleich χ, so ist

17) $$\begin{cases} \xi = y\cos\gamma - z\cos\beta \quad \text{oder} \\ \xi - \cos\gamma \,.\, y \mathrm{K} \cos\beta \,.\, z = 0 \end{cases}$$

Das ist die Gleichung einer Ebene, welche man durch Division mit

$$\sqrt{1+\cos^2\beta+\cos^2\gamma} = \sqrt{1+\sin^2\alpha}$$

auf die Normalform bringen kann

18) $$\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}\xi - \frac{\cos\gamma}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}y + \frac{\cos\beta}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}z = 0$$

Ist τ der Winkel, den die Normale dieser Ebene mit der X-Achse, den die Ebene selbst also mit der YZ-Ebene bildet, so ist demnach:

19) $$\cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}, \quad \text{also} \quad \operatorname{tg}\tau = \sin\alpha$$

Setzt man in der Gleichung der Ebene $\xi = 0$, so erhält man ihre Spur in der YZ-Ebene:

$$y\cos\gamma - z\cos\beta = 0 \quad \text{oder}$$

20) $$\frac{y}{z} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

Für die Drehachse OA_1 gilt die Beziehung

21) $$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}$$

also ist ihre Projection auf die YZ-Ebene ausgedrückt durch

22) $$\frac{y}{z} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

dieselbe Gleichung wie vorhin. Nunmehr kann man also die Ebene so bestimmen, dass sie die YZ-Ebene schneidet in der Projection der Drehachse, und dass sie mit der YZ Ebene einen Winkel τ bildet, für den die Gleichung

$$\operatorname{tg}\tau = \sin\alpha$$

gilt, wenn α der Winkel der Drehachse mit der X-Achse ist. — Das Doppel-Integral stellt nun das Volumen eines normalen schief abgeschnittenen Cylinders dar, dessen Basis F_{yz} ist, und dessen zweite Endfläche in der eben ermittelten Ebene liegt. Man kann also jetzt in Bezug auf das Volumen V folgenden ganz allgemeinen Satz aussprechen:

„Dreht sich eine beliebige begrenzte Fläche F um eine „beliebige Drehachse OA_1, welche mit den Coordinaten-„achsen die Winkel α, β, γ bildet, um einen Winkel δ, so „ist das beschriebene Volumen gleich dem in Teilen des „Halbmessers ausgedrückten Winkel δ, multiplicirt mit der „Summe der Inhalte von drei normalen schief abgeschnitte-„nen Cylindern, deren Grundflächen die Projectionen von „F auf die Coordinaten-Ebenen sind; die andern End-„flächen der drei Cylinder liegen in Ebenen, welche die „betreffende Coordinaten-Ebene in der Projection der Dreh-„achse auf diese letztere schneiden und mit der Coordi-„naten-Ebene einen Winkel bilden, dessen Tangente gleich „ist dem sinus des Winkels der Drehachse mit derjenigen „Coordinaten-Achse, welche zu der Coordinaten-Ebene nor-„mal steht. Hierbei ist nicht erforderlich, dass die Dreh-„achse OA_1 durch den Anfangspunkt O gehe, und die ab-„solute Lage des zweiten Coordinatensystems ist vollständig „gleichgültig."

In Bezug auf den letzten Teil dieses allgemeinen Satzes ist noch Folgendes nachzutragen: Steht von vornherein nicht fest, dass die Drehachse durch den Anfangspunkt O gehe, sondern ist vielmehr für dieselbe nur ein beliebiger Punkt $A(u\,v\,w)$ (vergl. Seite 340) und die Richtung durch die Winkel $\alpha\beta\gamma$ gegeben, so nimmt Gleichung 15) die allgemeinere Form an:

16a)
$$V = \left\{ \begin{array}{l} \delta \int\int ((y-v)\cos\gamma - (z-w)\cos\beta)\, d^2F_{yz} \\ +\delta \int\int ((z-w)\cos\alpha - (x-u)\cos\gamma)\, d^2F_{zx} \\ +\delta \int\int ((x-u)\cos\beta - (y-v)\cos\alpha)\, d^2F_{xy} \end{array} \right\}$$

Für das erste Integral ist dann die Ebene der zweiten Endfläche des Cylinders:

17a)
$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = (y-v)\cos\gamma - (z-w)\cos\beta \quad \text{oder} \\ \xi = -(y-v)\cos\gamma + (z-w)\cos\beta \end{array} \right.$$

und nach Division mit

$$\sqrt{1+\cos^2\beta+\cos^2\gamma} = \sqrt{1+\sin^2\alpha}$$

in der Normalform

18a)
$$\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}} - \xi \frac{\cos\gamma}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}(y-v) + \frac{\cos\beta}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}(z-w) = 0$$

Es ist also auch hier

19a) $$\cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}, \quad \text{also} \quad \operatorname{tg}\tau = \sin\alpha$$

und wenn man in der Gleichung der Ebene $\xi = 0$ setzt, so erhält man für ihre Spur in der YZ-Ebene:

20a) $$\frac{y-v}{z-w} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

Für die durch Punkt $A(u, v, w)$ gehende Drehachse hat man:

21a) $$\frac{x-u}{\cos\alpha} = \frac{y-v}{\cos\beta} = \frac{z-w}{\cos\gamma}$$

also für die Projection der Achse auf die YZ-Ebene:

22a) $$\frac{y-v}{z-w} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

was wieder gleichlautend ist mit 20a). Die Grössen u, v, w sind also in Bezug auf den Wortlaut des obigen allgemeinen Satzes ganz ohne Einfluss.

Für die Anwendung der gefundenen Regeln ist es nicht unwichtig, zu beachten, dass wenn F eine ebene Fläche ist, die Projectionen des Schwerpunkts von F mit den Schwerpunkten der Projectionen von F zusammenfallen. — Uebrigens kann man die drei Cylinder auch so auffassen: Man verschiebe dieselben in sich selbst parallel ihren Seiten, d. i. parallel ihren Coordinatenachsen, so dass die eine Endfläche jedes Mal in die Fläche F fällt. Als Beispiel diene wieder der Cylinder parallel der X-Achse, also das erste Integral in der allgemeinen Gleichung 16a). Dem Punkt $P(x, y, z)$ in der in F liegenden Endfläche des Cylinders entspricht dann in der andern Endfläche ein Punkt, dessen Coordinaten $x - ((y-v)\cos\gamma - (z-w)\cos\beta)$, y und z sind. Nennt man diese Coordinaten ξ, y und z, so ist demnach die Gleichung der zweiten Endfläche:

$$\xi = x - ((y-v)\cos\gamma - (z-w)\cos\beta)$$

aus der man x mit Hülfe der Gleichung von F beseitigen kann, so dass dann eine Gleichung zwischen ξ, y und z übrig bleibt. Ist F eine ebene Fläche von endlicher Grösse mit der Gleichung 1), so ist

$$x = -\left(\frac{\cos\mu}{\cos\lambda}y + \frac{\cos\nu}{\cos\lambda}z - \frac{p}{\cos\lambda}\right)$$

also:

$$\cos\lambda \cdot \xi + (\cos\mu + \cos\gamma \cdot \cos\lambda)\, y + (\cos\nu - \cos\beta\cos\lambda)\, z - (p + (w\cos\gamma - v\cos\beta)\cos\lambda) = 0$$

Aehnlich wie früher, kann man auch diese Gleichung weiter verfolgen; so ist es z. B. interessant, dass, wenn u, v und w null sind, also die Drehachse durch den Anfangspunkt geht, die X-Achse von dieser Ebene und von F in demselben Punkt

$$\xi = \frac{p}{\cos\lambda}$$

geschnitten wird; praktisches Interesse hat indessen die weitere Untersuchung nicht.

Setzt man in Gleichung 16a) nach einander

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

so werden in jedem Falle die beiden andern Winkel der Drehachse mit den Coordinatenachsen gleich 90° und die Drehachse fällt nach einander zusammen mit der X-, Y-, Z-Achse. Die Gleichung ergiebt für diese einzelnen Fälle:

23)
$$\begin{cases} \alpha = 0, \text{ Drehachse parallel zur } X\text{-Achse} \\ \qquad V_x = \delta \iint (z-w)\, d^2F_{xz} - \delta \iint (y-v)\, d^2F_{xz} \\ \beta = 0, \text{ Drehachse parallel zur } Y\text{-Achse} \\ \qquad V_y = \delta \iint (x-u)\, d^2F_{xy} - \delta \iint (z-w)\, d^2F_{yz} \\ \gamma = 0, \text{ Drehachse parallel zur } Z\text{-Achse} \\ \qquad V_z = \delta \iint (y-v)\, d^2F_{yz} - \delta \iint (x-w)\, d^2F_{xz} \end{cases}$$

Aus diesen Formeln ist der folgende Satz zu entnehmen:

„Dreht sich eine beliebige begrenzte Fläche F um eine „beliebige feste Achse um einen unendlichen Winkel δ, so „ist das beschriebene Volumen gleich der Differenz der„jenigen einzeln nach der einfachen Guldin'schen Regel „zu bestimmenden Volumina, welche die Projectionen von „F auf zwei beliebige durch die Drehachse gelegte und zu „einander normale Ebenen beschrieben, wenn sie dieselbe „Drehung δ ausführen. Welchem Teil hierbei das Vor„zeichen plus zukommt, ist aus den Formeln 23) zu ent„nehmen. Bei Bestimmung des Vorzeichens der einzelnen

„Teile kann sich diese Differenz in besonderen Fällen in „eine (positive oder negative) Summe verwandeln."

Nimmt man in den Gleichungen 23) den Drehwinkel δ als unendlich klein an, so hat man statt V_x, V_y, V_z zu setzen: dV_x, dV_y dV_z. Multiplicirt man dann die Gleichungen nach einander mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und fasst die Factoren $\delta\cos\alpha$, $\delta\cos\beta$, $\delta\cos\gamma$ als Drehwinkel für die einzelnen Achsen X, Y, Z auf, für welche die entsprechenden kleinen Drehungen nach einander auszuführen sind, so kann man aus dem Umstand, dass die Summe der drei Gleichungen wieder die Gleichung 16a) für unendlich kleines δ ergiebt, folgenden Satz entnehmen:

„Dreht sich eine beliebige Fläche F um eine beliebige „Achse $AA_1(\alpha\beta\gamma)$ um einen unendlich kleinen Winkel δ, „so kann bezüglich des bei dieser Drehung beschriebenen „Volumens dieselbe ersetzt werden durch die beliebig auf „einander folgenden Drehungen derselben Fläche um drei „parallel zu den Coordinatenachsen X, Y, Z durch einen „beliebigen Punkt A der Achse AA_1 gezogene gerade „Linien, bzhw. um die Winkel $\delta\,.\cos\alpha$, $\delta\,.\cos\beta$, $\delta\,.\cos\gamma$; „letztere sind die Projectionen einer auf der Drehachse „gemessenen Strecke δ auf die Coordinatenachsen."

Das ist offenbar eine Wiederholung der in § 4., Seite 258—260 bezüglich der Drehung um zwei sich schneidende Achsen ermittelten Gesetzes und wesentlich mit dem dort Gesagten gleichbedeutend *).

---

*) Anmerkung. Die Gleichung 16a) lässt sich auf folgende Form bringen, welche beide auch für endliche Werte von δ gelten, wenn man die einzelnen in Frage kommenden Drehungen jedes Mal auf dieselbe Anfangslage der Fläche F und ihrer Projectionen bezieht:

$$\text{a)}\quad V=\left\{\begin{array}{l}\delta\,.\cos\alpha\iint(z-w)d^2F_{zx}-\delta\,.\cos\alpha\iint(y-v)\,d^2F_{xy}\\ +\delta\ \cos\beta\iint(x-u)d^2F_{xy}-\delta\,.\cos\beta\iint(z-w)d^2F_{yz}\\ +\delta\,.\cos\gamma\iint(y-v)d^2E_{yz}-\sigma\,.\cos\gamma\iint(x-u)d^2F_{zz}\end{array}\right\}$$

Als besonderer Fall soll nun noch derjenige bezeichnet werden, wo sich eine ebene Fläche F, deren Ebene wie in Gleichung 1)

$$\cos\lambda \,.\, x + \cos\mu \,.\, y + \cos\nu \cdot z - p = 0$$

sei, um eine der Coordinatenachsen, etwa um die Z-Achse dreht. Da für diesen Fall

$$\gamma = 0, \quad \alpha - \beta = 90^0$$

so ist, wenn wieder $x_1 y_1 z_1$ die Coordinaten des Schwerpunkts von F sind, nach Gleichung 14)

24)
$$V = \delta(y_1 \,.\, \cos\lambda - x_1 \,.\, \cos\mu) F$$
$$= \delta\,(y \,.\, F_{yz} - x_1 \,.\, F_{xz}$$

---

b)
$$V = \left\{ \begin{array}{l} \delta \,.\, \sin\alpha \displaystyle\int\int \frac{(y-v)\cos\gamma - (z-w)\cos\beta}{\sin\alpha} \,.\, d^2F_{yz} \\ +\delta \,.\, \sin\beta \displaystyle\int\int \frac{(z-w)\cos\alpha - (x-u)\cos\gamma}{\sin\beta} \,.\, d^2F_{xz} \\ +\delta \,.\, \sin\gamma \displaystyle\int\int \frac{(x-u)\cos\beta - (y-v)\cos\alpha}{\sin\gamma} \,.\, d^2F_{xy} \end{array} \right\}$$

Die Bedeutung dieser Gleichungen ist folgende:

In Gleichung a) sind

$$\delta \,.\, \cos\alpha, \quad \delta \,.\, \cos\beta \quad \text{und} \quad \delta \,.\, \cos\gamma$$

die Projectionen einer auf der Drehachse AA_1 abgetragenen Länge δ auf die drei Coordinaten-Achsen, bzhw. auf drei gerade Linien, welche parallel zu denselben durch den Punkt $A(u,\ v,\ w)$ gezogen sind. Ferner sind beispielsweise d^2F_{xz} und d^2F_{xy} die Projectionen von d^2F auf zwei durch den Punkt A parallel zur XZ- und XY-Ebene gelegte Ebenen, und

$$\delta \,.\, \cos\alpha\,(z-w)\,d^2F_{xz} - \delta \,.\, \cos\alpha\,(y-v)\,d^2F_{xy}$$

ist die Differenz der Volumina, welche beschrieben werden, wenn sich dieselbe beiden Projectionen um einen Winkel $\delta \,.\, \cos\alpha$ drehen um einen durch den Punkt A parallel zur X-Achse gezogene gerade Linie als Drehachse. Die Doppel-Integrale beziehen sich auf die Integrationen der ganzen Fläche F, und man kann die einzelnen Summanden der Gleichung a) offenbar nach der einfachen Guldin'schen Regel (auf graphischem Wege) bestimmen.

In Gleichung b) sind

$$\delta \,.\, \sin\alpha, \quad \delta \,.\, \sin\beta, \quad \delta \,.\, \sin\gamma$$

die Projectionen einer auf der Drehachse AA_1 abgetragenen Länge δ auf die drei Coordinaten-Ebenen YZ: XZ und XY. Die Gleichungen der Projectionen der Drehachse auf die Coordinaten-Ebenen, bzhw. die Gleichungen der entsprechenden projicirenden Ebenen sind:

Die drei auf Seite 345—347 und auf Seite 350—351 abgeleiteten allgemeinen Sätze gelten natürlich auch in diesem besondern Falle und bedürfen keiner neuen Begründung. — Giebt man der Ebene F eine solche Lage, dass sie normal steht zu einer der beiden Coordinaten-Ebenen XZ und YZ, z. B. zu XZ, dann ist ihre Gleichung:

$$25) \qquad \cos\lambda \,.\, x\cos\mu \,.\, y + \cos\nu \,.\, z - p = 0$$

d. h. es ist

$$\cos\mu = 0, \quad \text{weil} \quad \mu = 90^0, \quad \text{also auch} \quad F_{xz} = 0$$

Unter diesen Umständen geht Gleichung 24) über in

$$\frac{x-u}{\cos\alpha} = \frac{y-v}{\cos\beta} = \frac{z-w}{\cos\gamma}$$

Hieraus folgt also beispielsweise für die Projection der Drehachse auf die YZ-Ebene und für die entsprechende projicirende Ebene die Gleichung

$$(y-v)\cos\gamma - (z-w)\cos\beta = 0$$

oder, indem man durch

$$\sqrt{\cos^2\beta + \cos^2\gamma} = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sin\alpha$$

teilt:

$$(y-v)\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha} - (z-w)\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = 0$$

Als Gleichung der projicirenden Ebene aufgefasst, ist das die Normalform dieser Gleichung Sind nun x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Punktes P_1, an dem das Flächenelement d^2F liegt, so ist

$$\frac{(y_1-v)\cos\gamma - (z_1-w)\cos\beta}{\sin\alpha}$$

der Abstand des Punktes P_1 von jener Ebene, mithin auch der Abstand der Projection d^2F_{yz} von der Projection der Drehachse auf die YZ-Ebene. Hieraus ergiebt sich nun, dass in Gleichung b) der Ausdruck

$$\delta \,.\, \sin\alpha \left(\frac{(y-v)\cos\gamma - (z-w)\cos\beta}{\sin\alpha} \right) d^2F_{yz}$$

dasjenige Volumen ist, welches die Projection d^2F_{yz} des Flächenelements d^2F (mit den Coordinaten x, y, z) beschreibt, wenn es sich um einen Winkel $\delta \,.\, \sin\alpha$ dreht um die Projection der ursprünglichen Drehachse AA_1 auf die YZ-Ebene als neuer Drehachse. Die Doppel-Integrale beziehen sich auf die Projectionen der ganzen Fläche F, und man kann die einzelnen Summanden der Gleichung b) auch hier nach der einfachen Guldin'schen Regel bestimmen.

Die beiden Formeln a) und b) zeigen also wie die allgemeinste Form der Drehung einer beliebigen Fläche F um eine beliebige Achse bezüglich der Bestimmung des beschriebenen Volumens behandelt werden kann durch wiederholte Anwendung der einfachen Guldin'schen Regel für die Projectionen der Fläche F.

26) $$V = \delta \cdot \cos\lambda \cdot y_1 F = \delta \cdot y_1 \cdot F\cos\lambda$$

Hierin ist $y_1 \cdot F$ das Moment ersten Grades der ebenen Fläche F in Bezug auf die Gerade, in der ihre Ebene diejenige Coordinaten-Ebene schneidet, zu der sie normal steht. Jede Verschiebung oder Drehung der Fläche F in ihrer Ebene, die an diesem Momente nichts ändert, d. h. also so, dass der Schwerpunkt sich auf einer ursprünglich zur XZ-Ebene parallelen Geraden bewegt, ist auf das Volumen V ohne Einfluss; natürlich darf diese Verschiebung des Schwerpunkts auf der vorgezeichneten Linie auch während der Drehung δ erfolgen.

Giebt man der Ebene F der rotirenden Fläche F eine solche Lage, dass sie parallel wird zur Drehachse Z, so ist ihre Gleichung

27) $$\cos\lambda \cdot x + \cos\mu \cdot y - p = 0$$

d. h. es ist $\cos\nu = 0$, weil $\nu = 90^0$ ist. Da aber ν in Gleichung 24) nicht vorkommt, so wird diese Gleichung dadurch nicht beeinflusst; man kann indessen diesem Falle in folgender Weise eine interessante Seite abgewinnen. Legt man auch hier, wie im vorigen Falle, die Ebene F normal zur XZ-Ebene, so wird ihre Gleichung

27) $$\cos\lambda \cdot x - p = 0$$

d. h. es wird auch $\cos\mu = 0$, weil $\mu = 90^0$, und da ausserdem schon $\cos\nu = 0$, so muss $\cos\lambda = 1$ sein, so dass

28) $$x - p = 0$$

Aus Gleichung 24) wird nun:

29) $$V = \delta \cdot y_1 \cdot F = \delta \cdot y_1 \cdot F_{yz}$$

offenbar sind auch F und F_{yz} jetzt congruent. An dem Resultat fällt auf, dass die Grösse p ganz ohne Einfluss ist, also beliebig gross oder klein und auch null sein kann, und man sieht, dass man es mit einer Wiederholung des auf Seite 250 bereits abgeleiteten Satzes zu tun hat. Derselbe gestattet nun aber auf Grund der bisherigen Betrachtungen eine erhebliche Erweiterung. Nach Gleichung 26) ist nämlich das Volumen V als Product aus den Factoren δ, y_1, F und $\cos\lambda$. Jede Verschiebung oder Drehung, welche man mit der Fläche F im Raume vor ihrer Rotation vornimmt, ändert an dem Wert von V nichts, sofern die Grössen y_1, F und $\cos\lambda$ dadurch nicht geändert werden; auch eine Formänderung von F ist gestattet, wenn nur ihre Flächengrösse und die Lage ihres Schwerpunkts dadurch nicht verändert werden. Man hat also folgenden Satz:

„Eine beliebig geformte und belegene ebene Fläche F „drehe sich um eine feste Achse um einen endlichen „Winkel δ: legt man dann durch die Drehachse eine Ebene „E normal zu F und durch den Schwerpunkt der Fläche „eine Ebene E_1 parallel zu E, so kann man dem Schwer„punkt in dieser Ebene E_1 vor der Drehung um die feste „Achse eine beliebige Lage anweisen, auch die Fläche um „ihren Schwerpunkt drehen oder, unter Wahrung ihrer „Grösse, ihre Form ändern, ohne dass dadurch das bei der „Rotation um die feste Achse beschriebene Volumen be„einflusst wird, vorausgesetzt, dass die Ebene von F stets „zu der ursprünglich gegebenen Lage parallel bleibt. Auch „während der Drehung können, unter Aufrechthaltung der „Bedingungen, Verschiebungen der Fläche F in ihrer Ebene „erfolgen. — Eine fernere Erweiterung, unter entsprechen„der Abänderung dieser Bedingungen, ist noch nach der „Richtung hin möglich, dass die Fläche F während ihrer „Drehung um die feste Achse auch noch Drehungen er„leiden darf um Achsen, die der festen parallel sind und „durch den Schwerpunkt der Fläche gehen, da bei diesen „letzteren Drehungen algebraisch ein Volumen gleich null „beschrieben wird (Formel 26)".

Es bleibt mir nun noch übrig, einige Betrachtungen anzustellen über den Meridianschnitt der von der Randcurve L der Fläche E bei der Drehung der letzteren beschriebenen Ringfläche, die ich indessen bei der Hauptsache auf den Fall beschränken will, wo eine der Coordinaten-Achsen, etwa die Z-Achse, Drehachse ist.

Man kann sich den Meridianschnitt in zweierlei Weise entstanden denken:

1) Eine durch die Drehachse gelegte Ebene drehe sich um diese Achse, bis sie alle Punkte der ruhenden Fläche F getroffen hat; dann bilden die Spuren der einzelnen Punkte der Randcurve L den Meridianschnitt M der Ringfläche, denn alle ausserhalb dieser Curve liegenden Teile der Ebene, welche etwa getroffen werden, werden ebenso oft von positiven wie von negativen Flächenteilen getroffen und fallen daher aus, während alle innerhalb der Curve M liegenden Teile der Ebene ein Mal mehr von $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\\text{negativen}\end{matrix}\right\}$ als von $\left\{\begin{matrix}\text{negativen}\\\text{positiven}\end{matrix}\right\}$ Teilen der Ebene F getroffen und dementsprechend in der Fläche von M mit dem Vorzeichen $\pm$ zur Geltung kommen.

2) Man lege durch die einzelnen Punkte der Fläche F Kreise, deren Ebenen zur Z-Achse normal stehen. Die der Randcurve L entsprechenden Kreise legen in ihren Schnittpunkten mit einer durch die Z-Achse gelegten Ebene in dieser den Meridianschnitt M der Ringfläche fest. Alle ausserhalb M die Ebene treffenden Kreise treffen die Fläche F eben so oft in positiven und negativen Teilen und fallen daher aus, sodass nur die innerhalb M liegenden Teile mit dem Vorzeichen plus oder minus für die Fläche von M übrig bleiben.

Bezeichnet nun in Fig. 15 die Linie OR die zur XY-Ebene senkrechte Ebene des Meridianschnitts, und sind x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes P der Fläche F (oder der Randcurve L), r und z die im System RZ genommenen Coordinaten des entsprechenden Punktes P_m des Meridianschnittes, so ist

30) $$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad z = z$$

Sind nun

31) $$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z) \qquad \text{(L.}$$

wo φ und ψ Functionsbezeichnungen sind, die Gleichungen von L, so ist

32) $$r = \sqrt{(\varphi(z))^2+(\psi(z))^2} \qquad \text{(M.}$$

die Gleichung des Meridianschnitts M im System RZ.

Für das Volumen V, berechnet aus dem Meridianschnitt, hat man einfach:

33) $$V = \delta \int\int r \,.\, dr \,.\, dz$$

Als Flächenelement von M steht hierin das elementare Rechteck $dr \,.\, dz$, dessen Seiten dr und dz man sich in beliebigem Verhältniss zu einander stehend denken kann; die Integrale, für deren Lösung die Gleichung 32) erforderlich ist, sind über die ganze Fläche M auszudehnen. Man kann statt dessen auch das Integral zerlegen in zwei andere und sich für deren Lösung der Gleichungen 31) bedienen. Das setzt dann voraus, dass dr der Gleichung 30) genüge, aus der man durch Differentiiren erhält:

34) $$dr = \frac{x}{r} \,.\, dx + \frac{y}{r} \,.\, dy$$

wodurch Gleichung 33) übergeht in

35) $$V = \delta \int\int y \,.\, dy \,.\, dz + \delta \int\int x \,.\, dx \,.\, ds$$

Diese Formel scheint in einem gewissen Widerspruch zu stehen mit den Formeln 23); dort tritt V als eine Differenz auf, hier ist es eine Summe. Ein wesentlicher Unterschied kann natürlich nicht vorhanden sein, und jener scheinbare Widerspruch ist auch leicht aufzuklären.

Legt man durch die ersten drei von den vier Punkten, welche folgende Coordinaten haben (vergl. Fig. 15):

P)	x,	y.	z
P')	$x+\Delta x$,	y,	$x+\Delta z_x$
P'')	x,	$y+\Delta y$,	$z+\Delta z_y$
P''')	$x+\Delta x$,	$y+\Delta y$,	$z+\Delta z_x+\Delta z_y$

eine Ebene, so liegt auch der vierte Punkt in dieser Ebene. Liegen die ersten drei Punkte ausserdem in der Fläche F, so wird das im allgemeinen für den 4ten Punkt nicht zutreffen; er rückt ihr aber, wenn man Δx in dx, Δy in dy übergehen lässt*), so nahe, dass er höchstens um eine unendlich kleine Strecke 2ter Ordnung von ihr entfernt ist, also für den vorliegenden Zweck ebenfalls als in die Fläche F fallend betrachtet werden darf. Dementsprechend bedient man sich denn auch des Inhalts des durch jene vier Punkte bestimmten, geradlinig begrenzten Vierecks als Flächenelement d^2F für $$\Delta x = dx \quad \text{und} \quad \Delta y = dy$$

Der Inhalt des Elements ist der Grenzwert des Ausdrucks:

36) $$\sqrt{(\Delta x \,.\, \Delta y)^2 + (\Delta y \,.\, \Delta z_x)^2 + (\Delta x \,.\, \Delta z_y)^2}$$

also:

$$d^2F = dx\,dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

und seine Projectionen auf die Coordinatenebenen sind (vergl. Seite 239, Gleichung 8):

---

*) Unter dieser Voraussetzung wird die durch P, P', und P'' gelegte Ebene zur **Berührungsebene an die Fläche** F für den Punkt P; ihre Gleichung ist bekanntlich:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(\eta - y) - (\zeta - z) = 0$$

In besonderen Fällen tritt diese Gleichung an die Stelle der Gleichung 2).

37) $$\begin{cases} d^2F_{xy} = dx \,.\, dy \\ d^2F_{zz} = dx \,.\, dy \,.\, \dfrac{\partial z}{\partial y} \\ d^2F_{yz} = dx \,.\, dy \,.\, \dfrac{\partial z}{\partial x} \end{cases}$$

Legt man nun, entsprechend der unter 1) bezeichneten Entstehungsart des Meridianschnitts, durch die Z-Achse und den Punkt P eine Ebene, so projiciren sich die oben genannten vier Punkte auf diese Ebene mit folgenden Coordinaten

P_n)	r,	z
P_n')	$r+\Delta x \,.\, \cos\psi$,	$z+\Delta z_x$
P_n'')	$r+\Delta y \,.\, \sin\psi$,	$z+\Delta z_y$
P_n''')	$r+\Delta x \,.\, \cos\psi+\Delta y \,.\, \sin\psi$.	$z+\Delta z_x+\Delta z_y$

Der Inhalt des Vierecks mit diesen vier Eckpunkten ist:

$$\Delta^2F_n = \Delta y \,.\, \Delta z_x \,.\, \sin\psi - \Delta x \,.\, \Delta z_y \,.\, \cos\psi$$
$$= \Delta y \,.\, \Delta z_x \,.\, \frac{y}{r} - \Delta x \,.\, \Delta z_z \,.\, \frac{x}{r}$$

Macht man nun

$$\Delta x = dx \quad \text{und} \quad \Delta y = dy$$

so wird hieraus das dem Flächenelement d^2F der Fläche F entsprechende Element der Fläche des Meridianschnitts M:

33) $$d^2F_m = \frac{y}{r} \,.\, dx \,.\, dy \,.\, \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{x}{r} \,.\, dx \,.\, dy \,.\, \frac{\partial z}{\partial y}$$
$$= \frac{y}{r} \,.\, d^2F_{yz} - \frac{x}{r} \,.\, d^2F_{zz} \quad \text{(vergl. Gleichung 37)}$$

Wird das mit $r\delta$ multiplicirt und dann integrirt, so erhält man wie früher:

39) $$V = \delta \int\int r \,.\, d^2F_m = \delta \int\int y \,.\, d^2F_{yz} - \delta \int\int x \,.\, d^2F_{zz}$$ *)

*) Anmerkung. Man hätte von vornherein auch der hier benutzten Ableitung der Gleichung 39) beginnen und aus ihr mit Benutzung des Satzes über die Zusammensetzung von Drehungen um sich schneidende Achsen (Seite 259) die allgemeine Gleichung 15) entwickeln können (vergl. Seite 351).

Der Unterschied gegen Gleichung 35) liegt also lediglich in der Wahl des Flächenelements der Fläche M, welches man an und für sich beliebig geformt denken kann, wenn man nur Sorge trägt, dass die Integrationen sich wirklich auf die ganze Fläche erstrecken.

Uebrigens wurde schon in dem Satze auf Seite 350—351 erwähnt, dass die Differenzen in Gleichung 23) in besondern Fällen sich in Summen verwandeln könnten; hierzu ein Beispiel:

Die positive Richtung der Normalen der Tangentialebene an die Fläche F bilde innerhalb einer gewissen Begrenzung der letzteren mit der positiven X-Achse einen stumpfen, mit den beiden andern Achsen einen spitzen Winkel, dann ist in der Tangential-Ebene für F, d. h. also in der Gleichung (vergl. die Anmerkung Seite 357)

40) $$\cos\lambda \,.\, x + \cos\mu \,.\, y + \cos\nu \,.\, z - p = 0 \qquad (d^2F.$$

für den fraglichen Teil von F:

41) $$\cos\lambda < 0, \quad \cos\mu > 0, \quad \cos\nu > 0$$

Aus Gleichung 40) folgt nun:

42) $$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\cos\lambda}{\cos\nu} > 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\cos\mu}{\cos\nu} < 0 \end{cases}$$

also:

43) $$d^2F_m = -\frac{\cos\lambda}{\cos\nu} \cdot \frac{y}{r} \,.\, dx\,dy + \frac{\cos\mu}{\cos\nu} \cdot \frac{x}{r} \,.\, dx\,dy$$

Für den in Rede stehenden Teil von F ist also:

44) $$V = -\frac{\cos\lambda}{\cos\nu} \,.\, \delta \int\int y \,.\, dx\,dy + \frac{\cos\mu}{\cos\nu}\,\delta \int\int x \,.\, dx\,dy$$

und in dieser Gleichung sind rechts beide Summanden positiv. Beide würden negativ sein mit $\cos\lambda > 0$, $\cos\mu < 0$.

Anhang. Auf Seite 252 wurde bereits erwähnt, dass die Grösse des Volumens V unabhängig ist von der Form der Fläche F, welche die Randcurve L schliesst, dass man also F durch eine beliebige andere Fläche ersetzen kann, und dass die einfachste Ersatzfläche eine Regelfläche sei. Letztere kann man zu noch weiterer Vereinfachung stets so construirt denken, dass ihre geraden Seiten normal zur Drehachse sind, und das legt dann die Frage nahe nach der Gleichung dieser Fläche, deren Kenntniss unter Umständen er-

16) $$\frac{x-u}{\cos\alpha} = \frac{z-w}{\cos\gamma}, \quad \frac{y-v}{\cos\beta} = \frac{z-w}{\cos\gamma}$$

Jeder Punkt von L beschreibt bei der Drehung um die Achse einen Kreis, den man ansehen kann als den Durchschnitt einer zur Drehachse normalen Ebene mit einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt auf der Drehachse im Punkte A liegt. Die Gleichungen dieser beiden Flächen sind von der Form

17) $$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma(z) - q = 0$$

18) $$(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = \varrho^2$$

die Grössen q und ϱ^2 sind Parameter. Sind $x_1 y_1 z_1$ die Coordinaten eines Punktes P_1 von L, so müssen die 4 Gleichungen 15), 17) und 18) richtig bleiben, wenn man in denselben

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1$$

setzt. Geschieht das, so erhält man 4 Gleichungen, in denen ausser x_1, y_1, z_1, q und ϱ^2 nur die constanten Grössen u, v, w und α, β, γ vorkommen. Entfernt man aus denselben x_1, y_1 und z_1, so bleibt eine Beziehung übrig zwischen q und ϱ^2 (und jenen Constanten), etwa:

19) $$q = f(\varrho^2)$$

Diese Gleichung schreibt die Bedingung vor, welche die Gleichungen 17) und 18) erfüllen müssen, wenn ihr Schnittkreis die Randcurve L treffen, also auch in der fraglichen Ringfläche liegen soll. Entfernt man demnach aus den Gleichungen 17), 18) und 19) die Grössen q und ϱ^2, so erhält man als Gleichung der Ringfläche:

20) $$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \quad y + \cos\gamma \cdot z = f((x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2)$$

Ist die Z-Achse Drehachse, also

$$\alpha = \beta = 90^0, \quad \gamma = 0 \quad \text{und} \quad u = v = w = 0$$

so erhält man einfacher:

21) $$z = f(x^2 + y^2 + z^2)$$

Für diesen Fall kann man aber eine noch einfachere Form finden, indem man an die Stelle der Gleichungen 17) und 18) die folgenden setzt:

17a) $$z = q = 0$$

$$x^2 + y^2 = \varrho^2$$

durch welche der von irgend einem Punkt von L beschriebene Kreis in diesem Fall ebenfalls festgelegt wird; 17a) stellt eine zur XY-Ebene parallele Ebene, 17b) einen zu ihr normalen Kreiscylinder dar. Aus den 4 Gleichungen 15), 17a) und 18a) folge jetzt in der oben durchgeführten Weise, indem man überall

$$x = x_1, \quad y = y_1 \quad \text{und} \quad z = z_1$$

setzt und dann diese Grössen ausscheidet:

19a) $$q = f_1(\varrho^2)$$

Diese Gleichung liefert dann mit den beiden vorigen durch Ausscheidung von q und ϱ^2 die einfachere Form:

21a) $$z = f_1(x^2+y^2)$$

Die Gleichungen 20), 21) und 21a) stellen natürlich auch die allgemeine Gleichung einer Umdrehungsfläche, nicht nur diejenige einer Ringfläche dar, d. h. es ist nicht erforderlich, dass die Curve L (Gleichung 15)) geschlossen sei, wenn es sich nicht um die Randcurve L einer Fläche F handelt.

Aus der Gleichung 20) kann man mit Hülfe von Differential-Operationen die allgemein nicht näher zu bezeichnende Function f ausscheiden und dadurch zu einer charakteristischen Gleichung für alle Umdrehungsflächen gelangen. Differentiirt man nämlich die Gleichung 20) teilweise, erst nach x und z, dann nach y und z, so erhält man:

$$\cos\alpha+\cos\gamma\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \left(2(x-u)+2(z-w)\frac{\partial z}{\partial x}\right) f'((x-u)^2+(y-v)^2 +(z-w)^2)$$

$$\cos\beta+\cos\gamma\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \left(2(y-v)+2(z-w)\frac{\partial z}{\partial y}\right) f'((x-u)^2+(y-v)^2 +(z-w)^2)$$

Teilt man diese beiden Gleichungen durch einander, so erhält man nach einer einfachen Umformung:

22) $$((y-v)\cos\gamma-(z-w)\cos\beta)-\frac{\partial z}{\partial x}+((z-w)\cos\alpha-(x-u)\cos\gamma)\frac{\partial z}{\partial x} -(x-u)\cos\beta-(y-v)\cos\alpha) = 0$$

Dieser Gleichung, in der x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punkts der Fläche sind, muss jede Umdrehungsfläche genügen, deren Achse durch den Punkt $A(u, v, w)$ geht und mit den Coordinaten-Achsen die Winkel α, β, γ bildet.

nach einander stattfindend in die Rechnung einführen kann; daraus ergiebt sich dann, wenn die Drehachse AA_1 wieder durch einen beliebigen Punkt $A(u, v, w)$ geht und mit den Coordinaten-Achsen die Winkel α, β, γ bildet, für das von d^2F beschriebene Volumen (vergl. § 4, Gl. 10) und 12) und § 6., Gleichung 13), auch Gleichung 16a)):

$$3)\quad d^3V = \begin{cases} (\cos\alpha \cdot \cos\lambda + \cos\beta \cdot \cos\mu + \cos\gamma \cdot \cos\nu) d^2F \cdot d\sigma \\ +(((y-v)\cos\gamma - (z-w)\cos\beta)\cos\lambda \\ +((z-w)\cos\alpha - (x-u)\cos\gamma)\cos\mu \\ +((x-u)\cos\beta - (y-v)\cos\alpha)\cos\nu) d^2F d\sigma \end{cases}$$

oder, indem man die Projectionen von d^2F auf die Coordinatenebenen einführt:

$$4)\quad d^3V = \begin{cases} (\cos\alpha \cdot d^2F_{yz} + \cos\beta \cdot d^2F_{zx} + \cos\gamma \cdot d^2F_{xy}) d\sigma \\ +(((y-v)\cos\gamma - (z-w)\cos\beta) d^2F_{yz} \\ +((z-w)\cos\alpha - (x-u)\cos\gamma) d^2F_{yz} \\ +((x-u)\cos\beta - (y-v)\cos\alpha) d^2F_{xy}) d^2F \end{cases}$$

In diesen Formeln sind x, y, z die Coordinaten des Flächenelements d^2F; ist F eben, so kann man wie früher statt d^2F gleich die ganze Fläche F einführen und dementsprechend dV an die Stelle von d^3V treten lassen, wenn man unter x, y, z die Coordinaten des Schwerpunkts von F versteht (Seite 242—244).

Von der Fläche F interessirt in letzter Linie nur ihre Randcurve L, deren Gleichungen auf Seite 356, Gleichung 31), durch

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z)$$

auf Seite 362, Gleichung 15), durch

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0$$

angedeutet wurden. Diese Gleichungen müssen unter allen Umständen die Grenzen der auf d^2F bezüglichen Schlussintegrale liefern, wenn es sich um eine endliche Gesamtbewegung von F handelt, und $\iiint d^3V$, d. i. das Volumen bestimmt werden soll, welches F von einer gegebenen Anfangslage aus bis zu einer bestimmten Endlage hin beschreibt. Dabei kann man, soweit es erforderlich erscheint und die Vorstellung erleichtert, die Winkel λ, μ und ν auf die in dem Anhange zu § 6. auf Seite 359 bis 361 behandelte Regelfläche oder auf irgend eine Fläche, die man als Schlussfläche der Randcurve L an die Stelle von F setzen will, beziehen.

Die oben angedeuteten Gleichungen der Raumcurve L können während der ganzen Dauer der Bewegung constant sein oder auch sich gesetzmässig ändern, und es wird also im allgemeinen die Aufgabe sein, diese etwaigen Aenderungen sowol wie auch die ganze Bewegung von L in der Volumenformel zum Ausdruck zu bringen. Fasst man diese Aufgabe im weitesten Sinne auf, so müssen für ihre Lösung die Gesetze der rein geometrischen Bewegungslehre, auf die ich schon früher hingewiesen habe, in ihrem vollen Umfange, sowie auch die Theorie der Krümmung von Raumcurven und krummen Flächen zur Anwendung kommen. Es kann hier nicht der Ort sein, die umfassende Ableitung dieser Gesetze zu wiederholen, da es mir wesentlich nur ankam auf die Ableitung der in den §§ 3.—6. gefundenen Resultate, deren Anwendung weiter unten noch an einigen Beispielen gezeigt werden soll. Ich will deshalb nur die folgenden allgemeinen Bemerkungen machen, in Anlehnung an das Seite 230 bis 231 mit Bezugnahme auf die einfache Guldin'sche Regel Gesagte:

Die Bewegung eines Raumgebildes wird bestimmt durch die Bewegung von drei mit demselben fest verbundenen Punkten, welche nicht in einer geraden Linie liegen. Diese drei Punkte legen eine Ebene K fest, welche man sich mit der Curve L fest verbunden denkt. Die Ebene K ist an sich beliebig; sie möge so gewählt sein, dass sie in jedem Augenblick der fraglichen Bewegung zusammenfalle mit der Krümmungsebene derjenigen Curve C, welche als die die Bewegung von F charakterisirende zu betrachten ist und dementsprechend von einem Punkte J der Ebene K beschrieben wird. Man denke sich durch J ein zweites Coordinatensystem gelegt, von dem zwei Achsen in die Ebene K fallen, während die dritte Achse zu K normal stehe; auf dieses System zunächst kann man die Randcurve L, bzhw. die etwaigen Aenderungen von L während der Bewegung beziehen und dasselbe demnach als Vermittlung benutzen für die Bestimmung dieser Aenderungen in dem System der Hauptcoordinaten, so dass man d^2F und seine Projectionen auf die Ebenen dieser Coordinaten in jedem Augenblick zum Ausdruck bringen kann.

Dann kommt es weiter wesentlich darauf an, die Bewegung der Ebene K, und des Punktes J derselben auf die Curve C in die Volumenformel einzuführen. Diese Bewegung kann für die einzelnen Elemente der Bahn von J, d. i. der Curve C, als eine cylindrische Schraubenbewegung behandelt werden, wenn man jene Elemente von Punkt zu Punkt durch die entsprechende Krümmungsschraube ersetzt denkt. Zur Berechnung der von F, bzhw. d^2F bei diesen Elementarbewegungen beschriebenen Volumina ist es also erforder-

Ich will auf den weiteren Verfolg der vorstehenden allgemeinen Betrachtung verzichten und nur noch Folgendes für besondere Fälle hinzufügen:

In manchen einfacheren Fällen wird es möglich sein, die Lage der Cylinderachse für die Krümmungsschraube, d. i. die augenblickliche Drehachse ohne Weiteres oder durch einfache Nebenbetrachtungen zu bestimmen; beispielsweise ist das immer der Fall, wenn eine der Gleichungen der im Vorstehenden mit C bezeichneten Curve, also allgemein derjenigen Curve, welche die Bewegung eines Punktes, der mit F oder L fest verbunden ist, charakterisirt, die Gleichung einer Cylinderfläche ist, da dann die augenblickliche Drehachse den Seiten dieses Cylinders parallel ist. In solchen Fällen sind dann ausser x, y, z auch u, v, w und α, β, γ und nach Gleichung 10) auch r bekannt, und es bleiben dann nur noch $r \,.\, d\delta$ und $d\sigma$ zu bestimmen. Nun müssen für beide Curven ϱ und $d\tau$ für gleiche $d\sigma$ gleiche Werte haben. Für die Schraubenlinie ist

11) $$\varrho = \frac{r}{\cos^2\eta}$$

12) $$\frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{r}{\sin\eta \,.\, \cos\eta}$$

Sind nun ϱ und $\frac{ds}{d\tau}$ für die Curve C bestimmt und demnach als bekannt anzusehen, so ergeben diese beiden Gleichungen für die Schraubenlinie:

13) $$\operatorname{tg}\eta = \frac{d\sigma}{r \,.\, d\delta} = \varrho \,.\, \frac{d\tau}{ds}$$

14) $$r = \varrho \,.\, \sin^2\eta$$

Mit diesen beiden Werten ist dann also auch die Steigung der Schraubenlinie und der Radius des Cylinders derselben bekannt; letzteren Wert kann man dann mit Hülfe von Gleichung 10) auf seine Richtigkeit prüfen.

Ist in den Gleichungen 3) und 4) die Drehachse der Z-Achse parallel, also

$$\alpha = \beta = 90^0, \quad \gamma = 0$$

so vereinfachen sich dieselben in

15) $$d^2V = (\cos\nu \,.\, d\sigma + ((y-v)\cos\lambda - (x-u)\cos\mu)\, d\delta)\, d^2F$$

oder

16) $$d^2V = d^2F_{xy} \,.\, d\sigma + ((y-v)\, d^2F_{yz} - (x-u)\, d^2F_{xz})\, d\delta$$

Hierin ist $u = v = 0$, wenn die Achse des Cylinders mit der Z-Achse zusammenfällt.

Ist die Fläche F eben und sind x und y die beiden ersten Coordinaten ihres Schwerpunktes, so ist für die Z-Achse als Drehachse

17) $$dV = F_{xy} \cdot d\sigma + (y \cdot F_{yz} - x \cdot F_{xz})\, d\delta$$
$$= \left(\sqrt{x^2+y^2}\, F_{xy} \cdot \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}\, d\delta} + y \cdot F_{yz} - x \cdot F_{xz}\right) d\delta$$

Ist nun

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}\, d\delta} = \operatorname{tg} \eta$$

constant von $\delta = \delta_0$ bis $\delta = \delta$, und bleibt für die Drehung um $\delta - \delta_0$ die Z-Achse Drehachse, so ist

18) $$V_{\delta=\delta_0}^{\delta=\delta} = (\operatorname{tg} \eta \cdot \sqrt{x^2+y^2}\, F_{xy} + y F_{yz} - x \cdot F_{zx})(\delta - \delta_0)$$

Das ist also das von der ebenen Fläche F bei einer einfachen cylindrischen Schraubenbewegung beschriebene Volumen für einen Drehwinkel $\delta - \delta_0$, wenn η der Steigungswinkel der von dem Schwerpunkt von F (mit den Coordinaten x, y, z) durchlaufenen Schraubenlinie ist.

Will man für den Fall einer cylindrischen Schraubenbewegung mit der Z-Ache als Achse der Schraube den Meridianschnitt des von der Fläche F beschriebenen Volumens für eine Ebene $0R$ (Fig. 15.) berechnen, so kann das in folgender Weise geschehen. Es sei

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{d\sigma}{d\delta}, \quad \text{also} \quad \sigma = \operatorname{tg} \eta \cdot \delta$$

dann ist η der Steigungswinkel der Schraubenlinien, welche von allen Punkten beschrieben werden, deren Abstand von der Drehachse gleich der Längeneinheit ist. Es sei $P(x\,y\,z)$ ein beliebiger Punkt der Randcurve F. Während dieser Punkt den Winkel δ durchläuft, steigt er in der Richtung der Z-Achse um eine Länge σ, und sine Coordinaten im System RZ sind demnach:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\zeta = z + \sigma = z + \operatorname{tg} \eta \cdot \delta$$

Nun entnimmt man aus der Figur

$$\delta = w - \psi = w - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right)$$

statt

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right)$$

kann man auch setzen:

$$\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{y}{r}\right) \quad \text{oder} \quad \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{x}{r}\right)$$

Dadurch erhält man für ζ den Ausdruck:

$$\zeta = z + \operatorname{tg}\eta \,.\, w - \operatorname{tg}\eta \,.\, \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right)$$

Mit Benutzung der beiden Gleichungen der Curve und der oben für r angegebenen Gleichung kann man hierin x, y und z als Functionen von r ausdrücken und erhält dann eine Gleichung, in der nur die Veränderlichen r und ζ vorkommen.

Setzt man in der Gleichung für ζ den Winkel $w = 0$, so erhält man den Meridianschnitt in der XZ-Ebene

$$\zeta = z - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right)$$

Ist $\frac{y}{x} = n$ constant, so ist L eine ebene Curve, deren Ebene durch die Drehachse geht. Für diesen Fall ist

$$\zeta = z + \operatorname{tg}\eta \,.\, w - \operatorname{tg}\eta \,.\, \operatorname{arc}\,(\operatorname{tg} = n)$$

d. h. der Meridianschnitt ist der Curve L congruent und nur nach der Richtung der Drehachse gegen dieselbe verschoben.

Setzt man $z = 0$, so ist L eine ebene Curve in der XY-Ebene $z = c$ deutet L als ebene Curve in einer zur XY-Ebene parallelen Ebene an. Die Gleichung des Meridianschnitts ist dann:

$$\zeta = c + \operatorname{tg}\eta \,.\, w - \operatorname{tg}\eta \,.\, \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right)$$

Die Coordinaten x und y kann man auch in diesem Falle mit Benutzung der Gleichungen für L und für den Fahrstrahl r als Functionen von r ausdrücken.

§ 8. Parallelverschiebung einer begrenzten Curve.

Die bewegte Curve sei L und die von ihr beschriebene Fläche F; es ist also d^2F ein Flächenelement, welches unendlich klein zweiter Ordnung, und dF ein solches, welches unendlich klein erster

Ordnung ist. Das Element der Curve L werde bezeichnet durch ds; die Coordinaten dieses als eine gerade Linie zu betrachtenden Elements, bzhw. die Coordinaten seines Anfangspunktes P_1 seien x_1, y_1, z_1, ist ein Teil der Linie L von endlicher Länge gerade, so kann man gleich diese ganze Länge in die Rechnung einführen, wenn man unter $P_1(x_1\, y_1\, z_1)$ den Schwerpunkt derselben versteht. — Die Curve verschiebe sich nach der Richtung einer Geraden AA_1, welche mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet. Das Maass der Verschiebung soll mit σ bezeichnet werden, dasselbe kann unendlich klein oder auch von endlicher Grösse sein. Es seien ferner λ, μ und ν die Winkel, welche das Curvenelement ds mit den Coordinatenachsen bildet, und φ sei der Winkel dieses Elements mit der Richtung der Verschiebung BA_1. Bei dieser Bezeichnung ist (vergl. Seite 244 u. ff.) die von ds beschriebene Fläche bestimmt durch die Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} d^2F = \sigma \cdot \sin\varphi \cdot ds, \text{ wenn } \sigma \text{ unendlich klein ist;} \\ dF = \sigma \cdot \sin\varphi \cdot ds, \text{ wänn } \sigma \text{ von von endlicher Länge ist} \end{cases}$$

Es kommt also nur darauf an, $\sin\varphi$ zu bestimmen. Hierfür hat man:

$$2)\quad \cos\varphi = \cos\alpha \cdot \cos\lambda + \cos\beta \cdot \cos\mu + \cos\gamma \cdot \cos\nu$$

für welche Gleichung die Winkel λ, μ und ν aus den Gleichungen der Curve L, für den Punkt P_1 zu entnehmen sind. Das Element ds ist gleichzeitig als ein Element dieser Curve und der Tangente derselben für den Punkt P_1 zu betrachten. Die Gleichungen der Tangente sind:

$$3)\quad \begin{cases} x - x_1 = \dfrac{dx}{dz}(z - z_1) \\ \\ y - y_1 = \dfrac{dy}{dz}(z - z_1) \text{ *)} \end{cases}$$

---

*) Sind die Gleichungen der Curve L:

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z)$$

so ist (für $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$) für den Punkt B_9:

$$\frac{dx}{dz} = \varphi'(z); \qquad \frac{dy}{dz} = \psi'(z)$$

Sind die Gleichungen von L dagegen:

$$f(x, y, z) = 0; \quad F(x, y, z) =$$

so ist

Für die Tangentengleichungen hat man ausserdem die Form:

4) $$\frac{x-x_1}{\cos\lambda} = \frac{y-y_1}{\cos\mu} = \frac{z-z_1}{\cos\nu}$$

woraus durch Vergleich mit Gleichung 3) folgt:

5) $$\frac{\cos\lambda}{\cos\nu} = \frac{dx}{dz}, \quad \frac{\cos\mu}{\cos\nu} = \frac{dy}{dz}$$

Hieraus und aus der bekannten Beziehung:

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

folgt dann weiter:

6) $$\begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \dfrac{dx}{ds} \\ \cos\mu = \dfrac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \dfrac{dy}{ds} \\ \cos\nu = \dfrac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \dfrac{dz}{ds} \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 1) 2) und 6) erhält man nun für das beschriebene Flächenelement

7) $$d^2F = \sqrt{1-\left(\cos\alpha \cdot \frac{du}{ds} + \cos\beta \cdot \frac{dv}{ds} + \cos\gamma \cdot \frac{dz}{ds}\right)^2} \cdot \sigma \cdot ds$$

Ist σ eine endliche Länge, so tritt dF an die Stelle von d^2F.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \partial z = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot dz = 0$$

und hieraus folgt (wieder für $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$) für den Punkt P_1:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}}; \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}}$$

Unter Umständen kann es möglich sein, aus diesen beiden Gleichungen mit Hülfe der Curvengleichungen allgemein zwei der Grössen x, y, z auszuscheiden.

§ 9. Drehung einer begrenzten Curve um eine feste Achse.

Die im vorigen Paragraphen mit L bezeichnete Curve soll sich jetzt um die dort als Richtung der Verschiebung bezeichnete Gerade AA_1, welche wieder mit den Coordinatenachsen die Winkel α, β. γ bildet, drehen, und zwar um einen Winkel δ, der unendlich klein oder von endlicher Grösse ist. Alles übrige soll hier ebenso wie dort angenommen werden, mit der einen Ausnahme, dass hier nur von einem unendlich kleinen Curvenelement ds die Rede ist. Unter Zugrundelegung der allgemeinen Ableitungen in § 6., welche hier Verwendung finden können, erhält man dann in folgender Weise den Formelausdruck für das Flächenelement d^2F, bzhw. für dF für endliche Werte von δ.

Das Bogenelement, welches für einen unendlich kleinen Drehwinkel δ der Punkt P_1 beschreibt, ist $r\delta$, und zwar ist dieses der Wert, der in Fig. 14. mit P_1P_2 bezeichnet ist. Wenn man die Winkel dieses Elements mit den Coordinatenachsen mit α', β' und γ' bezeichnet, und unter φ den Winkel versteht, den dasselbe mit dem Element ds der gedrehten Curve L bildet: so hat man:

1) $$d^2F = r\delta \,.\, \sin\varphi \,.\, ds$$

für unendlich kleine δ und ds. Hierfür ist $\sin\varphi$ aus der Gleichung zu entnehmen:

2) $$\sqrt{1-\sin^2\varphi} = \cos\varphi = \cos\alpha' \,.\, \cos\lambda + \cos\beta' \,.\, \cos\mu + \cos\gamma' \,.\, \cos\nu$$

Nach § 6., Anmerkung Seite 344 u. ff. ist hierin zu setzen:

3) $$\begin{cases} \cos\alpha' = \dfrac{y_1 \,.\, \cos\gamma - z' \,.\, \cos\beta}{r} \\ \cos\beta' = \dfrac{z_1 \,.\, \cos\alpha' - x_1 \,.\, \cos\gamma}{r} \\ \cos\gamma' = \dfrac{x_1 \,.\, \cos\beta - y_1 \,.\, \cos\alpha}{r} \end{cases}$$

Führt man diese Werte, und für $\cos\lambda$, $\cos\mu$ und $\cos\nu$ die Werte aus Gleichung 6) des vorigen Paragraphen ein, so erhält man aus den obigen Gleichungen 1) und 2), wenn man die Indices weglässt:

4) $d^2F =$

$$\sqrt{\{(y\cos\gamma - z\cos\beta)^2 + (z\cos\alpha - x\cos\gamma)^2 + (x\cos\beta - y\cos\alpha)^2} - \left((y\cos\gamma - z\cos\beta)\frac{dx}{ds} + (z\cos\alpha - x\cos\gamma)\frac{dy}{ds} + (x\cos\beta - y\cos\alpha)\frac{dz}{ds}\right)^2 \delta \,.\, ds\}$$

wofür man auch schreiben kann:

5) $d^2F =$

$$\sqrt{\{x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2} - \left((y\cos\gamma - z\cos\beta)\frac{dx}{ds} + (z\cos\alpha - x\cos\gamma\frac{dy}{ds} + (x\cos\beta - y\cos\alpha)\frac{dz}{ds}\right)^2 \delta \,.\, ds\}$$

Hierin kann man auch dF an die Stelle von d^2F setzen und δ endliche Werte geben.

Steht es von vornherein nicht fest, dass die Drehachse durch den Anfangspunkt O gehe, sondern ist für dieselbe ausser den Winkeln, die sie mit den Coordinatenachsen bildet, nur ein beliebiger Punkt $A(u, v, w)$ gegeben, so hat man in vorstehenden Formeln $x - u$, $y - v$, $z - w$ an die Stelle von x, y, z zu setzen.

Aus der Formel 7) des vorigen Paragraphen und mehr noch aus den Formeln 4) und 5) dieses Paragraphen erkennt man, dass man wegen der in ihnen enthaltenen Wurzelgrössen aus diesen Formeln nicht so allgemeine Resultate ableiten kann, wie es in den §§ 5. und 6. für das durch eine bewegte Fläche beschriebene Volumen geschehen ist. Noch weniger ist das der Fall in Bezug auf denjenigen Ausdruck, welcher die von der Curve L beschriebene Fläche misst, wenn dieselbe gleichzeitig eine fortschreitende und eine Drehbewegung, also eine Schraubenbewegung ausführt; ich will deshalb auch auf die Ableitung dieser Formel nicht weiter eingehen.

Etwas einfacher gestalten sich die Formeln, wenn man die durch die Winkel α, β, γ bezeichnete Richtung mit einer der Coordinatenachsen, z. B. mit der Z-Achse zusammenfallen lässt. Es wird dann

$$\alpha = \beta = 90^0, \quad \gamma = 0$$

und die Gleichungen 4) und 5) beispielsweise gehen dann über in

6) $$d^2F = \sqrt{x^2 + y^2 - \left(y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds}\right)^2} \,.\, \delta \,.\, ds$$

welche man, da

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

die Form bringen kann:

$$\sqrt{x^2+y^2+\left(x \cdot \frac{dx}{dz} + y \cdot \frac{dy}{dz}\right)^2} \cdot \delta \cdot dz$$

bemerkt, dass man diese Formel auch ganz kurz mal- oder Meridianschnitt ableiten kann. Setzt man so wie auf Seite 356):

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad z = z$$

$$\cdot ds = r\sqrt{dr^2 + dz^2}\,\delta = \sqrt{\frac{(r \cdot dr)^2}{dz^2} + r^2} \cdot \delta \cdot dz$$

$$r \cdot dr = x \cdot dx + y \cdot dy$$

eht diese Gleichung über in die oben gefundene Glei-
r $x \cdot \frac{dx}{dz}$ und $y \cdot \frac{dy}{dz}$ die Subnormale der Projectionen
nden Curve auf die XZ- und auf die YZ-Ebene sind
xyz der Curve L. Weitere allgemeine Resultate lassen
der Gleichung 7) nicht ableiten, wenn man die be-
ten Resultate als bekannt voraussetzt. Vollständigkeit
indessen noch Folgendes erwähnen.

L wird zu einer ebenen Curve, deren Ebene durch
ht, wenn

$$y = nx$$

eine constante Grösse ist. Durch diese Beziehung
6) über in

$$F = \sqrt{x^2+y^2}\,\delta \cdot ds = \sqrt{x^2(1+n^2)} \cdot \delta \cdot ds$$

in welchem man nach der Integration unschwer die
gel des § 2 erkennen wird.

in Gleichung 7):

$$ds = 0$$

e über in

$$d^2F = \sqrt{(x\,dx + y\,dy)^2} \cdot \delta \cdot dz$$

st dann eine ebene Curve in der XY-Ebene oder in

einer Ebene parallel zu dieser; setzt man den Fahrstrahl eines beliebigen Punktes xy derselben gleich ϱ, so ist

$$\varrho^2 = x^2 + y^2$$

also

$$(\varrho \cdot d\varrho)^2 = (x \cdot dx + y \cdot dy)^2$$

und die obige Gleichung geht über in

$$9) \qquad d^2F = \varrho \cdot \delta \cdot d\varrho$$

Aus dieser Gleichung kann man entnehmen, dass die von der Curve L beschriebene Fläche algebraisch gleich derjenigen Fläche ist, welche die Schlusslinie der Curve beschreibt, wie es früher schon anderweitig abgeleitet ist.

Auch die Gleichungen 6) bis 9) gelten natürlich für endliche Werte von δ, womit dann dF an die Stelle von d^2F tritt.

§ 10. Beispiele zu den §§ 4—7.

Es ist nicht besonders schwierig, die in den §§ 4—7 abgeleiteten Resultate zur Lösung von bestimmten Aufgaben anzuwenden, wenn die für diese gestellten Vorbedingungen nicht allzu verwickelt sind; ich will mich hier deshalb darauf beschränken, nur wenige einfache, an sich nicht uninteressante Beispiele durchzuführen.

Beispiel 1.

In Figur 16. sei die Curve M in der XY-Ebene die Spur eines zur Z-Achse parallelen Cylinders. Auf dem Cylinder wälzt sich eine Ebene F, und in der Ebene bewegt sich eine gesetzmässig veränderliche Figur mit der Fläche F so, dass die Projection der Bahn ihres Schwerpunktes P auf die XY-Ebene die Curve C ist. Es soll der Formelausdruck für das von F zwischen den Lagen F_0 und F_n, entsprechend den Winkeln δ_0 und δ_n mit der X-Achse, beschriebene Volumen angegeben werden.

Die einzelnen von F beschriebenen Volumenelemente dV zwischen je zwei Nachbarlagen F_1 und F_2 der Ebene F können als schiefe Cylinder betrachtet werden, deren unendlich kleine Höhe in der Figur durch ds_1 bezeichnet ist; diese Höhe ds_1 ist zu messen als der Abstand des Schwerpunkts der einen von der Ebene der andern Endfläche. Die Fläche F_2 kann nämlich bei einer Zunahme des Winkels δ um $d\delta$ nur um unendlich wenig von F_1 verschieden sein, und eine etwaige Verschiebung von F_2 gegen F_1 nach der Richtung

der Z-Achse, welche übrigens auch durch jenen Begriff des schiefen Cylinders nicht ausgeschlossen wird, ist für die Volumengrösse dV ohne Einfluss. Berührt F_1 den Cylinder M in T_1, und ist

$$\overline{T_1 P_1} = \varrho, \quad \overline{T_2 P_2} = \varrho + d\varrho$$

so ist

$$ds_1 = (\varrho + d\varrho)\, d\delta = \varrho \cdot d\delta$$

demnach

$$dV = F \cdot ds_1 = F \cdot \varrho \cdot d\delta$$

Ist der Winkel, den die Tangente an die Curve C für den Punkt P_1 mit der X-Achse bildet, gleich τ, so entnimmt man aus der Gleichung der Curve C:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx}$$

Ist ferner der Winkel, den die Tangente für P_1 mit $T_1 P_1$ bildet, gleich ι, so ist

$$\tau = \delta + \iota$$

mithin auch, da

$$ds \cdot \sin \iota = ds_1$$

$$ds \cdot \sin (\tau - \delta) = ds_1$$

und demnach auch

$$dV = F \cdot ds_1 = F \cdot \sin \iota \cdot ds = F \cdot \sin (\tau - \delta)\, ds = F\varrho \cdot ds$$

Ist r der Krümmungshalbmesser, A der Krümmungsmittelpunkt der Curve C für den Punkt T_1, und

$$\overline{AP_1} = R$$

so kann man auch setzen:

$$\varrho = r \cdot \cos \varphi = R \cdot \cos \varphi = \sqrt{R^2 - r^2}$$

und erhält damit noch

$$dV = F \cdot \varrho \cdot d\delta = F \cdot r \cdot \operatorname{cotg} \varphi \cdot d\delta = FR \cos \varphi\, d\delta$$

$$= F\sqrt{R^2 - r^2} \cdot ds$$

Endlich kann man auch noch die Bewegung von F zerlegen nach der Richtung der X- und Y-Achse, um zu erhalten:

$$dV = F \cdot \sin \delta \cdot dx + F \cdot \cos \delta \cdot dy$$

wenn x und y die Coordinaten von P_1, $x + dx$ und $y + dy$ diejenigen von P_2 sind.

Je nach den für einen bestimmten Fall vorliegenden besondern Bestimmungen wird man für die Integration von dV zwischen den gegebenen Grenzen die eine oder die andere dieser Formen wählen

Beispiel 2.

Ein besonderer Fall des ersten Beispiels ist folgender:

In Fig. 17. ist die Curve M ein Kreis vom Radius r, und C ist ebenfalls ein Kreis, vom Radius B; der Mittelpunkt beider ist der Anfangspunkt O. Auch die beschreibende Fläche F soll ein Kreis sein, vom Radius a; in der Figur ist diese Fläche in drei Lagen um 90^0 in die Zeichenebene gedreht und dann in punktirten Linien gezeichnet.

Nach Beispiel 1. ist

$$dV = F \,.\, \varrho \,.\, d\delta = F \,.\, r \,.\, \operatorname{cotg}\varphi \,.\, d\delta, \quad \text{wo} \quad \sin\varphi = \frac{r}{R}$$

also

$$V = r \,.\, \operatorname{cotg}\varphi \int_{\delta_0}^{\delta_n} F \,.\, d\delta$$

Ist F, also a constant, so ist hiernach

$$V = r \,.\, \operatorname{cotg}\varphi \,.\, F(\delta_n - \delta_0) = r \,.\, \operatorname{cotg} a^2 \,.\, \pi(\delta_n - \delta_0)$$

Ist F veränderlich, so möge beispielsweise die Bedingung gegeben sein:

$$F = F_0 + (F_n - F_0)\frac{\delta - \delta_0}{\delta_n - \delta_0}$$

oder

$$a^2 = a_0^2 + (a_n^2 - a_0^2)\frac{\delta - \delta_0}{\delta_n - \delta_0}$$

das ergiebt:

$$V = r \,.\, \operatorname{cotg}\varphi \,.\, \frac{F_0 + F_n}{2} \,.\, (\delta_n - \delta_0) = r \,.\, \operatorname{cotg}\varphi \,.\, \frac{a_0^2 + a_n^2}{2} \times \pi \,.\, (\delta_n - \delta_0)$$

Ist dagegen in einem andern Falle

$$a = a_0 + a_n - a_0)\frac{\delta - \delta_0}{\delta_n - \delta_0}$$

so erhält man:

$$V = r \cdot \operatorname{cotg}\varphi \,.\, \frac{a_0^2 + a_0 a_n + a_n^2}{3} \,.\, \pi(\delta_n - \delta_0)$$

Beispiel 3.

In Fig. 18a und 18b ist ein normaler Kegel gezeichnet, dessen kreisförmige Basis (Radius r) in die XZ-Ebene, dessen Achse in die Y-Achse fällt, und dessen Höhe h ist. Auf der X-Achse liegt ein Punkt M, für den

$$\overline{O'M} = l$$

ist; durch diesen Punkt sollen die Schnittebenen *MEF* normal zur *XY*-Ebene gelegt und dann die Inhalte der Kegelstumpfe *ABFE* als Functionen des Winkels δ graphisch dargestellt werden.

Auch diese Aufgabe kann als ein besonderer Fall des ersten Beispiels betrachtet werden; an die Stelle der Curve *M* (Fig. 16.) tritt jetzt der Punkt *M*, an die Stelle der Curve *C* die Curve *O'PD* als der geometrische Ort des Punktes P_1, welcher die Strecke *EF* halbirt, da die Ebene *MEF* den Kegel in einer Ellipse schneidet, deren grosse Achse gleich *EF* ist, deren Schwerpunkt also in P_1 liegt *).

In Figur 18b entspricht P_1'' dem Punkt P_1 in Fig. 18a; beschreibt man aus O'' einen Kreis mit dem Halbmesser *GH* und zieht dann durch P_1'' die Sehne *JK* normal zu *X*, so ist *JK* die die kleine Achse der genannten Ellipse. Bezeichnet man die beiden Halbachsen mit a und b, so dass also

$$\overline{EP_1} = \overline{FP_1} = a, \quad \overline{JP_1''} = \overline{KP_1''} = b$$

ist, so ist die Fläche *F* der Ellipse gleich $ab \cdot \pi$. Die in Fig. 16. mit r bezeichnete Länge ist jetzt null, also ist

$$\varrho = R = \overline{MP_1}$$

und demnach ist das dem Winkel $d\delta$ entsprechende Element dV des Volumens, *EFUL*, durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$dV = a \cdot b \cdot \pi \cdot \varrho \cdot d\delta = \pi \cdot a \cdot b \cdot \varrho \cdot d\delta.$$

Construirt man nun:

$$a \cdot b \cdot \varrho = \frac{K}{2} \cdot e^2 = J \cdot \frac{e^2}{2}$$

wo K eine beliebige constante Länge und e mit δ veränderlich ist, so wird

---

*) Die Curve ist eine Hyperbel der Gleichung

$$\frac{y(h-y)}{x(l-x)} = \frac{h^2}{r^2}$$

deren Asymptoten nicht etwa durch den Punkt *M*, sondern durch den Punkt Q gehen, welcher die Strecke *MD* halbirt; die Asymptoten sind parallel zu *AD* und *BD* und treten an die Stelle der Curve, wenn $l = r$ wird, also *M* mit *A* zusammenfällt.

$$V = K\pi \int_0^{\delta} \frac{e^2}{2} \cdot d\delta$$

Das Integral rechts ist ein Flächenintegral und kann durch graphische Integration gelöst werden. (Vergl. das auf Seite 226) unter 4) genannte Werk; Anhang zum Abschnitt 1)). Wenn man die Länge e abträgt nach MN, so legt der geometrische Ort von N eine Curve $O'NM$ fest, die in Fig. 18a zufällig durch den Punkt O' geht, weil

$$K = r$$

angenommen und zufällig auch

$$l = 2r$$

Das obige Integral stellt den Inhalt der Fläche des Curvenausschnitts $MO'N$ dar. Es ist demnach:

$$\text{Volumen } (ABFE) = r \cdot \pi \cdot \text{Fläche } (MO'NPM)$$

und

$$\text{Volumen } (ABD) = \frac{r^2\pi \cdot h}{3} = r \cdot \pi \cdot \text{Fläche } (MO'NSM)$$

Beispiel 4.

In Fig. 19. ist eine (gemeine Cykloide $1CB$, deren Grundkreis den Halbmesser a habe, gezeichnet, so dass also stattfindet:

$$\overline{AC} = \overline{2a}, \quad OA = \overline{AB} = \overline{a\pi}, \quad \text{Bogen } OC = \text{Bogen } CB = 4a$$

Die Curven OT_1D und DB, zwei Cykloidenhälften für denselben Halbmesser des Grundkreises, bilden die Evolute der ersten Cykloide. Letztere soll in der XY-Ebene die Spur eines zur Z-Achse parallelen Cylinders sein. In der Cylinderfläche bewegt sich der Schwerpunkt P_1 einer begrenzten ebenen Fläche F so, dass eine mit der Ebene F dieser Fläche fest verbundene Ebene beständig eine ebenfalls zur Z-Achse parallele Cylinderfläche berührt, deren Grundcurve die Evolute ist. Es sollen die Integrale aufgestellt werden für das von der Fläche F beschriebene Volumen, während der Schwerpunkt P_1 (im Grundriss) von O nach C und weiter von C nach B gelangt.

Es genügt die Betrachtung der Bewegung für die erste Cylinderhälfte; was für diese gefunden wird, gilt in umgekehrter Folge unter übrigens gleichen Umständen auch für die zweite Hälfte. Verglichen mit dem ersten Beispiel tritt jetzt die Cykloide OCB an die

Stelle der Curve C in Fig. 16. und ihre Evolute an die Stelle von M. Ein Unterschied gegen jenes Beispiel soll hier darin liegen, dass die Fläche F nicht in die Berührungsebene T_1P_1 des Evoluten-Cylinders fällt, sondern dass die Normale der Ebene F nach der früheren Bezeichnungsweise mit den Coordinatenachsen die Winkel λ, μ und ν bildet, für die Anfangslage von F.

Wird nun das Volumen für die erste Cylinderhälfte OC mit V bezeichnet, so ist nach § 7., Gleichung 17), wenn man $x-u$ und $y-v$ statt x und y schreibt:

$$dV = F_{xy} \cdot d\sigma + ((y-v)F_{ys} - (x-u)F_{xs})\,d\delta$$

Hierin bezeichnen x und y die Coordinaten eines beliebigen Punktes P_1 der Curve OC, u und v die Coordinaten des zugehörigen Krümmungsmittelpunkts T_1, für welchen der Krümmungshalbmesser

$$\overline{T_1P_1} = \varrho$$

sei, während δ der Winkel ONP_1 ist. Die Formel ist berechnet für rechtläufige Drehung $d\delta$, d. h. für eine Drehung von rechts nach links; sie gilt aber auch unverändert für die hier vorliegende rückläufige Drehung, denn mit $d\delta$ wechseln gleichzeitig F_{ys} und T_{xs} ihre Vorzeichen (vergl. § 4.).

Für die Cykloide ist nun:

die Länge der Normalen $= \overline{NP_1} = \sqrt{2ay}$

die Länge des Krümmungshalbmessers $= \overline{T_1P_1} = \varrho = 2\sqrt{2ay}$

Daraus folgt:

$$\sin\delta = \sqrt{\frac{y}{2a}}, \quad \cos\delta = \sqrt{\frac{2a-y}{2a}}, \quad d\delta = \frac{dy}{2\sqrt{2ay-y^2}}$$

$$\overline{EF} = x-u = -2\sqrt{2ay-y^2}$$

$$y-v = 2y, \text{ da } v \text{ als Ordinate negativ ist.}$$

Bezeichnet man nun weiter den Steigungswinkel der Bewegung mit η, so ist

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{d\sigma}{\varrho \cdot d\delta}$$

Ist η veränderlich, so bleibt $\operatorname{tg}\eta$ in der folgenden Entwicklung unter dem Integralzeichen. Ich will annehmen, dass η constant sei, so dass sich die Bahn des Schwerpunkts P_1 auf der abgewickelten

Cylinderfläche als eine gerade Linie darstellt; dann ist die Gesamtsteigung von O bis C, da der Bogen OC gleich $4a$ ist, gleich $4a \,.\, \operatorname{tg}\eta$.

Werden nun die verschiedenen Werte in die Gleichung für dV eingeführt, so erhält man:

$$dV = \operatorname{tg}\eta \,.\, F_{zz} \sqrt{\frac{2a}{2a-y}} \,.\, dy + F_{yz} \,.\, \sqrt{\frac{y}{2a-y}} \,.\, dy + F_{zz} \,.\, dy$$

man erkennt leicht, dass der Factor von F_{yz} gleich dx ist.

In dieser Gleichung sind nun noch die veränderlichen Projectionen von F durch F, λ, φ und durch δ, bzhw. y auszudrücken. Ist die Gleichung der Ebene von F in der Anfangslage

$$\cos\lambda \,.\, x + \cos\mu \,.\, y + \cos\nu \,.\, z - p = 0$$

so ist sie nach einer rückläufigen Drehung um den Winkel δ um eine Folge von Achsen, welche sämtlich der Z-Achse parallel sind, von folgender Form, für die der Wert von q nicht bestimmt zu werden braucht:

$$\cos\lambda(\cos\delta \,.\, x - \sin\delta \,.\, y) + \cos\mu(\cos\delta \,.\, y + \sin\delta \,.\, x) + \nu \cdot z - q = 0$$

oder:

$$(\cos\lambda\cos\delta + \cos\mu\sin\delta)x - (\cos\lambda \,.\, \sin\delta - \cos\mu \,.\, \cos\delta)y + \cos\nu \,.\, z - q = 0$$

Daraus entnimmt man:

$$F_{xy} = F \,.\, \cos\nu$$
$$F_{yz} = F(\cos\lambda \,.\, \cos\delta + \cos\mu \,.\, \sin\delta)$$
$$F_{zz} = F(-\cos\lambda \,.\, \sin\delta + \cos\mu \,.\, \cos\delta)$$

Wenn man diese Werte in dV einsetzt und reducirt und darauf zwischen den Grenzen $2n$ und O integrirt, so erhält man:

$$V = F(\cos\mu + \cos\nu \,.\, \operatorname{tg}\eta)\sqrt{2a}\int_0^{2a} \frac{dy}{\sqrt{2a-y}}$$
$$= 4F \,.\, a(\cos\mu + \cos\nu \,.\, \operatorname{tg}\eta)$$

Der Winkel λ kommt in dem Resultat nicht vor; es ist also, da

$$\cos\lambda = 1 - \cos^2\mu - \cos^2\nu$$

das Vorzeichen von λ die Grösse des beschriebenen Volumens ohne Einfluss. Da die wälzende Ebene T_1P_1 in ihrer Anfangslage mit

der XZ-Ebene zusammenfällt und demnach mit der fest mit ihr verbundenen Ebene T einen constanten Winkel μ bildet, so hätte man mit Benutzung des allgemeinen Satzes in § 6., Seite 346 (Gleichung 15) dieses Resultat ohne Weiteres niederschreiben können. Nach diesem Satze ist nämlich das bei der Drehung (ohne Steigung) beschriebene Volumen gleich $F\cos\mu \int \varrho \,.\, d\delta$

Wäre die Fläche F an Grösse nicht constant, sondern veränderlich, z. B. so, dass aus dem Anfangswert $F \,.\, \sqrt{1-\frac{y^2}{4a^2}}$ für $y = y$ hervorginge, so würde der veränderliche Factor $\sqrt{1-\frac{y^2}{4a^2}}$ noch mit unter das Integralzeichen zu bringen sein. Man würde in diesem Falle erhalten:

$$V = F(\cos\mu + \cos\nu \,.\, \operatorname{tg}\eta)\frac{1}{\sqrt{2a}}\int_0^{2n}\sqrt{2a+y}\,.\,dy$$

$$= \frac{4(\sqrt{8}-1)}{3}Fa(\cos\mu + \nu \,.\, \operatorname{tg}\eta)$$

Wenn F beständig seiner Anfangslage parallel bleibt, im übrigen aber dieselbe Bewegung ausführt, so kann man sich diese rein fortschreitende Bewegung rückwärts aus der bisher betrachteten zusammengesetzten Schraubenbewegung dadurch abgeleitet denken, dass F mit der wälzenden Ebene T_1P_1 nicht fest, sondern drehbar verbunden ist, und zwar drehbar um eine zur Z Achse parallele Achse, welche durch den Schwerpunkt P_1 geht. Dreht man F jedes Mal nach der Drehung $d\delta$ um die augenblickliche Drehachse T_1, um jene zweite Achse um denselben Winkel $d\delta$ zurück, so wird bei dieser zweiten Drehung algebraisch ein Volumen null beschrieben, da ihre Achse eben durch den Schwerpunkt geht. Die beiden Drehungen bilden zusammen ein Drehungspaar, welches nach Seite 259 und 262 die Wirkung einer rein fortschreitenden Bewegung von der Grösse $\varrho \,.\, d\delta$ hat. Die für dV entwickelte Formel gilt in diesem Falle unverändert; da aber F der ursprünglichen Lage parallel bleibt, so sind die unveränderlichen F die Projectionen von F constant und können bei der Integration vor die Integralzeichen gesetzt werden. Da

$$F_{yz} = F \,.\, \cos\lambda, \quad F_{xz} = F \,.\, \cos\mu, \quad F_{xy} = F \,.\, \cos\nu$$

so erhält man

$$V = F\Big\{\cos\lambda \int_0^{2a} \sqrt{\frac{y}{2a-y}}\,.\,dy + \cos\mu \int_0^{2a} dy$$

$$+ \cos\nu\,.\,\operatorname{tg}\eta \int_0^{2a} \sqrt{\frac{2a}{2a-y}}\,dy\Big\}$$

$$= Fa\{\pi\,.\,\cos\lambda + 2\cos\mu + 4\operatorname{tg}\eta\,.\,\cos\nu\}$$

Man hätte diesen Wert auch einfach in der Weise ermitteln können, dass man den Schwerpunkt von F erst durch die Strecke

$$\overline{OA} = a\pi$$

dann durch die Strecke

$$\overline{AC} = 2a$$

und endlich in der zur Z-Achse parallelen Cylinderseite C durch die ganze Steigung $4a\,.\,\operatorname{tg}\eta$ führt.

Ist F veränderlich, so hat man auch in diesem letzten Falle den veränderlichen Factor, ebenso wie es oben angedeutet wurde, unter die Integralzeichen zu bringen.

Februar 1889. (Eingesandt Januar 1894.)

Inhalt.

		Seite
	Einleitung	225
§ 1.	Volumen des schief abgeschnittenen Cylinders	227
§ 2.	Die Guldin'schen Regeln	229
§ 3.	Ergänzung in Bezug auf Volumen und Oberfläche des schief abgeschnittenen Cylinders	232
§ 4.	Allgemeine Betrachtungen. (Lage des Coordinatensystems und Richtung der positiven und negativen Drehung. Lage, Richtung und Projection von Linien und Flächen. Vorzeichen der durch die Bewegung von Linien und Flächen beschriebenen Flächen- und Raumgrössen, Allgemeine Resultate in Bezug auf die Grösse der letzteren für parallele Verschiebungen und für Drehbewegungen. Zusammensetzung und Zerlegung von Parallelverschiebungen und Drehungen,)	235
§ 5.	Parallelverschiebung einer begrenzten Fläche	337
§ 6.	Drehung einer begrenzten Fläche um eine Achse	340
§ 7.	Cylindrische Schraubenbewegung einer begrenzten Fläche	365
§ 8.	Parallelverschiebung einer begrenzten Curve	372
§ 9.	Drehung einer begrenzten Curve um eine feste Achse	375
§ 10.	Beispiele zu den §§ 4—7	378—386

XXI.

Mathematisch-Geschichtliches aus dem Codex latinus Monacensis No. 14908[1]).

Herausgegeben durch
M. Curtze in Thorn.

Aus dieser Handschrift hat zuerst *Gerhardt* eine Algebra in deutscher Sprache aus dem Jahre 1461 veröffentlicht.[2]) Ich will mir erlauben einige andere Stücke arithmetischen Inhalts, ebenfalls in deutscher Sprache, hier zum Druck zu bringen, mir vorbehaltend, weitere Stücke von eben solchem Interesse hier oder anderweitig folgen zu lassen.

I.

Clm. 14908, Blt. 32'—34.

| Ain yede zal ist gelich ader vngelich, vnd was gelich ist, 32'
daz ist glich glich als alle zal, dye gewachsen ist mit dup-
lieren an ainnem anzufahn alz: 2, 4, 8, 16, 32, 64 *etcetera*,

1) Der fragliche Codex ist ein Band in klein Oktav von 504 Bltt., von welchen etwa die Hälfte mit arithmetischen, die andere Hälfte mit geometrischen Abhandlungen gefüllt ist. Der hauptsächlichste Schreiber war ein *Frater Fridericus ord. S. Benedicti professus Monasterii S. Emerami Ratisb. diocesis.* Auch die unten veröffentlichten Stücke sind von seiner Hand.

2) Gerhardt in den Monatsberichten der Berliner Akademie 1870, S. 141—143. —

3. gerade oder ungerade (*par* oder *impar*). —

wann es gat mit glichen ausz vnz auf ainsz; oder glich vnglich alz alle zal, dye von vngelicher duplierer zal erwachsen ist alz: 6, 10, 14, 18, 22, 26 vnd des glychen, wann alz bald sye ain mal getailt wirt, so ist sye nit mer zetailen in tzwe; oder vnglych glych alz alle zal dye sich taylen lat in glych tail, aber nit ze end ausz alz 24 lat sich taylen in 2 mal 12, vnd 12 in 2 mal 6, aber 6 lat "nit„ sich taylen dann in vnglich tail, daz ist 3 vnd 3, dye paid vnglich sind, vnd wachsen ausz glych glych zal, wann ainer in den andern multipliciert wirt, als da stat:

3	5	7	9	11	13
4	8	16	32	64	128
12	40	112	288	704	1664

oder der erst vngelich in der gelychen ainen vnder im, welchen man wil, also auch mit den andern.

Dye vngelich zal ist auch dreyerlay. dye erst ist vngesamelt ausz ander zal, alz *sine regula*, wann kain ander zal | erzelt dye zal, alz: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 28, 29, 31, 37. Aber dye ander vngelich zal ist gesamelt ausz ander zal, alz: 9, 15, 21, 27; alz 9 kommet ausz 3 mal 3 vnd 15 ausz 3 mal 5.

Ausz der zal finstu, daz dye gesamelt ist ausz der ersten vnglychen zal, vnd sameln sich selb nit, darumb, wann man 25 scheezt gen 9 oder gen 15 oder 21, so wer sie vngesamelt. Daz ist der drit tail der vnglychen zal.

Von den glychen zal sind etlich gancz gerecht, etlich gebrechend, etlich vberflussig. Die vberflussig, alz 12, 24; wann 12 hat $\frac{1}{2}$ 6, vnd $\frac{1}{3}$ 4, vnd $\frac{1}{4}$ 3, vnd $\frac{1}{6}$ 2, vnd $\frac{1}{12}$ 1, daz macht 16, daz ist 4 zevil. Aber dye gebrechent 8, 14; wann 8 hat $\frac{1}{2}$ 4, vnd $\frac{1}{4}$ 2, vnd $\frac{1}{8}$ 1, daz macht 7, vnd gebricht ains.

4. *par par.* — 6—7 *par impar.* — 10. *impar par.* — 22—23. vngesamelt = Primzahl — 24. gesamelt = zusammengesetzte Zahl. — 27—30. Relative Primzahlen.

Zwichsen den czwayen vnmassen findet man daz **gancz** gerecht, daz nit zevil noch zewenig, hat alz 6, 28; **wann** $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ von 6 ist 3, 2, 1, dye machen eben 6; von 28 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{14}, \frac{1}{28}$ 14, 7, 4, 2, 1, dye machen dan 28. **darumb** wirt dye zal *perfectus numerus* gehayssen, vnd sind **wenig** zwichsen ainem vnd 10 ist aine 6, | von 6 zw 100 auch aine **28**, 33 zwischen 1000 auch aine 496, zw 10000 auch aine 8128. Wiltu aber finden, wye dye werden, so secz all glych glyche zal alz vil du wilt, an ainem anzefahen also

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128

tue dye ersten zw der andern, daz macht 3, vnd multiplizir in dye lesten gesamelte zal, daz ist 2, vnd 2 mal 3 ist 6, daz ist dye erst gancz gerechte zal. Darnach samel 1, 2, 4, daz macht 7, multiplicir daz in dye lesczt sumirte zal, daz ist 4 mal 7 ist 28, daz ist dye ander perfecte zal. Wer aber, daz et wann ausz dem sumeren ain zal keme, dye nit *sine regula*, daz ist *primus* vnd *incompositus* were, so behalt dye sum vnd gang furbas, alz 1, 2, 4, 8 macht 15, dye 15 sind nit *sine regula*, darumb sumir dar czw 16, daz macht 31, daz ist *sine regula*, dye multiplicir in 16, so kumpt 496 dye drit gerecht zal; also tue furbas nit den andern glych-glychen zalen, so finstu all gerecht zal &c". 34′

primus numerus perfectus.	*secundus perfectus.*	*tercius perfectus*
6	20	496
3	14	248
2	7	124
1	4	62
	2	31
	1	16
		8
		4
		2
		1

Quartus numerus perfectus.	*5us num. perf.*
8128	33550336
4064	16775168
2032	8387584

Quartus numerus perfectus.	*5us num. perf.*
1016	4193792
508	2096896
254	1048448
127	524224
64	262112
32	131056
16	65528
8	32764
4	16382
2	8191
1	4096
	2048
	1024
	512
	256
	128
	64
	32
	16
	8
	4
	2
	1

Es ist auch eine lateinische Bearbeitung desselben oder ähnlichen Inhaltes in dem Bande vorhanden[3]). In dieser hat der Verfasser als fünfte und sechste vollkommene Zahl 130916 und 2096128 angegeben, welche bekanntlich keine solchen sind, da weder 511 noch 2047 Primzahlen darstellen. Erstere ist 7.73, letztere 23.89. Unser Autor hat richtig als fünfte vollkommene Zahl 33550336 gefunden.

II.

Clm. 14908. Blt. 124′—127.

124′ | Diuinare.

Item ich wil wissen, wie vil pfenning in dem peutel

3) Blt. 201′—205′: *Diffiniciones numerorum.* Die betreffende Stelle heisst: *Cum numeri ab vnitate continue dupli ad inuicem coaceruati constituant numerum primum, tunc iste numerus primus ductus per multiplicationem in duplum extremum constituit numerum perfectum. Exemplum*: 1, 2, 4 *faciunt* 7, *qui est numerus primus, duc ergo* 7 *in* 4 *et resultant* 28, *qui est numerus perfectus.*

oder im synn hast. Machs also: hays yn dy dn, dy er hat, zelen mit 3, darnach *cum 5, postea cum 7*, vnd alz oft eins vber pleibt mit 3, so merk 70, vnd alz oft 1 vber pleibt mit 5, merk 21, vnd mit 7 merk 15.

Postea adde illos numeros in simul et ab ista summa subtrahe radicem, hoc est, multipliva 3 per 5 et 7, erit 105, alz oft du magst, vnd wz do pleibt, alz vil hat er ym sinn oder in peutel. Item das exempel get nit hoher den alz verr dy radix wirt, daz ist auf 105, vnd man sol dar vber nit nemen.

Du fragst, warumb nymbt man 70 auf 3 vnd 21 auf 5 etc^{a}. Also mags. wildu haben dy zal auf 3, so multiplicir 5 per 7, vnd was kompt, daz dividir per 3, vnd *manet* 1 vber, so ist dy selb zal recht; pleibt aber mer vber dann 1, so duplir dy selben zal, vnd darnach dividir mit 3, vnd pleibt dan aber mer vber dann 1, so addir dyselben zal. 125
daz thu alz lang, bis 1 vber pleibt. Desglichen wiltu haben | dy zal auf 5, so multiplicir 3 per 7, wirt 21, daz dividir per 5, so pleibt 1 vber, dar vmb ist 21 recht auf 5; vnd wildu dy zal haben auf 7, *multiplica 3 per 5, erit 15; illud diuide per 7, manet in residuo 1, ideo 15 est verus numerus super 5*, dezglichen dy andern.

70	21	15	15	10	6	40	45	36
3	5	7	2	3	5	3	4	5
	105			30			60	
28	21	36	21	28	36	63	36	28
3	4	7	2	3	7	2	7	9
	84			42			126	
128	175	120	216	225	280	1144	936	1782
5	6	7	5	8	9	9	11	13
	210			360			1287	

Von dreyen dingen.

Item 3 gesellen haben 3 ding. Nu wiltu wissen, welcher daz oder daz hab. So gib ainem ding dy zal 1, vnd dem andern 2, dem dritten 3 | darnach sprich zw it ainem, 125′
czu welchen du wild: duplir dy zal deines dings, vnd der merck gar wol. darnach sprich zu dem andern: multiplicir

Si sequentem queris, fac similiter: 1, 2, 4. 8, 16 faciunt 31, qui est numerus primus; duc ergo 31 in 16, et resultant 496, qui est numerus perfectus. Sequens est 8128, sequens est 130816, sequens est 2096128, et deinceps per eandem artem tot reperientur, quantum placuerit. (202, 13—23).

dy zal deins dings mit 9, den merck auch. darnach sprich zw dem driten: multiplizir dy zal deins dings mit 10. darnach haysz dy drei sumen zesam thun, vnd waz dann komen ist, daz subtrahir ab 60, vnd waz do pleibt, daz merk vnd lueg, wie oft du 8 dauon mugst subtrahiren, vnd magstu 1 mal, so hat der, der sein hat duplirt, daz ding, dem du 1 hast geben; magstu aber zwir, so hat er daz ding, dem du 2 hast geben, dezgleichen mit 3. vnd waz dann pleibt, wenn du 8 dauon zeuchst, daz mustu auch merken. wann pleibt 1 vber, so hat der, der sein ding mit 9 multiplicirt, daz ding mit 1; pleibt 2, so hat er daz ding mit 2, dez gleichen mit 3, vnd wenn man dy czwen waysz, so ist der dritt
126 auch bekannt. |

Item nym dir ein zal fur, wie vil du wild, so wil ichsz wissen. Sprich also zu ym: duplir dy zal, darnach haysz yn addiren 5, darnach haysz in multiplicirn mit 5, darnach haysz yn addiren 10, darnach multiplicirs mit 10, vnd wenn nu daz geschehen ist vnd gemacht ist, so nym von der ganczen zal 350, vnd waz vbrig pleibt, daz tail in 100, so kumpt dy summa.

350 { duplir — zal; Addir. \ Multipl. / 5; addir. \ multipl. / 10 }

Du fragst, war vmb sol man die zall 350 subtrahiren vnd kayne andre nit. wiltu daz wissen, so nym dy clainsten zal fur dich, daz ist 1. Nu duplir, vnd machs nach der regel, so kumpt 450. Nu zeuch von der zal ein zal, daz denn noch 100 pleibt, daz ist 350, *et ideo.*

Wurfel.

Nota des gleichen, wenn ir 3 mit einem wurfel werfen, vnd wild wissen, wie vil ydlicher hat geworffen, sprich zu dem ersten: duplir dy zal deiner augen, dy du geworffen hast: darnach haysz yn addiren 5 vnd multiplicirn mit 5. darnach sprich zw dem andern, daz er addir sein augen, darnach haysz multiplicirn mit 10. darnach sprich zw dem driten, daz er | addir auch sein augen. Darnach nym von der summ 350, vnd waz do pleibt an der ersten stat an der linken hannt, daz hat der erst geworffen.

[illegible] nays yr dy dn. [illegible]
[illegible] vnd [illegible]
[illegible] vnd alz oft 1 [illegible]
[illegible] 15.

[illegible] ab ista [illegible]
[illegible] per 5 et 7, erit 1[illegible]
[illegible] ar vil hat er ym
[illegible] ge nit hoher den a[illegible]
[illegible] vnd man sol dar vber [illegible]

[illegible] man 70 auf 3
[illegible] haben dy zal auf 3, so
[illegible] per 7. vnd was kompt daz dividir per 3, v[illegible]
[illegible] vber. so ist dy selb zal recht: pleibt aber mer
1, so duplir dy selben zal. vnd darnach dividir
pleibt dan aber mer vber dann 1, so addir dy
daz thu alz lang, bis 1 vber pleibt. Desglichen wi[illegible]
dy zal auf 5, so multiplicir 3 per 7, wirt 21, [illegible]
per 5, so pleibt 1 vber, dar vmb ist 21 recht [illegible]
wildu dy zal haben auf 7, *multiplica 3 per 5, e[illegible]*
divide per 7, manet in residuo 1, ideo 15 est [illegible]
super 5, dezglichen dy andern.

70	21	15	15	10	6	40	45
3	5	7	2	3	5	3	4
	105			30			60
28	21	36	21	28	36	63	36
3	4	7	2	3	7	2	7
	84			42			126
12[illegible]	175	120	216	225	280	1144	936
5	6	7	5	8	9	9	11
	210			360			1287

Von dreyen dingen.

Item 3 gesellen haben 3 ding. Nu wiltu
[illegible] dar oder daz hab. So gib ainem ding dy
[illegible] dem dritten 3 | darnach sprich z[illegible]
[illegible] duplir dy zal deines di[illegible]
[illegible] darnach sprich zu dem andern:

[illegible] *1. 2. 4. 8, 16 faciunt* [illegible]
[illegible] *qui est numerus* [illegible]
[illegible] *sequens est 2096128, et d*[illegible]
[illegible] *placuerit.* (202, 13—23).

Mathema
la

Aus diese
deutscher Spra
mir erlauben e
in deutscher S
weitere Stücke
folgen zu lasse

| Ain ye
daz ist gl
lieren an

1) Der frag
welchen etwa di
schen Abhandl
Frater Fridericu
diocesis. Auch

2) Gerha
S. 141—143. —

3. gerade o

[illegible] dings mit 2, den merck auch [illegible]
[illegible] multiplicir dy zal dines dings [illegible]
[illegible] dy drei samen zesam thun, vnd [illegible]
[illegible] subtrahir ab 60, vnd was du pleibt, [illegible]
[illegible] oft du 8 dauen magst subtrahiren [illegible]
[illegible] hat der; der sein hat duplirt, das ding [illegible]
[illegible] magstu aber zwir, so hat er das ding [illegible]
[illegible] dingleichen mit 3, vnd was dann pleibt, [illegible]
[illegible] auch, das mustu auch merken. [illegible]
[illegible] hat der, der sein ding mit 9 multiplicirt, [illegible]
[illegible] pleibt 2, so hat er das ding mit 2, [illegible]
[illegible] vnd wenn man dy czwen wayss, so ist [illegible]
[illegible]

[illegible] dir ein zal fur, wie vil du wild, so wil [illegible]
[illegible] zu ym: duplir dy zal, darnach hayss yn
[illegible] darnach hayss in multiplicirn mit 5, darnach
[illegible] 10, darnach multiplicirs mit 10, vnd wenn
[illegible] ist vnd gemacht ist, so nym von der
[illegible], vnd was vbrig pleibt, das tail in 100, so
[illegible]

250	duplir — zal	
	Addir. / Multipl.	5
	addir. / multipl.	10

[illegible] vnd sol man die zall [illegible]
[illegible] wiltu das wissen, so nym [illegible]
[illegible] das ist 1. Nu duplir [illegible]
[illegible] 450. Nu [illegible]
[illegible] 200 pleibt, das ist [illegible]

Waris

[illegible]

ein
[illegible] 20
[illegible] di-

der
di-
di- 25
dy
[illegible]

30

selb
35
zw
11,
40
Adde
[illegible]tatem

[illegible] duplir

[illegible] dritte *12a*, der
[illegible]sagen: „so *nym*
[illegible]at er wieder eine

[illegible]hen Reihe stets

erit 39; nunc multiplica 39 cum 5, erit 195; adde 10, erit 205; illa multiplica cum 10,' facit 2050. Nu merck' sein regel, *et est 350,* dy zeuch ab von der sum, vnd waz vber pleibt, daz tail in 100, *et sic factum est. Et idem est, cum vis scire, quod vnus iaceret cum tribus taxillis.*

Auch hier ist keine Spur einer Begründung des Verfahrens vorhanden, die unser Verfasser in ganz angemessener Weise liefert, Alle diese Spielereien sind bekannt, aber alle erst aus dem 16. Jahrhundert, während unsere Handschrift in den Jahren 1456 bis 1464 geschrieben ist.

III.

Clm. 14908. Blt. 28'—29' und 39.

| Multipliciren. 28'

Item multiplicir 10 in ein ander zal, daz ausz in allen paiden 3 komen. Secz also $\frac{10}{1}\ \frac{3}{10}$. Nu multiplicir $\frac{10}{1}$ mit $\frac{3}{10}$, komen 3, also wenn ich 10 ganze multiplicir in $\frac{3}{10}$, so komen 3 ganze vnd nit mer. Wann man prüch multiplicirt, so nemen sy ab.

Diuidiren.

Item tail 10 in 2 tail, also wenn ich den grosseren durch den clayneren tail, daz 7 komen im quocient, ader 30, wie man wil Machs also. wildu haben 7, so addir albeg 1 darczu, wirt 8. Secz

$$8-10<\begin{matrix}1-1\frac{1}{4}\\7-8\frac{3}{4}\end{matrix}$$

Nota tail $2\frac{1}{2}$ in 2 tail, also wenn ich den grosseren tail durch den claineren tail diuidir, daz $3\frac{1}{3}$ komen Mach nach der yeczigen regel, so wirt der clainer tail $\frac{15}{26}$, der grosser $\frac{50}{26}$

Item tail 15 in 4 vnd 3, daz albeg der ein quocient

18—23. Das heisst natürlich, es soll 15 im Verhältnis von 4 : 3 geteilt werden. $2\frac{1}{2}$ ist dann der Proportionalitätsfactor. Es gehört die Aufgabe also wirklich zur Gesellschaftsrechnung.

kumb. Machs also: addir 4 et 3, erit 7. Nu machs alz ein ander gesellschaft. 7 *dant* 15 *quid* 4? *Facit* $8\frac{4}{7}$. *Iterum* 7 *dant* 15 *quid* 3? *Facit* $6\frac{3}{7}$. *Nunc diuide* $8\frac{4}{7}$ *per* 4, *facit* $2\frac{1}{7}$, *eciam diuide* $6\frac{3}{7}$ *per* 3, *facit* $2\frac{1}{7}$, *eadem quociens.*

Nota tail 5 in 4 tail, wenn ich daz erst in daz ander
29 diuidir, daz 3 | komen, vnd wenn ich daz ander in daz 3 diuidir, daz 4 komen, vnd wenn ich daz drit in das vierd diuidir, das 5 komen. Wildu daz wissen, so nym fur dich dy zal in der proporcion, alz mans nennt, vnd addirs, *facit* 76, *est diuisor.*

$$76-5\left\{\begin{array}{l} 1-\frac{15}{76} \\ 3-\frac{15}{76} \\ 12-\frac{60}{76} \\ 60-3\frac{72}{76} \end{array}\right.$$

Progressio.

Addir albeg zesam daz erst vnd daz leczt, vnd daz selb multiplicir mit dem halben der zal der posicionum.

Exemplum. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Addir 1 zw 10, wirt 11; daz multiplicir mit 5, facit 55.

Item 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Addir 1 ad 11, erit 12: multiplica per $5\frac{1}{2}$, facit 66.

Nota. 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 faciunt 63.

Item in fractis. $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$. Adde primum et vltimum, facit 8; multiplica per [illegible] istius numeri, hoc est 4, facit 32.

Item wiltu wissen dy zal der [illegible]

24—30. Ist der erste [illegible] vierte 6ten sein: [illegible] fur dich dy zal in der [illegible] Gesellschaftsrechnung.

35—46. [illegible] die Formel

$$[illegible]$$

auch wenn [illegible] Zahl [illegible]

47. [illegible]

III. Ain rotund hat ain dyameter 14 ellen lang. Sag, wye weyt ist es vmb vnd vmb, vnd wie vil hat es quaderelen? Machs also: multiplicir 14 durch $3\frac{1}{7}$, so kompt 44, so vil hat es vmb vnd vmb. Darnacht multiplicir 14 mal 44, macht 616; zuch dar von $\frac{3}{4}$, daz vbrig sind quaderelen des rotund.

IV. Ain bom ist 40 schůch hoch; der stat bei aynem wasser, daz ist von dem bom 30 schuh brait vber das wasser. Sag, wye weyt ist von dem gipfel des bomes vber das wasser an die erd? Machs also: multiplicir den bom in sich selb, ist 40 mal 40, macht | 1600, vnd das wasser 94
in sich selb, 30 mal 30 ist 900. tue zesamen 1600 vnd 900, ist 2500. Sůch radicem darvon, daz ist 50; so weyt ist von dem Gipfel hin vber.

V. Ain laiter ist hoch 50 ellen, vnd lainet an ainem turn, der auch 50 ellen hoch ist. Mann ruket sie vnden herdan von dem turn, dz sye 30 ellen vnden von dem turm stat. Sag, wye weyt ist dye laitern oben herab gerukt? Machs also: dye laiter multiplicir in sich selb, dz ist 50 mal 50, macht 2500. Multiplicir dye vnter weyte in sich selb, 30 mal 30 macht 900; zuech ab denselben quadrat von 2500, dennocht belybt 1600. Sůch dy wurcz von 1600, daz ist 40, so hoch lainet dye laiter an dem turn. Nun ist der turn 50 ellen hoch, daz ist ain zaichen, daz dye laiter oben abher nit mer dann 10 elen geruckt ist. also ist es in allen andern gelichen dingen. 94'

VI. Ain burg ist vm mauret. vmb die gat ain grab, der ist ausen vmb 2200 vmb vnd vmb, vnd von der mauren der burg ist 35 elen vber den graben; dye mauer ist dick $3\frac{1}{2}$ elen. Sag, wye weyt ist dye mauer? Machs also: tail 2200 in $3\frac{1}{7}$, daz macht 700. So weyt ist der dyameter des graben vber vnd vber dich (!) burg. Von dem dyameter zůch ab dye weyte dez graben zwemal, daz ist 2 mal 35, macht 70, vnd belybt 630. daz multiplicir wider durch $3\frac{1}{7}$, daz macht 1980, so weyt ist dye mur vmb vnd vmb. Woltest aber wyssen, wye weyt dye maur in wendig were vmb vnd vmb, so duplir dye dycke der maur, daz ist 2 mal $3\frac{1}{2}$, macht 7. daz multiplicir durch $3\frac{1}{7}$, so kumpt 22, dye zuch ab von der aussen weyten der mauren, daz waz 1980, darnacht belybt 1958: so weyt ist inwendig dye maur. Also tue auch in allen andern dez gelychen. | (Fig. 3.) 95

VII. Der ain turn ist 60 elen hoch, der ander 50,
e sind 100 elen weyt von ain ander. auf yedem siczt
falk, vnd vehen zemal an zu phligen zw dem luder,
l fluegt ainer so bald alz der ander. Sag, wo leyt daz
er? Multiplicir dye hoch ytlichsz turns in sich selb; 60
l 60 ist 3600, vnd 50 mal 50 ist 2500; zuch dye min-
n von den meren, bleybt 1100. duplir dy weyte der
en, daz macht 200, dann tail 1100 in 200, so kumpt
dann tail dye weyt der turnen in 2, so kumpt 50;
en turn zuch ab $5\frac{1}{2}$ des höhern turnsz vnd gib es dem
rn turen, so kompt dem nidern $55\frac{1}{2}$, vnd belybt dem
rn $44\frac{1}{2}$, do leyt daz luder so weyt von yeden turn.
u es pròbirn, so multiplicir die höhe itlichsz turnes in
selb, alz 60 mal 60 ist 3600, tue darzw dye multiplicirt
n desz luders, daz ist $44\frac{1}{2}$ mal $44\frac{1}{2}$, so kompt $1980\frac{1}{4}$,
macht alles $5580\frac{1}{4}$. Such radicem dar von, vnd waz
umpt, daz ist dye weyte von dem luder vncz an dye
des 60 eligen turnes. Also tue och dem andern
so kumpt dye vorig zal, vnd wirt recht. [Crastine
anie.] (Fig. 4.)

VIII. Such zwo zal, vnd zuch von yeder $\frac{1}{3}$ vnd $\frac{1}{4}$, vnd
plicir, waz ir ieder belibt, in sich selb, vnd waz ausz
aiden komme, daz tue zesamen, daz es mach 169.
die wurcz von 169, daz ist 13. Nu multiplicir dye
in sich selb $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ also: 1 mal 3 ist 3, vnd 1 mal 4 ist
e zesamen, macht 7. Sůch dy wurcz von 25, ist 5.
nun aber dye 3, vnd multiplicircz durch dy wurcz
ersten zal: 3 mal 13 macht 39, daz tail durch die
z der andern zal, dz ist 5, so kumpt dir $7\frac{4}{5}$, daz ist
ain zal. Nun multiplicir dy 4 auch durch dy ersten
z, dz ist 4 mal 13 macht 52, daz tail durch dy wurcz
ndern zal, dz ist durch 5, so kumpt $10\frac{2}{5}$, daz ist dy
r zal. Nun multiplicir $7\frac{4}{5}$ in sich selb, vnd $10\frac{2}{5}$ auch
ch selb, so kumpt zesamen 169. Dann sůch ein zal,
du $\frac{1}{3}$ vnd $\frac{1}{4}$ dar von zuhest, dz $7\frac{4}{5}$ belyb, vnd ain
re, daz $10\frac{2}{5}$ belib | daz sind dye zwo ersten zal, dy man
n sol.

I—VI brauchen wohl kaum einer weiteren Erläuterung.
r. VII der Ort des Luders bei c, die Höhe des einen Tur-
., die des andern $= b$, die Entfernung der beiden Türme
sei die Entfernung des c von dem ersten Turme $= \frac{m}{2} - x$,

also die von dem zweiten $=\frac{m}{2}+x$. Dann muss nach der Aufgabe sein

$$a^2+\left(\frac{m}{2}-x\right)^2=b^2+\left(\frac{m}{2}+x\right)^2,$$

woraus

$$x=\frac{a^2-b^2}{2c}$$

folgt. So rechnet aber unser Verfasser.

Aufgabe VIII verlangt dem Wesen nach die Zahl 169 in zwei Quadrate zu zerlegen, ist also eine unbestimmte Aufgabe. Unser Verfasser löst sie derart, dass er die Identität

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1,$$

welche aus dem bekannten Pythagoräischen Dreiecke 3, 4, 5 unmittelbar folgt, mit 169 vervielfacht. Dadurch erhält er die beiden Zahlen $7\frac{1}{5}$ und $10\frac{2}{5}$. Die eigentlichen gesuchten Zahlen sind dann $18\frac{18}{25}$ und $24\frac{24}{25}$.

Während bei dieser Aufgabe davon keine Rede ist, dass es eine unendliche Zahl von Lösungen geben muss, ist dies der Fall bei einer andern Aufgabe, die füglich als eine Verallgemeinerung der *ta yen* Aufgabe betrachtet werden könnte, welche ich nebst einigen andern unbestimmten Aufgaben, die der sogenannten *regula virginum* angehören als Schluss dieser vielleicht schon etwas zu ausgedehnten Mitteilung hersetzen will.

V.

Clm. 14904, Blt. 152′—153; Blt. 86′—87.

I. Nota. Quidam dominus dives habet 4 bursas denariorum, in unaquaque tantum, quantum in alia de denariis, quos vult distribuere in viam elemosine (!) quatuor ordinibus, scilicet czeylen (!) pauperum. In primo ordine pauperum sunt 43 pauperes; in secundo sunt 39 pauperes; in tercio sunt 35 pauperes; in quarto sunt 31 pauperes. Primam bursam distribuit equaliter primo ordini, in fine tamen remanent sibi 41 ita, quod ad complendum ordinem deficiunt sibi 2 denarii. Secundam bursam distribuit equa-

liter secundo ordini, in fine tamen non potest complere, sed habet in residuo 33, sicque ad complendum ordinem deficiunt ei 6 denarii. Terciam bursam distribuit equaliter tercio ordini, in fine tamen remanent sibi 25, sicque ad complendum ordinem deficiunt ei 10 denarii. Quartam bursam distribuit quarto ordini equaliter in fine tamen est residuum 17 denariorum sicque in 14 denarii deficiunt ad complendum ordinem. Queritur nunc, quot fuerunt denarii in vna bursa.

In summa quaestio habet hoc: Invenias unum numerum, qui, dum diuiditur per 43, post integra quocientis manent in residuo 41; iterum, dum dividitur per 39, manent in residuo 33; iterum, dum dividitur per 35, manent in
153 residuo 25; iterum, dum dividitur per 31, in residuo manet 17. *Licet autem non sit solum vnus numerus, qui talis est verum infiniti sunt signabiles.* 5458590.

85′$_{8}$ II. Item. 100 haup viech vmb 100 fl, ochsen, kue vnd schaf, ye 1 ochsen vmb 10 fl, 1 kue vmb 5 fl, 1 schaf vmb $\frac{1}{2}$ fl. Queritur, wie uil sein der ochsen, kue vnd schaf? Responditur: 1 ochsz, 9 kue vnd 90 schaf.

III. Item. 20 haup vichs vmb 20 fl, ochsen, schaf vnd gaysz, ye 1 ochsen vmb 3 fl, 1 schaf vmb $1\frac{1}{2}$ fl vnd 1 gaysz vmb $\frac{1}{2}$ fl. Queritur ꝛc? Responditur: 2 ochsen, 5 schaf, 13 gaysz.

IV. Nota. 12 personen, Ritter, Knecht vnd Junckfraw, sollen tailen 12 proteynen ritter 2 prot, 1 Knecht $\frac{1}{4}$, einer Junckfraw $\frac{1}{2}$ tail. Queritur wie vil ꝛc? Responditur: 1 Junckfraw, 6 knecht vnd 5 ritter.

V. Item 12 menschen Ritter, pfaffen, knecht vnd Junckfraw sollen tailen 12 ℔n. der ritter sol haben 2
86 der pfaf 1 ℔, der knecht $\frac{1}{4}$, dy Junckfraw 1 haller. Responditur, 4 ritter, 2 pfafen, 2 Junckfraw, 4 kneeht.

VI. Item 30 person sol tailen 30 meczen. der man nymbt 3 meczen, dy fraw 2, daz kind $\frac{1}{2}$. Queritur ꝛc? Responditur: 3 man, 5 fraw, 22 kinder.

VII. Item 100 person *ut supra.* Responditur: 6 man, 30 fraw, 64 kind.

VIII. Item 90 person ut supra. Der man sol haben 3, dy fraw 2, daz kind $\frac{1}{2}$. Responditur: 6 man, 20 fraw, 64 kinder.

IX. Item. 100 viech pro 100 fl, ye 1 pferd pro 3 fl, 1 ochsen pro 1 fl, 24, 1 schaf pro 1 fl. Queritur ꝛc? Responditur: 23 pferd, 29 ochsen, 48 schaff.

X. Item 4 stain sullen wegen all gewicht vnz auf 40. Queritur wie uil ydlicher stain hab ain gewicht. Responditur. Der erst hat 1 ℔, der ander 3 der drit 9, der vierd 27. ꝛc^{a}. Multiplicir mit 3.

Dass Nr. I. als die *ta yen* Regel auf 4 Bedingungen ausgedehnt angesehen werden kann, ist klar. Die Zahl

$$5458590$$

ist die drittkleinste Zahl, welche den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Es ist

$$\begin{aligned} 5458590 &= 43 \cdot 126943 + 41 \\ &= 39 \cdot 139963 + 33 \\ &= 35 \cdot 155959 + 25 \\ &= 31 \cdot 176083 + 17 \end{aligned}$$

Nach der *Ta yen* Regel würde so zu rechnen sein: Für 1 durch 43 gewonnen setze 1227135, für 1 durch 39 gewonnen setze 1492960, für 1 durch 35 gewonnen setze 155961, für 1 durch 31 gewonnen setze 763035, addire alles und dividire die Summe durch 1819545, so erhältst du als Rest der Division die gesuchte Zahl.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } & 41 \cdot 1227135 = 50312535 \\ & 33 \cdot 1492960 = 49267680 \\ & 25 \cdot 155961 = 3899025 \\ & 17 \cdot 763935 = 12971595 \\ & \qquad\qquad\quad 116450835 \end{aligned}$$

$$\text{Es ist aber } 61 \cdot 1819445 = 110992245$$

$$\text{also ist die gesuchte Zahl} = 5458590$$

wie unser Autor sie angegeben hat, und allgemein jede Zahl von der Form

$$1819^{545}n + 5458590.$$

Setzt man noch $n = -1$ und -2, so erhält man die beiden klein-

sten Zahlen, welche der Aufgabe entsprechen: 3639045 und 1819500, daher ist die allgemeine Form der Zahl auch

$$x = 1819545\,n - 45.$$

Alle übrigen Aufgaben sind in der bekannten Art der *regula virginum* oder *regula coeci* gerechnet, welche übrigens in der ganzen Handschrift nicht auseinandergesetzt ist. Es sind eben nur die Aufgaben und ihre Resultate mitgetheilt worden. Da bei viel einfachern Aufgaben die Rechnung *in extenso* durchgeführt ist, so ist dies doppelt verwunderlich.

VI.

Clm. 14908. Blt. 504'.

504' Omnis quadratus, cuius prima figura est par, ut per 4 diuisibilis.

Omnis quadratus in primis locis habet parem numerum ciffarum.

Nullus quadratus recipit in primo loco 2, 3, 7 vel 8, sed „alios" bene.

Omnis quadratus fit simpliciter vel subtracta vnitate per 3 diuisibilis.

Subtrahendo a quadrato duplem sue radicis minus 1 habetur immediate precedens, vel addendo sibi duplum plus 1 occurrit immediate sequens.

Si quadratus fuerit impar, remota 1 per 4 est diuisibilis.

Si prima figura fuerit impar, secunda semper est par.

Nunquam omnes figure possunt esse impares, sed bene pares.

Quando 4 est in primo loco, semper par est in secundo loco.

Quando 6 est in primo loco, semper impar in secundo loco.

Omnis cubicus, cuius prima figura est par, est in 8 divisibilis, et numerus quociens est etiam cubicus.

$$+[2q(b+c)+ac-ab+2c^2-2b^2](a+p)^2$$
$$+[ab-ac+2p(b-c)](b-c-q)^2$$
$$+[p(b+c)+q(b-c)-b^2-c^2]\times 2(a+p)(b-c-q)$$

oder

$$=[2(b+c)(q-b+c)+ac-ab](a+p)^2$$
$$+[2p(b-c)+ab-ac](b-c-q)^2$$
$$+[p(b+c)+(b-c)(q-b+c)-2bc]\times 2(a+p)(b-c-q)$$

oder

$$=+[2(b+c)(q-b+c)a+2(b+c)(q-b+c)p](a+p)$$
$$+(ac-ab)[(a+p)^2-(b-c-q)^2]$$
$$+[2p(b-c)](b-c-q)^2$$
$$+[p(b+c)-(b-c)(b-c-q)-2bc]2(a+p)(b-c-q)$$

oder, weil sich einige Teile gegenseitig aufheben,

$$=+[-2a(b+c)(b-c-q)(a+p)]+(ac-ab)[(a+p)^2-(b-c-q)^2]$$
$$+[2p(b-c)](b-c-q)^2$$
$$+[-(b-c)(b-c-q)-2bc]2(a+p)(b-c-q)$$

oder

$$=-2a(b+c)(a+p)(b-c-q)+(ac-ab)[(a+p)^2-(b-c-q)^2]$$
$$+2p(b-c)(b-c-q)^2$$
$$-2a(b-c)(b-c-q)^2-2p(b-c-q)^2-2bc\,.\,2(a+p)(b-c-q)$$

oder

$$=-2a(b+c)(a+p)(b-c-q)+(ac-ab)[(a+p)^2+(b-c-q)^2]$$
$$-2bc\,.\,2(a+p)(b-c-q)$$

oder

$$=(ac+bc)[(a+p)^2-2(a+p)(b-c-q)+(b-c-q)^2]$$
$$-(ab+bc)[(a+p)^2+2(a+p)(b-c-q)+(b-c-q)^2]$$

oder

$$=c(a+b(a+p-(b-c-q)]^2$$
$$-b(a+b)[a+p+(b-c-q)]^2$$

Die Gleichung (6), resp. (7) lässt sich nun folgendermassen schreiben:

$$0 = (a+b+c)^2(a+p)^2(b-c-q)^2$$
$$+\{p(b-c)-aq\}\{[p(b-c)+aq][(a+p)^2-(b-c-q)^2]$$
$$+2(a+b)c[a-b+c+p+q]^2$$
$$-2(a+c)b[a+b-c+p-q]^2\}$$

oder weiter entwickelt

$$\left.\begin{aligned}0 = {} & (a+b+c)^2(a^2+2ap+p^2)[(b-c)^2-2(b-c)q+q^2] && (\alpha)\\ & +\{(b-c)^2p^2-a^2q^2\}\{[a^2-(b-c)^2+2ap+2(b-c)q && (\beta)\\ & \qquad +p^2-q^2\}\\ & +2(a+b)c[p(b-c)-aq][(a+b+c)^2+2(a-b+c)p && (\gamma)\\ & \qquad +2(a-b+c)q+p^2+2pq+q^2]\\ & -2(a+c)b[p(b-c-aq][(a+b-c)^2+2(a+b-c)p && (\delta)\\ & \qquad -2(a+b-c)q+p^2-2pq+q^2]\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Die Entwicklung dieser Gleichung führt auf die Form:

$$Ap^4+A'q^4+Bp^2q^2+Cp^3+C'q^3+Dp^2q+D'pq^2+Ep^2+E'q^2+Fpq$$
$$+Gp+G'q+H=0$$

Als Coefficienten ergeben sich:

$$A = (b-c) \quad \text{aus } (\beta)$$

$$A' = a^2 \quad \text{aus } (\beta)$$

$$\left.\begin{aligned}B = {} & (a+b+c)^2 && \text{aus } (\alpha)\\ & -(b-c)^2 && \text{„ } (\beta)\\ & -a^2 && \text{„ } (\beta)\end{aligned}\right\} = -2[(a+b)c+(a+c)b]$$

$$\left.\begin{aligned}C = {} & 2a(b-c)^2 && \text{aus } (\beta)\\ & +2(a+b)c(b-c) && \text{„ } (\gamma)\\ & -2(a+c)b(b-c) && \text{„ } (\delta)\end{aligned}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{aligned}C' = {} & -2a^2(b-c) && \text{aus } (\beta)\\ & -2(a+b)ca && \text{„ } (\gamma)\\ & +2(a+c)ba && \text{„ } (\delta)\end{aligned}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{aligned}D = {} & -2(a+b+c)^2(b-c) && \text{aus } (\alpha)\\ & +2(b-c)^2(b-c) && \text{„ } (\beta)\\ & +4(a+b)c(b-c) && \text{„ } (\gamma)\\ & -2(a+b)ca && \text{„ } (\gamma)\\ & +4(a+c)b(b-c) && \text{„ } (\delta)\\ & +2(a+c)ba && \text{„ } (\delta)\end{aligned}\right\} = 0$$

$$D' = \left.\begin{array}{lll} (a+b+c)^2 \,.\, 2a & \text{aus} & (\alpha) \\ -2a^3 & \text{„} & (\beta) \\ +2(a+b)c(b-c) & \text{„} & (\gamma) \\ -4(a+b)ca & \text{„} & (\gamma) \\ -2(a+c)b(b-c) & \text{„} & (\delta) \\ -4(a+c)ba & \text{„} & (\delta) \end{array}\right\} = 0$$

$$E = \left.\begin{array}{lll} (a+b+c)^2(b-c)^2 & \text{aus} & (\alpha) \\ +(b-c)^2[a^2-(b-c)^2] & \text{„} & (\beta) \\ +4(a+b)c(b-c)(a-b+c) & \text{„} & (\gamma) \\ -4(a+c)b(b-c)(a+b-c) & \text{„} & (\delta) \end{array}\right\}$$

$$= -2(b-c)^2[(a+b)(a+c)+bc]$$

$$E' = \left.\begin{array}{lll} (a+b+c)^2a^2 & \text{aus} & (\alpha) \\ -a^2[a^2-(b-c)^2] & \text{„} & (\beta) \\ -4(a+b)ca(a-b+c) & \text{„} & (\gamma) \\ -4(a+c)ba(a+b-c) & \text{„} & (\delta) \end{array}\right\} = -2a^2[(a+b)b+(a+c)c]$$

$$F = \left.\begin{array}{lll} -4(a+b+c)^2a(b-c) & \text{aus} & (\alpha) \\ +4(a+b)c(b-v)(a+b+c) & \text{„} & (\gamma) \\ -4(a+b)ca(a-b+c) & \text{„} & (\gamma) \\ +4(a+c)b(b-c)(a+b-c) & \text{„} & (\delta) \\ +4(a+c)ba(a+b-c) & \text{„} & (\delta) \end{array}\right\} = 0$$

$$G = \left.\begin{array}{lll} 2(a+b+c)^2a(b-c) & \text{aus} & (\alpha) \\ +2(a+b)c(b-c)(a-b+c)^2 & \text{„} & (\gamma) \\ -2(a+c)b(b-c)(a+b-c)^2 & \text{„} & (\delta) \end{array}\right\} = 0$$

$$G' = \left.\begin{array}{lll} -2(a+b+c)^2a^2(b-c) & \text{aus} & (\alpha) \\ -2(a+b)ca(a-b+c)^2 & \text{„} & (\gamma) \\ +2(a+c)ba(a+b-c)^2 & \text{„} & (\delta) \end{array}\right\} = 0$$

$$H = (a+b+c)^2a^2(b-c)^2 \quad \text{aus } (\alpha)$$

Die Gleichung (8) verwandelt sich demnach in

$$\begin{aligned} 0 = {} & (b-c)^2p^4+a^2q^4+2[(a+b)c+(a+c)b]p^2q^2 \\ & -2(b-c)^2[(a+b)(a+c)+bc]p^2-2a^2[(a+b)b+(a+c)c]q^2 \\ & +a^2(b-c)^2(a+b+c)^2 \end{aligned} \tag{9}$$

Macht man die Substitution (5) auch in Gleichung (1), so geht diese über in

$$4a\left(\frac{a+b+c-p+q}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-p-q}{2}\right)$$
$$= (a+b+c)[b+c-a-b-c+p]^2$$

oder

$$a[(a+b+c-p)^2-q^2] = (a+b+c)(p-a)^2$$

oder

$$a(b+c)(a+b+c) = aq+^2(b+c)p^2 \qquad (1($$

Substituirt man den hieraus für q^2 folgenden Wert in die Gleichung (9), so folgt zunächst:

$$(b-c)^2p^4+[a(b+e)(a+b+e)-(b+c)p^2]^2$$
$$+2[(a+b)c+(a+c)b[p^2[(b+c)(a+b+c)-\frac{(b+c)}{a}p^2]$$
$$-2(b-c)^2[(a+b)(a+c)+bc]p^2$$
$$-2a[(a+b)b+(a+c)c][a(b+c)(a+b+c)-(b+c)p^2]$$
$$+a^2(b-c)^2(a+b+c)^2 = 0 \qquad (11$$

Mit a multiplicirt kommt

$$\{a(b-c)^2+a(b+c)^2-2(b+c)[(a+b)c+(a+c)b]\}p^4$$
$$-\{2a^2(b+c)^2(a+b+c)-2a(b+c)(a+b+c)](a+b)c+(a+c)b]$$
$$+2a(b-c)^2[(a+b)(a+c)+bc]-2a^2(b+e)[(a+b)b+(a+c)c]\}p^2$$
$$+a^2(b+c)^2(a+b+c)^2-2a^3(b+c)(a+b+c)[(a+b)b+(a+c)e]$$
$$+a^2(b-c)^2(a+b+c)^2 = 0$$

oder

$$-4bc[a+b+c]p^4+8abc[a^2+ab+ac+2bc]p^2$$
$$+4a^4bc(a+b+e) = 0$$

oder

$$p^4-2a\frac{[(a+b)(a+c)+bc]}{a+b+c}p^2+a^4 = 0$$

Hieraus ergiebt sich

$$p^2 = \frac{a[(a+b)(a+c)+bc]\pm\sqrt{a^2[(a+b)(a+c)+bc]^2-a^4(a+b+c)^2}}{a+b+c}$$
$$= \frac{a}{a+b+c}[(a+b)(a+c)+bc\pm 2\sqrt{(a+b)(a+c)bc}] \qquad (13$$

oder

$$p^2 = \frac{a}{a+b+c}[\sqrt{(a+b)(a+c)}\pm\sqrt{bc}]^2$$

daher

$$p = \pm\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}\left[\sqrt{(a+b)(a+c)} \pm \sqrt{bc}\right] \tag{14}$$

Um nun ferner q zu bestimmen, gehe man auf Gleichung (10) zurück. Hierin ist

$$aq^2 = (b+v)\left[a(a+b+c) - p^2\right];$$

also nach (13)

$$aq^2 = (b+c)\left\{a(a+b+c) - \frac{a}{a+b+c}\left[(a+b)(a+c)+bc \pm 2\sqrt{(a+b)(a+c)bc}\right]\right\}$$

$$q^2 = \frac{(b+c)}{a+b+c}\left\{(a+b+c)^2 - (a+b)(a+c) - bc \mp 2\sqrt{(a+b)(a+c)bc}\right\}$$

$$= \frac{b+c}{a+b+c}\left\{(a+b)b + (a+c)c \mp 2\sqrt{(a+b)(a+c)bc}\right\}$$

also

$$q = \pm\sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}}\left[\sqrt{(a+b)b} \mp \sqrt{(a+c)c}\right] \tag{15}$$

Da jede der Grössen p und q in Betracht der Vorzeichen 4 verschiedene Werte hat, von den Vorzeichen innerhalb der Klammern aber entweder die beiden oberen oder die beiden unteren zugleich gelten, so ergeben sich für jene Grössen 8 Wertpaare, die sich folgendermassen schreiben lassen:

$$\left.\begin{aligned} p &= \pm\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}\left[\sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{bc}\right] \\ q &= \pm\sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}}\left[\sqrt{(a+b)b} - \sqrt{(a+c)c}\right] \end{aligned}\right\} \text{ 4 Paare} \tag{16}$$

und

$$\left.\begin{aligned} p &= \pm\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}\left[\sqrt{(a+b)(a+c)} - \sqrt{bc}\right] \\ q &= \pm\sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}}\left[\sqrt{(a+b)b} + \sqrt{(a+c)c}\right] \end{aligned}\right\} \text{ 4 Paare} \tag{17}$$

Oder, wenn zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{\frac{a(a+b)(a+c)}{a+b+c}} = \mathfrak{A}, \quad \sqrt{\frac{b(b+a)(b+c)}{a+b+c}} = \mathfrak{B}, \\ &\sqrt{\frac{c(c+a)(c+b)}{a+b+c}} = \mathfrak{C}, \quad \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} = r \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned} p &= \pm(\mathfrak{A}+r) \\ q &= \pm(\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) \end{aligned}\right\} \text{ 4 Paare} \qquad (19)$$

und

$$\left.\begin{aligned} p &= \pm(\mathfrak{A}-r) \\ q &= \pm(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) \end{aligned}\right\} \text{ 4 Paare} \qquad (20)$$

Aus den Gleichungen (5) ergiebt sich durch einfache Rechnung

$$\left.\begin{aligned} 2y &= a+b+c-p+q \\ 2z &= a+b+c-p-q \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

und mit Hülfe der Gleichungen (19), wenn darin beispielsweise die beiden oberen Vorzeichen gelten:

$$\begin{aligned} 2y &= a+b+c-r-(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) \\ 2z &= a+b+c-r-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) \end{aligned}$$

Alle 8 Wertpaare von y und z sind, wenn zur weiteren Abkürzung

$$a+b+c=s$$

gesetzt wird, folgende:

$$\left.\begin{aligned} 2y_1 &= s-r-(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) & 2z_1 &= s-r-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) \\ 2y_2 &= s-r-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) & 2z_2 &= s-r-(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) \\ 2y_3 &= s+r+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) & 2z_3 &= s+r+(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) \\ 2y_4 &= s+r+(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) & 2z_4 &= s+r+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) \end{aligned}\right\} \text{ aus (19)}$$

$$\left.\begin{aligned} 2y_5 &= s+r+(-\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) & 2z_5 &= s+r-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) \end{aligned}\right\} \text{ aus (20)}$$

u. s. w.

Um nun noch die hierzu gehörigen Werte von x zu finden, erwäge man, dass, wenn am Anfange der Rechnung statt x etwa s eliminirt worden wäre, sich statt der Gleichung (21) folgende Gleichungen ergeben hätten:

$$\left.\begin{aligned} 2y &= a+b+c-p'+q' \\ 2x &= a+b+c-p'-q' \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

und statt der Gleichungen (19) hätte man erhalten:

$$\begin{aligned} p' &= \pm(\mathfrak{C}+r) \\ q' &= \pm(\mathfrak{B}-\mathfrak{A}) \end{aligned}$$

Demnach ist

$$\begin{aligned} 2y &= s-r-(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) & 2x &= s-r-(-\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) \\ 2y &= s-r-(-\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) & 2x &= s-r-(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) \\ 2y &= s+r+(-\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) & 2x &= s+r+(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) \\ 2y &= s+r+(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) & 2x &= s+r+(-\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) \end{aligned}$$

u. s. w.

Wird diese Gleichung durch $a+b+c$ dividirt und mit a multiplicirt, so kommt

$$\pm[b+c-y-z]\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} = a(2a+b+c-y-z)$$
$$\pm(2a+b+c-y-z)\sqrt{\frac{a(a+b)(a+c)}{a+b+c}}$$

und hierin

$$\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} = r \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{a(a+b)(a+c)}{a+b+c}} = \mathfrak{A}$$

gesetzt, giebt

$$\pm[b+c-y-z]r = 2a(a\pm\mathfrak{A})+[b+c-y-z][a\pm\mathfrak{A}) \tag{10}$$
$$[y+z-b-c](a\pm\mathfrak{A})\pm(b+c-y-z)r = 2a(a\pm\mathfrak{A})$$
$$[y+z-b-c][a\pm\mathfrak{A}\pm r] = 2a(a\pm\mathfrak{A})$$
$$y+z) = b+c+\frac{2a(a\pm\mathfrak{A})}{a\pm\mathfrak{A}\pm r)} \tag{11}$$

Nach dem Gange der Rechnung können in (9) die Vorzeichen beliebig wechseln; aber in (10), und also auch in (11), muss die Einschränkung gemacht werden, dass die Vorzeichen von $\mathfrak{A}$ in beiden Teilen mit einander correspondiren. Demnach hat $y+z$ in Gleichung (11) höchstens 4 Werte, wie dieses auch die Gleichung (9) andeutete; nämlich:

$$\left.\begin{aligned} y+z &= b+c+\frac{2a(a+\mathfrak{A})}{a+\mathfrak{A}+r} \\ y+z &= b+c+\frac{2a(a+\mathfrak{A})}{a+\mathfrak{A}-r} \\ y+z &= b+c+\frac{2a(a-\mathfrak{A})}{a-\mathfrak{A}+r} \\ y+z &= b+c+\frac{2a(a-\mathfrak{A})}{a-\mathfrak{A}-r} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die letzten Glieder dieser vier Gleichungen können nun weiter umgeformt werden, wenn berücksichtigt wird, dass

$$\mathfrak{A}^2 = \frac{a(a+b)(a+c)}{a+b+c}, \quad r^2 = \frac{abc}{a+b+c}$$

und also

$$\mathfrak{A}^2 - r^2 = a^2$$

ist. Es ist nämlich

$$2a(a+\mathfrak{A}) = 2a^2+2a\mathfrak{A} = a^2+\mathfrak{A}^2-r^2+2a\mathfrak{A} = (a+\mathfrak{A}+r)(a+\mathfrak{A}-r),$$

und

$$2a(a-\mathfrak{A}) = 2a^2-2a\mathfrak{A} = a^2+\mathfrak{A}^2-r^2-2a\mathfrak{A} = (a-\mathfrak{A}+r)(a-\mathfrak{A}-r)$$

Die vier Werte von $y+z$ sind demnach:

$$\left.\begin{aligned} y+z &= a+b+c-r+\mathfrak{A} \\ y+z &= a+b+c+r+\mathfrak{A} \\ y+z &= a+b+c-r-\mathfrak{A} \\ y+z &= a+b+c+r-\mathfrak{A} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Zwar lassen sich nun auch die Gleichungen für $x+y$ und für $x+z$ leicht hinschreiben; allein sie können zur Auffindung der Werte für x, y, z nicht weiter benutzt werden, da man nicht weiss, welche 3 von diesen 12 Gleichungen man jedesmal herauszugreifen hat, um überhaupt richtige Werte und demnächst Wertsysteme zu finden. Man ist daher genötigt, zu Gleichung (1) zurückzukehren. Setzen wir darin

$$a+b+c = s$$

und für $y+z$ den ersten Wert (13), also

$$y+z = s-r+\mathfrak{A} \qquad (14)$$

so kommt

$$4ayz = s[-a+r-\mathfrak{A}]^2 = s[a-r+\mathfrak{A}]^2$$

oder

$$4yz = s\left[\sqrt{a}-\sqrt{\frac{bc}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{a+b+c^2}}\right]^3$$

$$4yz = s\left[a+\frac{bc}{a+b+c}+\frac{(a+b)(a+c)}{a+b+c}-2\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}\right.$$
$$\left.+2\sqrt{\frac{a(a+b)(a+c)}{a+b+c}}-2\sqrt{\frac{bc(a+b)(a+c)}{a+b+c}}\right]$$

$$= s\left[a+\frac{bc}{a+b+c}+a+\frac{bc}{a+b+c}-2r+2\mathfrak{A}\right.$$
$$\left.-2\sqrt{\frac{bc(a+b)(a+c)}{a+b+c}}\right]$$

$$= 2sa+2bc-2s(s-\mathfrak{A})-\frac{2a\sqrt{bc(a+b)(a+c)}}{a+b+c}$$
$$-\frac{2(b+c)\sqrt{bc(a+b)(a+c)}}{a+b+c}$$

Es ist aber

$$b^2 = \mathfrak{E}^2 - r^2, \quad c^2 = \mathfrak{C}^2 - r^2$$

und demnach

$$4yz = 2sa + b^2 + c^2 + 2bc - \mathfrak{B}^2 + r^2 - \mathfrak{C}^2 + r^2 - 2s(r - \mathfrak{A}) - 2r\mathfrak{A} - 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

$$= 2a(a+b+c) + (b+c)^2 + 2r^2 - 2s(s-\mathfrak{A}) - 2r\mathfrak{A} - (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})^2$$

{erster Term $= a^2 + a^2 + 2a(b+c)$}

$$= \mathfrak{A}^2 - r^2 + s^2 + 2r^2 - 2sr + 2s\mathfrak{A} - 2r\mathfrak{A} - (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})^2$$

$$= s^2 + r^2 + \mathfrak{A}^2 + 2s\mathfrak{A} - 2sr - 2r\mathfrak{A} - (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})^2$$

$$4yz = (s - r + \mathfrak{A})^2 - (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})^2$$

Dies von

$$(y+z)^2 = (s - r + \mathfrak{A})^2 \tag{14}$$

subtrahirt:

$$y^2 - 2yz + z^2 = (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})^2$$

$$\left.\begin{aligned} y - z &= \pm(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) \\ y + z &= s - r + \mathfrak{A} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Also

$$2y_1 = s - r + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \quad \text{und} \quad 2y_2 = s - r + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} - \mathfrak{C}$$

und

$$2z_1 = s - r + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} - \mathfrak{C} \quad \text{und} \quad 2z_2 = s - r + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$$

Verfährt man mit der zweiten Gleichung in (13) auf gleiche Weise, so erhält man

$$4yz = (s + r + \mathfrak{A})^2 - (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})^2$$

und es ergeben sich dann zwei andere Wertpaare für y und z nämlich

$$2y_3 = s + r + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{C} \quad \text{und} \quad 2y_4 = s + r + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$$
$$2z_3 = s + r + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \quad \text{und} \quad 2z_4 = s + r + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{C}$$

u. s. w. Im ganzen ergeben sich 8 Wertpaare für y und z, wobei man bemerkt, dass alle 8 Werte von z mit den 8 Werten von y übereinstimmen. Dasselbe gilt natürlich auch in Bezug auf die Werte von x. Um nun noch diese, nämlich $x_1, x_2, x_3 \ldots$, auf dem kürzesten Wege zu bestimmen, setze man nach Analogie der Gleichungen (15)

$$y + x = s - r + \mathfrak{C}$$
$$y - x = \pm(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$$

daher

$$2y = s - r + \mathfrak{C} + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad 2y = s - r + \mathfrak{C} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$$

und

$$2x = s - r + \mathfrak{C} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad 2x = s - r + \mathfrak{C} + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$$

Der erste dieser Werte von $2y$ ist jener oben gefundene Wert von $2y_1$, und daher muss der darunter stehende Ausdruck auch der Wert von $2x_1$ sein. Um den anderen Wert von $2x$ registiren zu können, ist es erforderlich, auf dem oben gezeigten Wege noch y_5 oder y_6 . . . zu bestimmen; denn der Wert

$$2y = s - r - \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$$

findet sich nicht unter den ersten vier Werten von y. Demnach ist nun das erste Wertsystem:

$$2x_1 = s - r - \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C}, \qquad 2y_1 = s - r + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$$
$$2z_1 = s - r + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} - \mathfrak{C}$$

(in Uebereinstimmung mit dem 7ten Wertsystem von Herrn Dr. Amthor).

Es lassen sich nun leicht auch die übrigen Wertsysteme aufstellen.

Anmerkung 1. Hätte von Gleichung (7) an die Entwicklung einen anderen Verlauf genommen, wäre nämlich unter dem Wurzelzeichen rechts nicht yz, sondern $y+z$ entfernt worden, so hätte man erhalten:

$$\pm 2\sqrt{bcyz} = (a+b+c)(2a+b+c-y-z)$$
$$\pm 2\sqrt{(a+b)(a+c)}[\pm\sqrt{a(a+b+c)} \pm \sqrt{yz}]$$

und man hätte in der Weiterentwicklung auf diesem Wege auch zu Gleichung (11) gelangen können; aber man wäre über die Geltung der Vorzeichen im Unklaren geblieben. Durch eine vorläufige Untersuchung, die hier durch Andeutungen gegeben werden mag, kann allerdings jene die Vorzeichen in (11) betreffende Einschränkung gefunden werden.

Unter der Voraussetzung, dass a, b, c positive Grössen sind, kann z. B. in Gleichung (1) keine der beiden unbekannten Grössen y, z negativ sein; auch können nicht beide zugleich negativ sein. Ferner, keine dieser Grössen kann in dieser Gleichung über $a+b+c$ hinausgehen, und sollen auch die andern beiden Grundgleichungen gelten, so muss

$$y < a+b+c$$

und

$$z < a+b+c \text{ sein.}$$

Ferner: In Gleichung (7) können die Vorzeichen nicht beliebig gelten: es müssen z. B. Formen, wie

$$+d-e=+f+g$$

oder

$$-d+e=+f+g$$

ausgeschlossen werden. Ueberhaupt muss in diesen Formen das $-$ Zeichen, wenn es vorkommt, auf jeder Seite vorkommen, und zwar auf jeder Seite einmal, so dass die doppelten Vorzeichen in (7) mit einander correspondiren, denn es lässt sich nachweisen, dass Formen, wie

$$\pm 2\sqrt{bcyz} = (a+b+c)(2a+b+c\ \cdot y-z)$$
$$\mp 2\sqrt{(a+b)(a+c)(a+b+c-y)(a+b+c-z)}$$

in welchen entweder die oberen oder die unteren Zeichen gelten sollen, nicht möglich sind.

Anmerkung 2. Benutzt man das erste Wertsystem zur Substituirung in den rechts stehenden Ausdrücken der Grundgleichungen, so ergeben sich durch einfache Rechnung auch folgende Resultate:

$$2x_1 = \frac{(-b+r+\mathfrak{B})(c-r+\mathfrak{C})}{a-r+\mathfrak{A}}\sqrt{\frac{a(a+b+c)}{bc}}$$

$$2y_1 = \frac{(a-r+\mathfrak{A})(c-r+\mathfrak{C})}{-b+r+\mathfrak{B}}\sqrt{\frac{b(a+b+c)}{ac}}$$

$$2z_1 = \frac{(a-r+\mathfrak{A})(-b+r+\mathfrak{B})}{c-r+\mathfrak{C}}\sqrt{\frac{c(a+b+c)}{ab}}$$

u. s. w.

Anmerkung 3. Es seien in einem Zahlenbeispiel

$$a = 840,\quad b = 660,\quad c = 1188$$

also

$$s = 2688,\quad r = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} = 495$$

$$\mathfrak{A} = \sqrt{\frac{a(a+b)(a+c)}{a+b+c}} = 975,\quad \mathfrak{B} = \sqrt{\frac{b(b+a)(b+c)}{a+b+c}} = 825$$

$$\mathfrak{C} = \sqrt{\frac{c(c+a)(c+b)}{a+b+c}} = 1287$$

dann sind die 8 Wertsysteme in der von Herrn Dr. Amthor aufgestellten Ordnung:

$2x_1 = 1056$	$2y_1 = 756$	$2z_1 = 1680$
$2x_2 = 5280$	$2y_2 = 1680$	$2z_2 = 756$
$2x_3 = 96$	$2y_3 = 3696$	$2z_3 = 4620$
$2x_4 = 4320$	$2y_4 = 4620$	$2z_4 = 3696$
$2x_5 = 4620$	$2y_5 = 4320$	$2z_5 = 96$
$2x_6 = 3696$	$2y_6 = 96$	$2z_6 = 4320$
$2x_7 = 1680$	$2y_7 = 5280$	$2z_7 = 1056$
$2x_8 = 756$	$2y_8 = 1056$	$2z_8 = 5280$

Zweite Aufgabe.

II.

$$u = 2r - \frac{ry}{b} - \frac{rz}{c} \quad (1) \qquad au^2 = 2ryz + a(y^2 + z^2) \quad (4)$$

$$v = 2r - \frac{rz}{c} - \frac{rx}{a} \quad (2) \qquad bv^2 = 2rzx + b(z^2 + x^2) \quad (5)$$

$$w = 2r - \frac{rx}{a} - \frac{ry}{b} \quad (3) \qquad cw^2 = 2rxy + c(x^2 + y^2) \quad (6)$$

wobei

$$a^2b^2c^2 = r^2[a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2rabc] \quad (7)$$

A. Auflösung von Herrn Dr. Amthor.

Eliminirt man u aus den Gleichungen (1) und (4), so kommt:

$$ar^2\left[4 + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{4y}{b} - \frac{4z}{c} + 2\frac{yz}{bc}\right] = 2ryz + a(y^2 + z^2)$$

oder, mit ab^2c^2 multiplicirt:

$$4a^2b^2c^2r^2 = a^2c^2y^2(b^2 - r^2) + a^2b^2z^2(c^2 - r^2) + 2rabcyz(bc - ar) + 4a^2bc^2r^2g + 4a^2b^2cr^2z$$

Sei nun

$$\left.\begin{aligned} ac\sqrt{b^2 - r^2}\,.\,y &= B - \eta \\ ab\sqrt{c^2 - r^2}\,.\,z &= C - \zeta \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

so folgt:

$$\frac{4ar}{ar+bc}\cdot\eta\zeta=\left[\eta+\zeta-\frac{b^2c^2}{re}\sqrt{a^2-r^2}\right]^2-\left[\frac{b^2c^2}{r}\sqrt{a^2-r^2}-\eta-\zeta\right]^2 \qquad (13)$$

und die Lösung der zweiten Aufgabe kommt daher, wenn man auch aus der 2ten und 5ten, sowie auch aus der 3ten und 6ten Gleichung ähnliche Gleichungen wie die vorstehende entwickelt, darauf hinaus, die Lösung des folgenden Systems von Gleichungen zu finden:

$$\left.\begin{aligned}\frac{4ar}{ar+bc}\eta\zeta&=\left[\frac{b^2c^2}{r}\sqrt{a^2-r^2}-\eta-\zeta\right]^2\\ \frac{4br}{br+ca}\zeta\xi&=\left[\frac{c^2a^2}{r}\sqrt{b^2-r^2}-\zeta-\xi\right]^2\\ \frac{4cr}{cr+ab}\xi\eta&=\left[\frac{a^2b^2}{r}\sqrt{c^2-r^2}-\xi-\eta\right]^2\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

wobei die Gleichung (7) oder die ihr äquivalenten Gleichungen (11) in Betracht kommen.

Setzt man nun

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{1}{2r}\left[-b^2c^2\sqrt{a^2-r^2}+c^2a^2\sqrt{b^2-r^2}+a^2b^2\sqrt{c^2-r^2}\right]\\ \beta&=\frac{1}{2r}\left[b^2c^2\sqrt{a^2-r^2}-c^2a^2\sqrt{b^2-r^2}+a^2b^2\sqrt{c^2-r^2}\right]\\ \gamma&=\frac{1}{2r}\left[b^2c^2\sqrt{a^2-r^2}+c^2a\sqrt{b^2-r^2}-a^2b^2\sqrt{c^2-r^2}\right]\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

oder, was dasselbe ist:

$$\left.\begin{aligned}\beta+\gamma&=\frac{b^2c^2}{r}\sqrt{a^2-r^2}\\ \gamma+\alpha&=\frac{c^2a^2}{r}\sqrt{b^2-r^2}\\ \alpha+\beta&=\frac{a^2b^2}{r}\sqrt{c^2-r^2}\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

so gehen die Gleichungen (14) mit Rücksicht auf die Gleichungen (11) über in

$$\left.\begin{aligned} 4\alpha\eta\zeta &= \frac{\alpha(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}{a^4b^2c^2}\,[\beta+\gamma-\eta-\zeta]^2 \\ 4\beta\zeta\xi &= \frac{\beta(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}{a^2b^4c^2}\,[\gamma+\alpha-\zeta-\xi]^2 \\ 4\gamma\xi\eta &= \frac{\gamma(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{a^2b^2c^4}\,[\alpha+\beta-\xi-\eta]^2 \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Nun ist aber nach Gleichung (7)

$$a^2b^2c^2 = r^2[a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2rabc]$$

oder

$$-2abcr^3 = [a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2]r^2 - a^2b^2c^2$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $2rabc$, so folgt:

$$-4a^2b^2c^2r^4 = [a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2]2r^3abc - 2a^3b^3c^3r$$

oder für $2r^3abc$ den Wert aus der vorhergehenden Zeile gesetzt:

$$\begin{aligned} -4a^2b^2c^2r^4 &= [a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2][a^2b^2c^2 - r^2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)] \\ &\qquad -2arb^2c^2r \\ &= a^2b^2c^2[a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2] - r^2[a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2]^2 \\ &\qquad -2a^2b^2c^2r \\ &= a^2b^2c^2[a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2] \\ &\quad -r^2[a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4+2a^4b^2c^2+2a^2b^4c^2+2a^2b^2c^4] \\ &\qquad -2a^2b^2c^2r \end{aligned}$$

Addirt man beiderseits $4a^4b^2c^2r^2$, so folgt:

$$\begin{aligned} 4a^2b^2c^2r^2(a^2-r^2) &= a^4b^4c^2+a^4c^4b^2+b^4c^4a^2 \\ &\quad -r^2[a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4-2a^4b^2c^2+2a^2b^4c^2+2a^2b^2c^4] \\ &\qquad -2a^2b^2c^2r \\ &= a^4b^4(c^2-r^2)+a^4c^4(b^2-r^2)+b^4c^4(a^2-r^2) \\ &\quad +2a^4b^2c^2r^2-2a^2b^4c^2r^2-2a^2b^2c^2r(cr+ab) \end{aligned}$$

Fügt man rechts noch $+2a^2b^2c^2r-2a^2b^2c^2r$ hinzu, so folgt ferner:

$$\begin{aligned} 4a^2b^2c^2r^2(a^2-r^2) &= a^4b^4(c^2-r^2)+a^4c^4(c^2-r^2)+b^4c^4(a^2-r^2) \\ &\quad +2a^2b^2c^2r(ar+bc)-2a^2b^2c^2r(br+ac) \\ &\qquad -2a^2b^2c^2r(cr+ab) \end{aligned}$$

und daher mit Rücksicht auf die Gleichungen [11)

$$u_1 = \frac{r}{2\sqrt{b^2-r^2}\sqrt{c^2-r^2}}[(\sqrt{b^2-r^2}+\sqrt{c^2-r^2})(\sqrt{a^2-r^2}+\sqrt{b^2-r^2} + \sqrt{c^2-r^2}-r-a)-\sqrt{b^2-r^2}\sqrt{c^2-r^2})(b-c)]$$

$$v_1 = \frac{r}{2\sqrt{c^2-r^2}\sqrt{a^2-r^2}}((\sqrt{c^2-r^2}+\sqrt{a^2-r^2})(\sqrt{a^2-r^2}+\sqrt{b^2-r^2} + \sqrt{c^2-r^2}-r-b)-(\sqrt{c^2-r^2}-\sqrt{a^2-r^2})(c-a)]$$

$$w_1 = \frac{r}{2\sqrt{a^2-r^2}\sqrt{b^2-r^2}}[(\sqrt{a^2-r^2}+\sqrt{b^2-r^2})(\sqrt{a^2-r^2}+\sqrt{b^2+r^2} + \sqrt{c^2-r^2}-r-c)-(\sqrt{a^2-r^2}-\sqrt{b^2-r^2})(a-b)]$$

B. Auflösung von C. Davids.

Wird (3) quadrirt und der Wert von w^2 in (6) substituirt, so erhält man:

$$w^2 = 4r^2-4\frac{r^2x}{a}-4\frac{r^2y}{b}+\frac{r^2x^2}{a^2}+\frac{r^2y^2}{b^2}+\frac{2r^2xy}{c^2}-\frac{2rxy}{c}+x^2+y^2$$

oder

$$4r^2\frac{(a-x)(b-y)}{ab} = -\frac{r^2x^2}{a^2}-\frac{r^2y^2}{b^2}+\frac{2r^2xy}{ab}+\frac{2rxy}{c}+x^2+y^2$$

$$= \frac{(a^2-r^2)}{a^2}x^2+\frac{(b^2-r^2)}{b^2}y^2+2xy\left(\frac{r^2}{ab}+\frac{r}{c}\right)$$

Aus (7):

$$\frac{r^2}{ab}+\frac{r}{c} = \pm\sqrt{\frac{(a^2-r^2)(b^2-r^2)}{a^2b^2}} \qquad (8)$$

worin nur das obere Zeichen gelten kann, wenn a, b, c, r positive Grössen vorstellen. Dass von diesen Grössen in (8) r die kleinste ist, ergiebt sich sehr leicht, wenn man in (7) links a^2-r^2 setzt. Wird nun

$$a^2-r^2 \text{ durch } t^2 \text{ und } b^2-r^2 \text{ durch } m^2$$

bezeichnet, so geht die obige Gleichung über in:

$$\left.\begin{array}{l} 2r\sqrt{\left(\frac{a-x}{a}\right)\left(\frac{b-y}{b}\right)} = \pm\left(\frac{lx}{a}+\frac{my}{b}\right) \\ \text{analog} \\ 2r\sqrt{\left(\frac{b-y}{b}\right)\left(\frac{c-z}{c}\right)} = \pm\left(\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right) \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Hierin müssen beide Vorzeichen gesetzt werden, weil x, y, z möglicherweise negative Werte haben können. Statt sie aber auf der rechten Seite zu gebrauchen, können sie auch den Grössen der linken Seite vorgesetzt werden und dann folgt:

$$-\frac{lx}{a} \pm 2r\sqrt{\left(\frac{a-x}{a}\right)\left(\frac{b-y}{b}\right)} = \frac{my}{b}$$

oder, wenn beiderseits l addirt wird,

$$l\left(\frac{a-x}{a}\right) \pm 2r\sqrt{\left(\frac{a-x}{a}\right)\left(\frac{b-y}{b}\right)} = \frac{my+bl}{b}$$

$$\frac{a-x}{a} \pm \frac{2r}{l}\sqrt{\frac{b-y}{b}}\cdot\sqrt{\frac{a-x}{a}} = \frac{my+bl}{bl}$$

quadratisch behandelt

$$\left(\sqrt{\frac{a-x}{a}} \pm \frac{r}{l}\sqrt{\frac{b-y}{b}}\right)^2 = \frac{my+bl}{bl} + \frac{r^2(b-y)}{bl^2}$$

$$\sqrt{\frac{a-x}{a}} = \pm\frac{r}{l}\sqrt{\frac{b-y}{b}} \pm \sqrt{\frac{lmy+bl^2+r^2b-r^2y}{bl^2}}$$

Wird in dieser Gleichung

$$lm - r^2 = \frac{rab}{c} \tag{8}$$

gesetzt und wird dann mit l multiplicirt, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} l\sqrt{\frac{a-x}{a}} &= \pm r\sqrt{\frac{b-y}{b}} \pm \sqrt{a^2+\frac{ray}{c}} \\ \text{analog}\qquad l\sqrt{\frac{a-x}{c}} &= \pm r\sqrt{\frac{c-z}{c}} + \sqrt{a^2+\frac{raz}{b}} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Daher:

$$\pm r\sqrt{\frac{b-y}{b}} \pm \sqrt{a^2+\frac{ray}{c}} = \pm r\sqrt{\frac{c-z}{c}} \pm \sqrt{a^2+\frac{raz}{b}} \tag{11}$$

$$\pm r\sqrt{\frac{b-y}{b}} \pm r\sqrt{\frac{c-z}{c}} = \pm\sqrt{a^2+\frac{ray}{c}} + \sqrt{a^2+\frac{raz}{b}}$$

quadrirt

$$r^2\left[\frac{b-y}{b}+\frac{c-z}{c}\right]\pm 2r^2\sqrt{\left(\frac{b-y}{b}\right)\left(\frac{c-z}{c}\right)}=a^2+\frac{ray}{c}+a^2+\frac{raz}{b}$$
$$\pm 2\sqrt{\left(a^2+\frac{ray}{c}\right)\left(a^2+\frac{raz}{b}\right)} \qquad (12)$$

$$\pm 2r^2\sqrt{\left(\frac{b-y}{b}\right)\left(\frac{c-z}{c}\right)}=2(a^2-r^2)+\left(r^2+\frac{rab}{c}\right)\frac{y}{b}+\left(r^2+\frac{rac}{b}\right)\frac{r}{c}$$
$$\pm 2a\sqrt{a^2+\frac{rab}{c}\cdot\frac{y}{b}+\frac{rac}{b}\cdot\frac{z}{c}+\frac{r^2yz}{bc}}$$

Nun ist der Gleichung (8) gemäss:

$$\frac{rab}{c}+r^2=lm$$

und

$$\frac{rab}{b}+r^2=ln$$

daher

$$\pm 2r^2\sqrt{\left(\frac{b-y}{b}\right)\left(\frac{c-z}{c}\right)}=2l^2+lm\,\frac{y}{b}+ln\,\frac{z}{c}$$
$$\pm 2a\sqrt{l^2+r^2+(lm-r^2)\frac{y}{b}+(ln-r^2)\frac{z}{c}+\frac{r^2yz}{bc}} \qquad (13)$$

oder, (9) in Betracht gezogen,

$$\pm r\left[\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right]=2l^2+lm\,\frac{y}{b}+\frac{lnz}{c}$$
$$\pm 2a\sqrt{l^2+l\left(\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right)+r^2-\frac{r^2y}{b}-\frac{r^2z}{c}+\frac{r^2yz}{bc}} \qquad (14)$$

Die vier letzten Teile unter dem Wurzelzeichen sind aber nach (9):

$$r^2\left(\frac{b-y}{b}\right)\left(\frac{c-z}{c}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right)^2$$

Also:

$$\pm r\left[\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right]-\frac{lmy}{b}-\frac{lnz}{c}=2l^2\pm 2a\left\{\pm\left[l+\tfrac{1}{2}\left(\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right)\right]\right\}$$
$$-(l\pm r)\left[\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right]=2l^2\pm 2a\left[l+\tfrac{1}{2}\left(\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right)\right] \qquad (15)$$

Wenn in Gleichung (23) hinsichtlich des Gebrauches der Vorzeichen auch eine Einschränkung derart statt finden sollte, dass entweder nur die oberen oder nur die unteren gebraucht werden dürfen — und dies ist, wie sich nachweisen lässt, wirklich der Fall

ähnlich wie in System I Gleichung (7) —, so würde diese Einschränkung doch in (14) nicht mehr gelten. und daher können in (15) von den doppelten Vorzeichen + und — beliebig gebraucht werden. Aus dieser letzten Gleichung gehen daher vier Formen hervor:

$$1)\quad (a+l+r)\left(\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right) = -(2l^2+2al)$$

$$2)\quad (a-l-r)\left(\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right) = +(2l^2-2al)$$

$$3)\quad (a+l-r)\left(\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right) = -(2l^2+2al)$$

$$4)\quad (a-l+r)\left(\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right) = +(2l^2-2al)$$

oder, da

$$2l^2+2al = l^2+a^2-r^2+2al = (a+l+r)(a+l-r)$$

und

$$2l^2-2al = l^2+a^2-r^2-2al = (a-l+r)(a-l-r) \text{ ist,}$$

$$\left.\begin{aligned} 1)\quad \frac{my}{b}+\frac{nz}{c} &= -a-l+r \\ 2)\quad \frac{my}{b}+\frac{nz}{c} &= +a-l+r \\ 3)\quad \frac{my}{b}+\frac{nz}{c} &= -a-l-r \\ 4)\quad \frac{my}{b}+\frac{nz}{c} &= +a-l-r \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Versuchen wir jetzt die Werte von y und z festzustellen. Es ist nach (13), (14) und (16, 1):

$$2r\sqrt{\left(\frac{b-y}{b}\right)\left(\frac{c-z}{c}\right)} = \pm\left(\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right) = \pm(-a-l+r) \qquad (17)$$

$$4r^2\left[1-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}+\frac{yz}{bc}\right] = (a+l-r)^2$$

$$4r^2\left[mn-n\cdot\frac{my}{b}-\frac{m\cdot nz}{c}+\frac{my}{b}\cdot\frac{nz}{c}\right] = mn(a+l-r)^2$$

mn

$$\frac{my}{b} = -a-l+r-\frac{nz}{c}$$

substituirt:

$$\frac{n^2z^2}{c^2} - [-a-l+r-m+n]\frac{nz}{c} = -\frac{mn(a+l-r)^2}{4r^2} + mn$$
$$= \frac{-2lmn(a+l-r) - mn(2r^2-2ra)}{4r^2}$$
$$+ mn + na + ln - nr$$
$$= \frac{-2(l+m+n)(a+l-r)^*) + 2mn + 4na + 4ln - 4nr}{4}$$
$$+ \frac{mn \,.\, 2ra}{4r^2}$$

Hierzu auf beiden Seiten die Ergänzung addirt, dann die Quadratwurzel ausgezogen und mit 2 multiplicirt, giebt:

$$\frac{2nz}{c} = n-l-m+r-a \pm (b+c)$$

und ferner

$$\frac{2my}{b} = m-l-n+r-a \mp (b+c)$$

woraus zwei Wertpaare für y und z hervorgehen, nämlich:

$$\alpha \begin{cases} \frac{2nz}{c} = n-l-m+r-a+b+c \\ \frac{2my}{b} = m-l-a+r-a-b-c \end{cases}$$

$$\beta \begin{cases} \frac{2nz}{c} = n-l-m+r-a-b-c \\ \frac{2my}{b} = m-l-n+r-a+b+c \end{cases}$$

Ferner, aus der zweiten Gleichung in (16) geht hervor:

---

*) Es ist

$$lmn = r^2(l+m+n)$$

denn nach (8) ist

$$ln = \frac{rac}{b} + r^2$$

oder

$$lm \,.\, nm \quad (b^2-r^2)$$

oder

$$\left(\frac{rab}{c}+r^2\right)\left(\frac{rbc}{a} \quad -r^2\right)(b^2-$$

Durch r dividirt und mit abc mu[illegible] die Gleic[illegible]

$$\frac{n^2z^2}{c^2}-(a-l+r-m+n)\frac{nz}{c}=\frac{2(l+m+n)(a-l+r)+2mn-4ac-c^2}{4}-$$

$$-\frac{mn\cdot c^2}{4c^2}$$

und hieraus

$$\frac{2nz}{c}=a-l+r-m+n\pm(b-c)$$

Dies giebt zwei andere Wertpaare für z und y, nämlich:

$$\gamma\begin{cases}\dfrac{2nz}{c}=n-l-m+r+a+b-c\\[2ex]\dfrac{2my}{b}=m-l-n+r+a-b+c\end{cases}$$

$$\delta\begin{cases}\dfrac{2nz}{c}=n-l-m+r+a-b+c\\[2ex]\dfrac{2my}{b}=m-l-n+r+a+b-c\end{cases}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen in (16):

$$\varepsilon\begin{cases}\dfrac{2nz}{c}=n-l-m-r-a+b-c\\[2ex]\dfrac{2my}{b}=m-l-n-r-a-b+c\end{cases}$$

$$\zeta\begin{cases}\dfrac{2az}{c}=n-l-m-r-a-b+c\\[2ex]\dfrac{2my}{b}=m-l-n-r-a+b-c\end{cases}$$

$$\eta\begin{cases}\dfrac{2nz}{c}=n-l-m-r+a+b+c\\[2ex]\dfrac{2my}{b}=m-l-n-r+a-b-c\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{2nz}{c}=n-l-m-r+a-b-c\\[2ex]\dfrac{2my}{b}=m-l-n-r+a+b+c\end{cases}$$

$$\frac{n^2z^2}{c^2} - [-a-l+r-m+n]\frac{nz}{c} = -\frac{mn(a+l-r)^2}{4r^2} + mn$$

$$= \frac{-2lmn(a+l-r) - mn(2r^2-2ra)}{4r^2}$$

$$+ mn + na + ln - nr$$

$$= \frac{-2(l+m+n)(a+l-r)^*) + 2mn + 4na + 4ln - 4nr}{4}$$

$$+ \frac{mn \,.\, 2ra}{4r^2}$$

Hierzu auf beiden Seiten die Ergänzung addirt, dann die Quadratwurzel ausgezogen und mit 2 multiplicirt, giebt:

$$\frac{2nz}{c} = n-l-m+r-a \pm (b+c)$$

und ferner

$$\frac{2my}{b} = m-l-n+r-a \mp (b+c)$$

woraus zwei Wertpaare für y und z hervorgehen, nämlich:

$$\alpha \begin{cases} \frac{2nz}{c} = n-l-m+r-a+b+c \\ \frac{2my}{b} = m-l-a+r-a-b-c \end{cases}$$

$$\beta \begin{cases} \frac{2nz}{c} = n-l-m+r-a-b-c \\ \frac{2my}{b} = m-l-n+r-a+b+c \end{cases}$$

Ferner, aus der zweiten Gleichung in (16) geht hervor:

---

*) Es ist

$$lmn = r^2(l+m+n)$$

denn nach (8) ist

$$ln = \frac{rac}{b} + r^2$$

oder

$$lm \,.\, nm = \left(\frac{rac}{b} + r^2\right)(b^2 - r^2)$$

oder

$$\left(\frac{rab}{c} + r^2\right)\left(\frac{rbc}{a} + r^2\right) = \left(\frac{rac}{b} + r^2\right)(b^2 - r^2)$$

Durch r dividirt und mit abc multiplicirt, entsteht die Gleichung (7).

$$\frac{n^2z^2}{c^2}-(a-l+r-m+n)\frac{nz}{c}=\frac{2(l+m+n)(a-l+r)+2mn-4n(a-l+r)}{4}$$

$$-\frac{mn\,.\,2ra}{4r^2}$$

und hieraus

$$\frac{2nz}{c}=a-l+r-m+n\pm(b-c)$$

Dies giebt zwei andere Wertpaare für z und y, nämlich:

$$\gamma\begin{cases}\frac{2nz}{c}=n-l-m+r+a+b-c\\ \frac{2my}{b}=m-l-n+r+a-b+c\end{cases}$$

$$\delta\begin{cases}\frac{2nz}{c}=n-l-m+r+a-b+c\\ \frac{2my}{b}=m-l-n+r+a+b-c\end{cases}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen in (16):

$$\varepsilon\begin{cases}\frac{2nz}{c}=n-l-m-r-a+b-c\\ \frac{2my}{b}=m-l-n-r-a-b+c\end{cases}$$

$$\zeta\begin{cases}\frac{2az}{c}=n-l-m-r-a-b+c\\ \frac{2my}{b}=m-l-n-r-a+b-c\end{cases}$$

$$\eta\begin{cases}\frac{2nz}{c}=n-l-m-r+a+b+c\\ \frac{2my}{b}=m-l-n-r+a-b-c\end{cases}$$

$$\theta\begin{cases}\frac{2nz}{c}=n-l-m-r+a-b-c\\ \frac{2my}{b}=m-l-n-r+a+b+c\end{cases}$$

Um die zugehörigen Werte von x zu finden, bilde man der Gleichung (17) gemäss folgende Gleichung:

$$2r\sqrt{\left(\frac{a-x}{a}\right)\left(\frac{c-z}{c}\right)} = \pm\left(\frac{lx}{a}+\frac{nz}{c}\right) = -b-n+r$$

woraus man nach Analogie erhält:

$$\begin{cases} \frac{2nz}{c} = n-l-m+r-b+(a+c) \\ \frac{2lx}{a} = l-m-n+r-b-(a+c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2nz}{c} = n-l-m+r-b-(a+c) \\ \frac{2lx}{a} = l-m-n+r-b+(a+c) \end{cases}$$

Hiervon ist der erste Wert von z mit dem von δ und der andere mit dem von β übereinstimmend, und dahin gehören demnach auch die eben gefundenen Werte von x. Auf gleiche Art ergeben sich nun auch die übrigen Werte von x. Die 8 Wertsysteme können nun am passendsten in folgender Ordnung zusammengestellt werden:

$$\gamma\begin{cases} \frac{2lx_1}{a} = l-m-n+r-a+b+c \\ \frac{2my_1}{b} = m-l-n+r-b+a+c \\ \frac{2nz_1}{c} = n-l-m+r-c+a+b \end{cases}$$

$$\zeta\begin{cases} \frac{2lx_2}{a} = l-m-n-r+a-b-c \\ \frac{2my_2}{b} = m-l-n-r+b-a-c \\ \frac{2nz_2}{c} = n-l-m-r+c-a-b \end{cases}$$

$$\alpha\begin{cases} \frac{2lx_3}{a} = l-m-n+r+a+b-c \\ \frac{2my_3}{b} = m-l-n+r-b-a-c \\ \frac{2nz_3}{c} = n-l-m+r+c-a+b \end{cases}$$

$$\theta\begin{cases}\frac{2lx_4}{a} = l-m-n-r-a-b+c\\ \frac{2my_4}{b} = m-l-n-r+b+a+c\\ \frac{2nz_4}{c} = n-l-m-r-c+a-b\end{cases}$$

$$\beta\begin{cases}\frac{2lx_5}{a} = l-m-n+r+a-b+c\\ \frac{2my_5}{b} = m-l-n+r+b-a+c\\ \frac{2nz_5}{c} = n-l-m+r-c-a-b\end{cases}$$

$$\eta\begin{cases}\frac{2lx_6}{a} = l-m-n-r-a+b-c\\ \frac{2my_6}{b} = m-l-n-r-b+a-c\\ \frac{2nz_6}{c} = n-l-m-r+c+a+b\end{cases}$$

$$\delta\begin{cases}\frac{2lx_7}{a} = l-m=n+r-a-b-c\\ \frac{2my_7}{b} = m-l-n+r+b+a-c\\ \frac{2nz_7}{c} = n-l-m+r+c+a-b\end{cases}$$

$$\varepsilon\begin{cases}\frac{2lx_8}{a} = l-m-n-r+a+b+c\\ \frac{2my_8}{b} = m--n-r-b-a+c\\ \frac{2nz_8}{c} = n-l-m-r+c+a+b\end{cases}$$

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die Werte von u, v, w festzustellen. Begnügen wir uns in dieser Hinsicht mit dem Werte von n des Wertsystems γ. Es ist nach (1)

$$u_1 = 2r = \frac{ry}{b} - \frac{rz}{c} \quad \text{oder} \quad = r - \frac{ry}{b} + r - \frac{cz}{c}$$

oder

$$u_1 = \frac{r(l+m+n-r+b-a-c)}{2m} + \frac{r(l+m+n-r+c-a-b)}{2u}$$

Anmerkung 1. Hinsichtlich der Vorzeichen in Gleichung (11) gilt wieder Gleiches wie in meiner 6ten Gleichung zu I. Was dort in Anmerkung 1. behauptet wurde, kann, auf Gleichung (11) in II. bezogen, allerdings begründet werden, jedoch ist diese Begründung nicht ohne Schwierigkeit.

Anmerkung 2. Es sei

$$a = 975, \quad b = 825, \quad c = 1287, \quad r = 495$$

also

$$l = 840, \quad m = 660, \quad n = 1188$$

dann ist

$$x_1 = +\frac{2535}{7}, \quad y_1 = +\frac{705}{2}, \quad z_1 = +377$$

$$x_2 = -\frac{10725}{7}, \quad y_2 = -\frac{4125}{2}, \quad z_2 = -715$$

$$x_3 = \pm 0, \quad y_3 = -2475, \quad z_3 = +715$$

$$x_4 = -1170, \quad y_4 = +765, \quad z_4 = -1053$$

$$x_5 = +\frac{2145}{4}, \quad y_5 = +165, \quad z_5 = -1573$$

$$x_6 = -\frac{6825}{4}, \quad y_6 = -1875, \quad z_6 = +1235$$

$$x_7 = -\frac{14625}{7}, \quad y_6 = -225, \quad z_7 = +\frac{1755}{2}$$

$$x_8 = +\frac{6435}{7}, \quad y_3 = -1485, \quad z_8 = -2431$$

XXIII.

Miscellen.

1.

Einige quantitative Fragen über zwölf Kugeln, die eine Kugel berühren.

Es ist bekannt, dass 12 und nicht mehr gleiche Kugeln eine gleiche Kugel berühren können ohne sich zu durchdringen. Diese 12 Kugeln lassen Raum zwischen sich, der jedoch bei keiner Anordnung zur Einfügung einer gleichen Kugel hinreicht. Von den vielen Arten den überschüssigen Raum zu bestimmen wollen wir nur einige untersuchen.

Eine Kugeloberfläche K werde von 12 Kugeloberflächen K_1, K_2, . . . K_{12} berührt. Ihre Mittelpunkte seien M, M_1, M_2, . . . M_{12}. Vorausgesetzt sei, dass keine Kugeln einander durchdringen. Wir ziehen nur solche Anordnungen in Betracht, wo alle Kugeln um eine Axe regelmässig gruppirt sind. Soviel sei allgemein bemerkt; wir wenden uns nun zu den einzelnen Bestimmungsweisen.

1.

Sind die Kugeln K_1, . . . K_{12} einander gleich, so ist das Mass des Raumes, den eine von ihnen auf K einnimmt, ihre centrale Projection auf K für das Centrum M. Es ergibt sich die Frage:

„Wie verhält sich die Summe der Projectionen aller 12 be-„rührenden Kugeln zu K?“

Die Projection von K_1 auf K ist eine Calotte. Calotten derselben Kugel verhalten sich wie ihre Pfeile. Ist r der Radius von

K, und sind die Radien der übrigen Kugeln unter sich gleich und zunächst $= \varrho$, so sind die Pfeile der Calotte und des ganzen K (als Calotte gedacht)

$$r - \frac{r\sqrt{(r+\varrho)^2 - \varrho^2}}{r+\varrho} \quad \text{und} \quad 2r$$

Bezeichnet also P die Projection von K_1 auf K, so ist

$$\frac{P}{K} = \tfrac{1}{2} - \frac{\sqrt{r(r+2\varrho)}}{2(r+\varrho)} \tag{1}$$

2.

Hieran knüpfen sich nun folgende Fragen:

„Wievielmal ist im Falle lauter gleicher Kugeln die Projection „einer Kugel in K enthalten?"

Für $\varrho = r$ findet man die Zahl:

$$\frac{K}{P} = \frac{4}{2-\sqrt{3}} = 4(2+\sqrt{3}) = 14{,}928\,2432 \tag{2}$$

Von so vielen Kugeln würden die Projectionen, abgesehen von ihrer Integrität, die Fläche K bedecken.

3.

„Welchen Teil von K nehmen für $\varrho = r$ die Projectionen aller „Kugeln ein?"

Aus Gl. (2) ergiebt sich die Zahl:

$$\frac{12P}{K} = 3(2-\sqrt{3}) = 0{,}803\,8476 \tag{3}$$

4.

Wir fügen zum System der 12 Kugeln die 20 notwendigen Zwischenräume oder Minima des Zwischenraums hinzu und fragen nach dem Verhältniss der so vermehrten Projectionen zu K.

Berühren K_1, K_2, K_3 einander und K, so sind ihre Mittelpunkte die Ecken einer gleichseitigen Pyramide $MM_1M_2M_3$, deren Seitenkanten $= r+\varrho$, Kanten an der Basis $= 2\varrho$: Die Ecke M hat 3 Seitenwinkel $= \varphi$ und 3 Flächenwinkel $= \psi$, wo

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\varrho}{r+\varrho}; \quad \cos\varphi = \frac{r^2+2r\varrho-\varrho^2}{(r+\varrho)^2}$$

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{r^2+2r\varrho-\varrho^2}{2r(r+2\varrho)} \tag{4}$$

Die Projection des ebenen Dreiecks $M_1M_2M_3$ auf K ist das sphärische Dreieck

$$= Mr^2 = (3\psi - 2\mathrm{R})r^2 \tag{5}$$

Sie umfasst 3 Sectoren der 3 Calotten P für den sphärischen Centriwinkel ψ und das von den Calotten eingeschlossene gesuchte Bogendreieck Q; daher ist

$$\begin{aligned} Q &= (3\psi - 2\mathrm{R})r^2 - \frac{3\psi}{4\mathrm{R}}P \\ &= (3\psi - 2\mathrm{R})r^2 - \tfrac{3}{2}(2-\sqrt{3})\psi r^2 \\ &= \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\psi - 2\mathrm{R}\right)r^2 = 0{,}035\,990\,\mathrm{R}r^2 \end{aligned} \tag{6}$$

und die Summe aller Projectionen

$$\begin{aligned} 12P' &= 12P + 20Q = 2\{15\sqrt{3}\psi - 4(3\sqrt{3}-1)\mathrm{R}\}r^2 \\ &= 0{,}893\,823\,K \end{aligned}$$

Vermehrte man also die Projection jeder Kugel um ihren Anteil an dem Minimum der Zwischenräume, so würden noch

$$\frac{K}{P'} = 13{,}4031$$

so vermehrter Kugelprojectionen, abgesehen von ihrer Integrität, auf K Platz haben, mithin der anfänglich genannte Satz durch die Grösse des Raumes nicht bewiesen sein.

5.

„Wie gross können die einander gleichen Kugeln $K_1 \ldots K_{12}$ „höchstens sein um die Kugel K zu berühren?"

Bilden die Mittelpunkte ein regelmässiges Ikosaeder, und berühren sich die Kugeln zu je dreien, so ersieht man leicht, dass die Kugeln nicht grösser werden können, da die Zwischenräume ihrer Projectionen ihre kleinsten Werte haben. In diesem Falle ist die Ecke des Tetraeders $M M_1M_2M_3$ nach Gl. (5)

$$M = 3\psi - 2\mathrm{R} \tag{7}$$

und 20 derselben müssen den räumlichen Vollwinkel d. i. 8R einnehmen. Nun ist nach Gl. (4)

$$r^2 + 2r\varrho - \varrho^2 = 2r(r+2\varrho)\cos\psi$$

Nach Gl. (7) aber ist, sofern M ein Zwanzigstel des Vollwinkels 8R

$$\psi = \tfrac{1}{5}\mathrm{R}; \quad \cos\psi = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

also

$$\varrho^2 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\, r(r+2\varrho) = 0$$

woraus:

$$\varrho = r\sqrt{5-2\sqrt{5}} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\, r = 1{,}108516\, r \qquad (8)$$

6

„Wie gross kann eine Kugel sein, wenn die übrigen der Mittel-„kugel gleich sind?"

Es sei angenommen, dass die Kugeln in regelmässigen Kränzen um eine Axe (Axe der z für M als Anfangspunkt der xyz) liegen, und zwar M_1 am positiven, M_{12} am negativen Ende der z Axe, M_2 bis M_6 ein Fünfeck in der Ebene $z = z$ mit dem Eckradius u, M_5 bis M_{11} ein Fünfeck in der Ebene $z = z_1$ mit dem Eckradius u_1 bildend. K_1 berührt die 5 Kugeln K_2 bis K_6, jede der letztern zwei der Kugeln K_7 bis K_{11} und diese wieder sämtlich K_{12}. K_{12} habe den Radius ϱ, alle übrigen den Radius r. Kürze halber sei

$$\varepsilon = \tfrac{1}{5}\mathrm{R}$$

Legt man die xz Ebene durch M_2, so werden die Coordinaten x; y; z von

M_1,	$= 0$;	0	$2r$
M_2, M_3, . . . M_6	$= u$,	$u\cos 2\varepsilon$, . . . ;	0,	$u\sin 2\varepsilon$ . . . ; z
M_7, M_8, . . . M_{11}	$= u_1\cos\varepsilon$,	$u_1\cos 3\varepsilon$ . . . ;	$u_1\sin\varepsilon$, . . . ;	z_1. $-(r+\varrho)$
M_{12}	0;	0;	

die Bedingungen der Berührungen von

KK_1	$4r^2 = 4r^2$
KK_2, etc.	$u^2+z^2 = 4r^2$
K_1K_2, etc.	$u^2+(z-2r)^2 = 4r^2$
K_2K_7, etc.	$u^2-2uu_1\cos\varepsilon+u_1^2+(z_1-z)^2 = 4r^2$
KK_7, etc.	$u_1^2+z_1^2 = 4r^2$
K_7K_{12}, etc.	$u_1^2+(z_1+r+\varrho)^2 = (r+\varrho)^2$
KK_{12}	$(r+\varrho)^2 = (r+\varrho)^2$

woraus nach Elimination von u^2+z^2 und $b_1^2+z_1^2$:

$$z = r; \quad u = \sqrt{3} \cdot r$$

$$\sqrt{3}u_1 \cos\varepsilon + z_1 - 2r; \quad u_1^2 + z_1^2 = 4r^2 \tag{9}$$

$$(r+\varrho)z_1 + 2r^2 = 0 \tag{10}$$

Die Gl. (9) werden erfüllt durch ($u_1 = 0$ und)

$$u_1 = \frac{4\sqrt{3}r\cos\varepsilon}{3\cos^2\varepsilon+1}; \quad z_1 = -2r\,\frac{3\cos^2\varepsilon-1}{3\cos^2\varepsilon+1}$$

nachher Gl. (10) durch

$$\varrho = \frac{2r}{3\cos^2\varepsilon+1}$$

Nun ist

$$\cos\varepsilon = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

daher

$$u_1 = 4\sqrt{3}\,\frac{7\sqrt{5}+1}{61}r = \frac{16\sqrt{3}\cdot r}{7\sqrt{5}-1} = 1{,}8913399r$$

$$z_1 = -2\,\frac{12\sqrt{5}-7}{61}r = -\frac{22r}{12\sqrt{5}+7} = -0{,}6502563r$$

$$\varrho = 4\,\frac{3\sqrt{5}-1}{11}r = \frac{16r}{3\sqrt{5}+1} = 2{,}0757105r$$

7.

„Wie gross können zwei diametral liegende gleiche Kugeln sein, „wenn die übrigen gleich der Mittelkugel sind?“

Die Anordnung sei wie im vorigen Falle, nur seien die Radien von K_1 und K_{12} beide $= \varrho$. Dann wird das Gesamtgebilde von der xy Ebene symmetrisch geteilt, mithin

$$u_1 = u; \quad z_1 = -z$$

Die Berührungsbedingungen reduciren sich auf drei:

$$u^2 + z^2 = 4r^2$$

$$u^2 + (z-r-\varrho)^2 = (r+\varrho)^2$$

$$2u^2(1-\cos\varepsilon) + 4z^2 = 4r^2$$

woraus:

$$z = \frac{2r^2}{r+\varrho}; \quad u^2 = \frac{6r^2}{1+\cos\varepsilon}$$

$$(r+\varrho)^2 = 2r^2\,\frac{1+\cos\varepsilon}{2\cos\varepsilon-1}$$

Dies ergibt die Werte:

$$u^3 = r\sqrt{6}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{5}}} = 1{,}8211860r$$

$$z = r\sqrt{2}\sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt[4]{5}}r = 0{,}5845005r$$

$$\varrho = r\left(\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+5}{2}}-1\right) = \frac{\sqrt[4]{5}}{2}r(\sqrt{5}+1) - r = 1{,}4091871r$$

8.

Die 12 Kugeln mögen in 4 regelmässigen Kränzen zu je 3 um die Axe liegen, numerirt:

$$(K_1K_2K_3)(K_4K_5K_6)(K_7K_8K_9)(K_{10}K_{11}K_{12})$$

so dass ihre Mittelpunkte 4 zur Axe normale Ebenen z_1, z, $-z_1$, $-z$ bestimmen. Wir fragen zunächst:

„Wie gross können höchstens die einander gleichen 6 Kugeln „der 2 äussersten Kränze sein, wenn die 6 übrigen Kugeln gleich „der Mittelkugel K sind?“

Die Antwort geht aus einer einfachen Betrachtung hervor.

Setzt man $z_1 = 0$, fallen also die Mittelpunkte des 2ten und 3ten Kranzes zusammen in die Aequatorebene, so umschliessen 6 Kugeln K_4 bis K_9, etwa in der Reihenfolge

$$K_4K_7K_5K_8K_3K_9$$

gerade die Mittelkugel, indem sie sich successive in 6 Punkten berühren. Verschiebt man aber von da aus die 2 Kranzebenen, so werden stets mindestens 3 Berührungen aufgehoben und der Raum für die 2 äussersten Kränze eingeengt. Folglich ist die gewählte Anordnung $z_1 = 0$ nicht nur möglich, sondern auch notwendig.

Auch in Betreff der 2 äussersten Kränze gehen wir vom einfachsten Falle aus und nehmen alle Kugeln einander gleich an. Bringen wir sie zur Berührung mit den angrenzenden Kränzen, so bildet jeder Mittelpunkt der ersteren mit 2 Mittelpunkten der letzteren und dem Mittelpunkt M die Ecken eines regelmässigen Tetraeders, weil alle 4 Abstände gleich dem doppelten Radius sind. Man hat also die 3 Tetraeder

$$(M_1M_4M_7M)\ (M_2M_5M_6M)\ (M_3M_6M_9M)$$

Nun liegen M_4MM_8 in einer Geraden. Die Projectionen der Pyramidenspitzen M_1 und M_2 auf M_4M_8 halbiren die Strecken M_4M

und MM_8. Folglich ist die von ihnen begrenzte Strecke gleich dem doppelten Radius. Diese Strecke ist wieder als Gegenseite eines Rechtecks $= M_1M_2$; daher berühren sich K_1 und K_2, analog je 2 Kugeln jedes äussern Kranzes. Grösser kann keine Kugel werden. Die Antwort ist also: „Wenn keine Kugel $< K$ ist, so können bei der genannten Anordnung nur alle Kugeln $= K$ sein."

Damit ist offenbar die Frage nach dem Maximum der Kugeln eines äussern Kranzes, wenn alle andern $= K$ sind, schon abgeschnitten; denn die Antwort folgt schon aus geringerer Voraussetzung.

Die Frage nach den möglichen Stellungen von lauter gleichen Kugeln ergibt jedoch noch 2 Lösungen. Die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 waren nämlich die Spitzen von 3 Pyramiden, deren Grundflächen keine Seite gemein haben. Zwischen diesen 3 Dreiecken liegen 3 andere. Alle 6 stossen nur in M zusammen. Man kann nun die entsprechenden Pyramiden auf der andern Seite der Aequatorebene entweder auf dieselben Dreiecke als Grundflächen bauen oder auf die 3 andern. Beide Fälle ergeben 2 wesentlich verschiedene Gesamtfiguren.

Die Berührungsbedingungen sind:

$$u^2+z^2 = 4r^2; \quad u_1^2 = 4r^2$$

$$3u^2 = 4r^2; \quad \left(u-\frac{\sqrt{3}u_1}{2}\right)^2+\frac{u_1^2}{4}+z^2 = 4r^2$$

woraus übereinstimmend hervorgeht:

$$u = \frac{2r}{\sqrt{3}}; \quad z = \frac{2\sqrt{2}r}{\sqrt{3}}; \quad u_1 = 2r$$

Die Kugeln K_1 bis K_{12} auf K central projicirt geben 12 Calotten, deren Inhalt in Gl. (3) gefunden ist. Zwischen ihnen liegen 8 gleichseitige concave Bogendreiecke. Erstere sind auch schon berechnet und ihr Inhalt in Gl. (6) angegeben.

Um letztere direct (d. h. nicht als Rest) zu berechnen, gehen wir von der vierkantigen Centralecke aus, deren Kanten durch die Mittelpunkte der 4 Bogen gehen, z. B. MM_1, MM_4, MM_5, MM_2. Die 4 Mittelpunkte sind die Ecken eines Quadrats über einer Seite $= 2r$. Hiernach sind die Seitenwinkel der Centralecke $(M) = \frac{1}{2}R$, für die Flächenwinkel ψ_1 findet man daraus

$$\cos\psi_1 = -\tfrac{1}{3} \quad \text{also} \quad \psi_1 = 2R - \psi$$

und die Ecke wird

$$(M) = 4\psi_1 - 4R = 4R - 4\psi \qquad (11)$$

Die Centralprojection des obigen Quadrats auf K,[1] d. i. $(M)r^2$ umfasst nun ausser dem gesuchten Bogenviereck Q_1 noch 4 Sectoren der Calotte P für den Centriwinkel ψ_1, zusammen $= \frac{\psi_1}{R} P$; folglich ist, mit Anwendung von Gl. (3),

$$Q_1 = (4R - 4\psi)r^2 - (2R - \psi)2(2 - \sqrt{3})r^2$$

Demnach sind die verschiedenen Figuren auf K: Kugelprojection, Calotte

$$P = 2(2 - \sqrt{3})Rr^2 = 0{,}535\,8984\,Rr^2$$

Projection des Raumes zwischen 3 Kugeln, sphärisches Bogendreieck

$$Q = (\tfrac{3}{2}\sqrt{3}\psi - 2R)r^2 = 0{,}035\,990\,Rr^2$$

Projection des Raumes zwischen 4 Kugeln, sphärisches Bogenviereck

$$Q_1 = \{4(\sqrt{3} - 1)R - 2\sqrt{3}\psi\}r^2 = 0{,}213\,550\,Rr^2$$

wo

$$\psi = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2} = 0{,}783\,6531\,R$$

Werte die (sogar unabhängig von ψ) die Relation

$$K = 12P + 8Q + 6Q_1 = 8Rr^2$$

behufs ihrer Controle erfüllen.

Die hier getroffenen 2 Anordnungen zeichnen sich durch die Eigenschaft aus, dass 13 gleiche Kugeln sich in 36 Punkten berühren, und keine einzeln verschiebbar ist ohne eine Berührung aufzuheben. Die Mittelpunkte der 12 äusseren Kugeln bilden ein gleichkantiges Polyeder eingeschlossen von 6 Quadraten und 8 gleichseitigen Dreiecken, ist also ein tessarakaidekaeder eingeschrieben in eine Kugel von einem Radius gleich der Kante.

R. Hoppe.

2.

Ein Beitrag zur Lösung des Problems der Dreiteilung des Winkels.

Bekanntlich ist eine elementare Lösung des Problems der Trisection des Winkels bis jetzt noch nicht gegeben worden. Diese Thatsache hat in Mathematikerkreisen erst zur Hypothese und später zur Ueberzeugung geführt, dass eine elementare Lösung des Problems überhaupt unmöglich sei. Die hiefür beigebrachten Beweise

scheinen mir jedoch weder einwandfrei, noch streng genug zu sein, um die Aussichtslosigkeit jedes Lösungsversuches nach dieser Richtung hin zu begründen. Die im Nachfolgenden gegebene Lösung, bei welcher lediglich elementare Hilfsmittel angewendet werden, beruht auf der Theorie der Näherungsmethoden; liefert jedoch ein Resultat mit jedem gewünschten Grade von Genauigkeit. Die hiebei angewandte Methode kann immerhin als „elementar' bezeichnet werden, unter der Voraussetzung, dass alle Näherungsmethoden nicht ohne weiteres unter den Begriff des höhern Calcüls zu subsumiren sind. Dies scheint bei vorliegender Lösung jedoch tatsächlich der Fall zu sein, da wie erwähnt, nur elementare Hifsmittel zur Anwendung kommen. Von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet, dürfte die nachstehend gegebene Lösung für die Beurteilung der Lösbarkeit des Problems jedenfalls von principieller Bedeutung sein.

Es sei ABC der in drei Teile zu teilende Winkel.

Man schneide mit dem beliebig gewählten Radius Aa auf den beiden Schenkeln die gleichen Strecken Aa, Ab ab und ziehe durch die so bestimmten Punkte a und b die zu den Schenkeln AB und AC parallelen Geraden ay und bz. Werden nun in gleichen Abständen von a, resp. mit stetig wachsenden Halbmessern Kreisbögen beschrieben ab, a^1b^1, . . . , $a^{20}b^{20}$, so sind je zwei zwischen den parallelen Geraden AB und bz, bzhw. AC und ay liegende Kreisbögen eines und desselben Kreises einander gleich, z. B.

$$a^{20}d^{20} = b^{20}c^{20}$$

Da die von den Geraden ay und bz eingeschlossenen Kreisbögen vom Schnittpunkt o nach beiden Seiten hin stetig wachsen, muss es notwendig einen von den Geraden ay und bz begrenzten Kreisbogen geben, welcher gleich ist zweien, von den Geraden AB und bz, bzhw. AC und ay abgeschnittenen Bögen. Zur Auffindung dieses Kreisbogens genügt die Erwägung, dass derselbe einerseits von der Geraden ay bzhw. bz geschnitten werden muss, mithin seine Endpunkte in den Geraden selbst liegen müssen, andrerseits, dass der eine Endpunkt in der Linie liegen wird, welche die Halbirungspunkte der aufeinander folgenden Kreisbögen a^6o, . . . $a^{21}c^{21}$ verbindet. Da sich diese Curve, wenn man hinreichend viele Kreisbögen halbirt, mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit construiren lässt, so kann auch ihr Schnittpunkt i mit der Geraden bz so genau, als man wünscht, bestimmt und damit der Teilungspunkt gefunden werden. Ein zweiter Teilungspunkt e kann auf ganz analoge Art innerhalb der Fläche Ab^6oa^6 gefunden werden. Selbst-

Aerständlich lassen sich zwei symmetrische Teilungspunkte in ähnlicher Weise auf der Strecke bo resp. oc^{21} bestimmen.

Bemerkt möge noch werden, dass ein auf der angegebenen Lösung beruhender, von mir construirter Apparat vom Kaiserl. Patentamte in Berlin für patentfähig erklärt wurde.

Lothar v. Köppen in München.

Litterarischer Bericht

IL.

Methode und Principien.

Neue Bahnen in der Weltanschauung und Naturanschauung. Von Dr. F. C. Albert Kaiser. Dresden-A. 1892.

Dieser neue Versuch einer kosmischen Theorie mag vielleicht auf den ersten Seiten der Schrift einige Hoffnungen erwecken, dass darin den kosmischen Fragen eine freiere Kritik zuteil werden würde. In der Tat fängt die Schrift damit an den Blick zu erweitern und der Voreingenommenheit entgegen zu treten, gibt an, welche Sätze sie als sicher voraussetzt, und legt Wert auf Verständlichkeit. Was letztere betrifft, so ist es ja offenbar unmöglich ohne Entlehnung von Begriffen etwas zu erklären: wir stützen uns teils auf exact wissenschaftliche, teils auch auf vulgäre Begriffe, indem wir, was diese vermissen lassen, prüfen und ergänzen. Dies geschieht auch hier meistenteils, und wenn mitunter die Prüfung geläufiger Begriffe und Vorstellungen unterbleibt oder inexacte Sprache geführt wird, so wird der Leser wol entgegenkommend die Richtigstellung selbst übernehmen. Beispiele solcher inaxacter Rede sind der Misbrauch des Wortes „Tatsache" für Sätze, die der Verfasser nicht anfechten will, der Ausdruck „übernatürliche Ursache" statt unbekannte Ursache u. a. m. Aber von da an, wo der Verfasser seine Hypothese entwickelt, hört die Verbesserlichkeit seiner Redeweise auf. Gerade der wichtigste und elementarste Begriff, der der Ursache, über dessen Bedeutung sich das gemeine Denken gar keine Rechenschaft zu geben

uns hierüber sowie über alles, was das Buch im Dunkeln lässt, nicht den geringsten Aufschluss. Hoppe.

Principles of the algebra of physics. —

The imaginary of algebra being a continuation of the paper „Principles of the algebra of physics". —

On the definitions of the trigonometric functions. —

The fundamental theorems of analysis generalized for space. —

On exact analysis as the base of language. — — — By Alexander Macfarlane, M. A., D. Sc., L. L. D., Fellow of the Royal Society of Edinburgh, Professor of physics in the university of Texas. Norwood Press 4891. 1892.

Die 4 ersten Schriften enthalten die genauern Bestimmungen und Einführungen, mittelst welcher der Verfasser bestrebt ist die Quaternionentheorie exact zu machen, nebst historischen Angaben; die letztgenannte Schrift, Abdruck aus Transactions of the Texas Academy of Science, die Anwendung dieser Theorie für eine Weltsprache. Hoppe.

Uniplanar algebra, being part I of a propaedeutic to the higher mathematical analysis. By Jrving Stringham, ph. D., Professor of mathematics in the university of California. San Francisco 1893. Berkeley press.

Algebra bedeutet die Lehre von der allgemeinen Grösse, wie sie der Analysis zugrunde liegt. Die Methode ist die geometrische. Die Grössen und ihre Addition werden durch Strecken, die Multiplication durch Proportionen an geschnittenen Parallelen, die Potenzirung durch Spiralcurven dargestellt. Ferner werden die Lehren von den cyklischen Functionen, von graphischen Transformationen von den Gleichungen und complexen Wurzeln entwickelt.

H.

Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. Von Dr. Heinrich Schotten. Zweiter Band. Leipzig 1893. B. G. Teubner.

Der erste Band dieses Werkes ist nicht in diesem Archiv, aber in vielen andern Zeitschriften besprochen, welche nach Aussage des Verfassers sich sämtlich anerkennend darüber äussern. Da darin lauter gesonderte Themata behandelt werden, so ist überhaupt kein

Anlass auf den ersten Band zurück zukommen. Die Themata des 2. Bandes sind: Richtung, Abstand, Winkel, Parallelen, 4 Grundbegriffe, deren doctrinäre und methodische Behandlung jahrtausende lang eine offene Frage geblieben ist. Es liegt hier ein Fall vor, der gar nicht einzig in der Geschichte der Wissenschaften dasteht: grosse Anhäufung von Litteratur ohne sichtlichen Fortschritt. Er fordert natürlich dazu auf, die grösstenteils einander ignorirenden Bestrebungen durch übersichtliche Nebeneinanderstellung der Ansichten zusammenzuführen. Einer gleichen Absicht entsprechend zeigt sich auch das gegenwärtige Unternehmen, welches zunächst die jene Grundbegriffe betreffende und zwar auf die Lehrmethode gerichtete Litteratur zusammenstellt. Um die an einem analogen Unternehmen gemachten Erfahrungen nutzbar zu machen, sei das von Baumann: „Raum und Zeit" — erwähnt, worin die Litteratur über beide Begriffe vom Altertum bis in die neuste Zeit zusammengestellt ist. Dass hier die Gesichtspunkte des Unterrichts nicht ins Spiel kommen, macht keinen wesentlichen Unterschied; denn Klarheit der Sache ist doch jedenfalls erstes Erforderniss, ehe man daran denken kann sie zu lehren. Baumann versucht am Schlusse den Begriff des Raumes aus allen Ansichten als Resultat zu ziehen. Die Aufstellung ist 6 Seiten lang und enthält nur negative Bestimmungen. Es ergibt sich also, wie sich erwarten liess, dass der Gedanke verfehlt war. Wenn man öfters von divergirenden Meinungen sagt, dass die Wahrheit in der Mitte liegen wird, so gilt in der Wissenschaft sicher das Gegenteil, die Wahrheit liegt stets ausserhalb der nicht befriedigenden Meinungen. Soll also eine Zusammenstellung vieler sich nicht einigenden Ansichten einen Fortschritt anbahnen, so muss sie mit einer Kritik verbunden sein darauf gerichtet Ungründlichkeit und Befangenheit als Ursache des Stagnirens ans Licht zu ziehen. In der Tat lässt sich das Werk von Schotten mehr auf Kritik ein als das von Baumann, wenn auch nicht in allen Punkten, wo es zu wünschen wäre. Es sei voraus bemerkt, dass wir die Würdigung des Verdienstes, dass sich der Verfasser durch das Werk erworben hat, nicht von der geübten Kritik abhängig machen wollen, indem wir gegen einen principiellen Punkt derselben Einspruch tun. Einleitend erklärt der Verfasser Richtung und Abstand für die 2 Elemente, welche die Lage eines zweiten Punkts B relativ zu einem ersten A bestimmen. J. C. V. Hoffmann, welcher als erster Autor auftritt, sagt nun: „Richtung setzt voraus ein Ziel und einen Ausgangspunkt". Schotten fügt interpretirend hinzu, dass das Ziel nur ein zweiter Punkt sein kann, und erklärt sich mit Hoffmann darin einverstanden, dass mit dem Setzen der 2 Punkte A, B, letzteren als Ziel gedacht, die Richtung gegeben sei. Dies ist ein verhängnissvoller Irrtum Durch das Ziel B ist erst das Problem gestellt,

von A aus B zu erreichen, aber noch nicht gelöst. Ist von A aus B nicht sichtbar, so kann man es in der ganzen Welt vergeblich suchen. Kann man es sehen, so ist ein Lichtstrahl BA, das ist (geometrisch) eine Gerade, gegeben und der Punkt B überflüssig. Man kommt also, erst durch Berichtigung, nur auf die gewöhnliche Erklärung der Richtung durch eine Gerade zurück. Hiermit ist indes die Frage nach dem Begriffe der Richtung keineswegs erledigt. Der gefundene ist offenbar bedeutungslos; denn er fügt als Eigenschaft der Geraden nichts zum Wesen der Geraden hinzu. In der Tat ist auch die absolute Richtung ohne Bedeutung und gewinnt sie erst als relative. Beachtet man dies, so entsteht die Frage: Wie kann man die qualitative Verschiedenheit der Richtung exact quantitativ darstellen? — und findet ihre Lösung in der Einführung des Winkels und der Theorie seiner Messung. So ist denn der Grundfehler, der bisher die exacte Definition der Richtung vereitelt hat, der, dass man die Richtung, ihrer bekannten relativen Natur zuwider, durchaus hat absolut bestimmen wollen, anstatt sich mit ihrer einfachsten Darstellung durch eine Gerade solange zu begnügen, bis die Einführung des Winkels (als Winkelfigur) das Mittel bietet, sie in ihrer Relativität zu einer festen Richtung zu definiren. Dieser Fehler hat nun, wie die beigebrachte Litteratur zeigt, verwirrend auf die methodische Behandlung des Winkels eingewirkt. Wo überhaupt die Betrachtung von Richtungen zugezogen wird, findet sich das Deductionsverhältniss verkehrt aufgefasst, als ob der Begriff des Winkels auf die Richtungen der Schenkel gegründet werden sollte, möchten die Richtungen nun definirt sein oder nicht, während in Wirklichkeit der Begriff der Richtung nur auf den Winkel gegründet werden kann. Dem Verfasser fällt es auf, dass die meisten Autoren, die von Richtungen reden, den Begriff undefinirt lassen; den Grund dieser Erscheinung enthüllt er nicht. Hoppe.

Die Schalablagerungstheorie. I. II. Eine Erweiterung der Laplace'schen Nebularhypothese. Von Ferdinand Kerz. Leipzig und Berlin 1891. 1892. Otto Spamer.

Soviel sich aus dem geringen Teile der beiden Schriften, der wirklich der Sache gewidmet ist, entnehmen lässt, will der Verfasser, der Laplace'schen Entstehung der Planeten aus der Sonnenatmosphäre folgend, nun die besondere Gestalt der Erde aus diesem Ursprung herleiten, namentlich die Gebirge als von aussen angeworfen erklären. Doch hätte er seine Ansicht wol in besserer Ordnung entwickeln können. Hoppe.

Lösung des Problems: Die Quadratur des Kreises. Berichtigung der Zahl π. Von Oscar Flor, caud. phys. Riga 1892. Alexander Stieda.

Eine 8 Seiten lange Rechnung ergibt: $\pi = 3{,}2$. Wo liegt der Fehler? H.

Entwurf einer neuen Integralrechnung auf Grund der Potenzial-, Logarithmal- und Numeralrechnung. Von Dr. Julius Bergbohm. Die rationalen algebraischen und die goniometrischen Integrale. — Zweites Heft: Die irrationalen, exponentiellen, logarithmischen und cyklometrischen Integrale. Leipzig 1892. B. G. Teubner.

Der auch dieser Schrift zugrunde liegende Irrtum des Verfassers ist noch derselbe wie in seinen früheren, bereits besprochenen Schriften. Hoppe.

Die Quadratur des Kreises. Von Dr. Andr. Ozogowski. Ostrowo 1893. W. Niesiolowski.

Am Schlusse einer Reihe teils selbstverständlicher, teils unrichtiger Aussagen, meist ohne sichtlichen Zusammenhang, wird angegeben, der Kreisumfang sei $\frac{48}{7}$ des Radius. Hoppe.

Kritische Grundlegung der Arithmetik. Von Heinrich Kloock. Bonn 1893. Röhrscheid u. Ebbecke.

Der erste der 4 Abschnitte gibt Aufzeichnungen des Verfassers im Auszug aus seiner Schrift: „Neue Arithmetik" — nach Zeit, Gegenständen und Resultaten, die übrigen eine Kritik der Arithmetik von Euklid, Euler und Dühring. In systematischer Form beabsichtigt er die arithmetischen Hauptlehren noch herauszugeben. Aus der Kritik, welche sich fast ausschliesslich auf die Negativen und Imaginären bezieht, die Irrationalen kaum erwähnt und unter den Erweiterungen des Zahlbegriffs gar nicht mit aufführt, lässt sich keine Andeutung entnehmen, welche definitive Gestalt der Verfasser den Lehren zu geben im Sinne hat, zumal Einfachheit und Entfernung aller Subtilitäten nirgends als Ziel erscheint. Auf diejenigen Transformationen der Begriffe, welche der erfolgreiche Gang der Wissenschaft fordert, muss auch die principielle Kritik eingehen; davon kann sie auch die Nichtexistenz der eingeführten Rechnungselemente nicht entbinden. Die Bedeutung unmög-

licher Gleichungen, die Rechtfertigung approximativer Darstellung von Grössen u. s. w. alles dies ist bekannt genug. Dies ist in gegenwärtiger Kritik nicht ganz unbeachtet geblieben, doch erscheint es nicht als leitender Gedanke. H.

Die nichteuklidische Geometrie vom Altertum bis zur Gegenwart. Eine historisch-kritische Studie. Von Dr. A. Karagiannides. Berlin 1893. Mayer u. Müller.

Die Schrift beschränkt sich darauf, charakteristische Aufstellungen mit wörtlicher Wiedergabe vorzuführen und zu beurteilen ohne auf Deduction und Begründung weiter einzugehen als es die Deutlichkeit erfordert. Das Altertum wird nur in dem Sinne als beteiligt hineingezogen, sofern alle Versuche den Parallelensatz zu beweisen nichteuklidisch sind; um solche handelt es sich von da an nicht weiter. Es werden dann die Aeusserungen von Gauss, Lobatschewski, Riemann, Helmholtz, Klein, Poincaré und Weierstrass beleuchtet. Zum Schlusse stellt der Verfasser, angeblich als Zusammenfassung der vorhergehenden Kritik 5 Sätze auf, deren letzter lautet: „Die verschiedenen sogenannten nichteuklidischen Geometrien sind tatsächlich nichts weiter als eine ganz willkürliche façon de parler ohne wissenschaftliche Bürgschaft und Ueberzeugung.“ Dies mag wol den Eindruck aussprechen, den auf ihn das Vorgehen von Poincaré gemacht hat. Hoppe.

Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet von Dr. G. Frege, A. O. Professor an der Universität Jena. I. Band. Jena 1893. Hermann Pohle.

Laut Vorwort sind die negativen, gebrochenen, irrationalen und complexen Zahlen, die Addition, Multiplication u. s. w. von der Betrachtung ausgeschlossen. Was dann von Arithmetik noch übrig bleibt, ist das Zählen, und hiervon in der Tat handeln die am Schlusse in Worten aufgestellten Grundgesetze. In wiefern aber diese ziemlich complicirten Gesetze Grundlage irgend eines Teils der Arithmetik sein können, wird vielleicht der 2. Band enthüllen, wenn er über Gesichtspunkte weniger schweigsam ist als der erste.
Hoppe.

Tabellen.

Vierstellige logarithmische Tafeln der natürlichen und trigonometrischen Zahlen nebst den erforderlichen Hilfstabellen. Für den Schulgebrauch und die allgemeine Praxis bearbeitet von E. R. Müller. Stuttgart (1893). Julius Maier.

Ausser den genannten 2 Tafeln steht auf denselben 32 Seiten noch eine Tafel für die Logarithmen von Summen und Differenzen. Die Tafel der Briggs'schen Logarithmen ist für die Zahlen 1000 bis 3000 und 300 bis 1000 ausgeführt, die der trigonometrischen Functionen für alle Minuten mit feinerer Teilung für kleine Winkel. H.

Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln nebst einigen physikalischen und astronomischen Tafeln, für den Gebrauch an höheren Schulen zusammengestellt von C. Rohrbach, Dr. phil. Oberlehrer am Gymnasium Ernestinum zu Gotha. Gotha 1893. E. F. Thienemann.

Die Logarithmen sind ausgeführt für die Zahlen 1 bis 2000. Am Ende jeder Zeile ist zu leichterer Vergleichung der Anfang der folgenden hinzugefügt. Die Winkelteilung geht bis auf Zehntel Grad, für kleine Winkel bis auf Minuten. H.

Fünfstellige Tafeln für die Zehner-Logarithmen der natürlichen und trigonometrischen Zahlen. Herausgegeben von Josef Schnellinger, k. k. Professor. Wien 1892. Manz.

Der Verfasser hat erfinderisch dafür gesorgt den Fehler der abgekürzten Angaben zu verkleinern. Die Anweisung dazu ist nicht leicht zu verstehen. Und sollte er während der grossen Arbeit nicht gemerkt haben, dass man das Beabsichtigte viel leichter und viel besser haben kann? Statt des Buchstabens oder Zeichens, das er hinter jeden Decimalbruch setzt, brauchte er nur die nächst folgende Decimalziffer zu schreiben; dann hätte sich der Fehler auf ein Zehntel seines Wertes verkleinert, was er doch mit aller Mühe noch lange nicht erreicht. Hoppe.

Sammlung fünfstelliger logarithmischer, trigonometrischer und nautischer Tafeln nebst Erklärungen und Formeln der Astronomie. Von Dr. W. Ligowski, Professor an der Kaiserlichen Marine-Akademie und Schule in Kiel. Zweite Auflage. Kiel 1892. Paul Toeche.

Laut Vorwort sind die Tafeln vor einigen Jahren bei der Kaiserlichen Kriegsmarine eingeführt worden. Sie enthalten alle Tabellen, welche für die Berechnungen der praktischen Nautik, bei Benutzung des nautischen Jahrbuchs, nötig sind, in einer Form, welche den Gebrauch der meisten derselben auch für andere Anwendungen der Mathemathik bequem gestattet. Die im nautischen Jahrbuch befindlichen Hülfstafeln, sowie einige weniger wichtige Tafeln sind in dieser Auflage fortgelassen und dafür andere, zur Abkürzung der Berechnungen dienende aufgenommen worden. Der Anhang I. hat einige Erweiterungen erhalten; unter anderem hat der Verfasser eine einfache Methode gegeben, nach welcher ohne besondere Tafeln eine zweite Correction der Reduction auf den Meridian bestimmt werden kann. H.

Physik.

Die Mechanik der Wärme in gesammelten Schriften von Robert Mayer. Dritte, ergänzte und mit historisch-litterarischen Mitteilungen versehene Auflage. Herausgegeben von Dr. Jacob J. Weyrauch, Professor an der technischen Hochschule zu Stuttgart. Stuttgart 1893. J. G. Cotta.

Die Abschnitte des Buches sind folgende: Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur; die organische Bewegung in ihrem Zusammenhange mit dem Stoffwechsel; Beiträge zur Mechanik des Himmels; Bemerkungen über das mechanische Aequivalent der Wärme; über die Herzkraft; über das Fieber; über notwendige Consequenzen und Inconsequenzen der Wärmemechanik, über Erdbeben; über die Bedeutung unveränderlicher Grössen; über die Ernährung; über veränderliche Grössen; die Toricelli'sche Leere; über Auslösung. H.

Die Lehre von der Elektricität. Von Gustav Wiedemann. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Zugleich als vierte Auflage der Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. Erster Band. Mit 298 Holzstichen und 2 Tafeln. Braunschweig 1893. Friedrich Vieweg und Sohn.

Der erste Band enthält: historische Einleitung, Erregung und Eigenschaften der Elektricität, Berührungselektricität, das Ohm'sche Gesetz, Leitungswiderstand, elektromotorische Kraft, Galvani'sche Elemente bei Leitern, Elektricitätserregung bei Berührung von Nicht-

leitern, bei Aenderung des Aggregatzustandes, Elektrisir- und Influenzmaschinen, Strömungsströme, elektrische Endosmose. Bei einer Lehre von der Elektricität kann natürlich an keine systematische Theorie gedacht werden. Sie gibt vielmehr die zu Gebote stehenden Mittel an, durch Beobachtung und Rechnung die Erscheinungen, ihre Gesetze und die sie betreffenden Fragen zu untersuchen, was vielleicht bisher in keinem Gesamtwerke so vollständig nach heutigem Standpunkte geschehen ist. H.

Einleitung in die theoretische Physik von Viktor von Lang, Professor der Physik an der Universität Wien. Zweite, umgestaltete und vermehrte Auflage. Mit 126 eingedruckten Holzstichen. Braunschweig 1891. Friedrich Vieweg und Sohn.

Das Buch umfasst die Mechanik, die Lehren von der Schwere, dem Magnetismus, der Elektricität, den festen Körpern, Flüssigkeiten, Gasen, Licht und Wärme. Es ist dazu bestimmt den Uebergang von den Mittelschulen zum Studium zu erleichtern. Bekanntschaft mit der Differentialrechnung wird vorausgesetzt, ist also vorerst zum Verständniss einiger Beweise zu erwerben. Grösser als diese Forderung möchte jedoch die sein, die nötige Vertrautheit mit dem Experimentiren zu erlangen. H.

Thermodynamische theorie der capillariteit in de onderstelling van continue dichtheidsverandering. Door J. D. van der Waals. Amsterdam 1893. Johannes Müller. (Verhdl. d. Kon. Ak. v. Wet. te Amsterdam, 1. sectie, deel 1. Nr. 8.)

La Place und Gauss behandelten die Capillaritätstheorie als statisches, Gibbs infolge der neuen Wärmetheorie als dynamisches Problem. Von letzterer Auffassung unterscheidet sich wieder die gegenwärtige, sofern jene unstetige, diese nur stetige Dichtigkeitsänderung zulässt. Grundprincip des thermodynamischen Gleichgewichts ist hier: Ein Stoff erfüllt einen gegebenen Raum so, dass bei gegebener Energie die Entropie ein Maximum ist H.

Ueber elektrische Kraftübertragung, insbesondere über Drehstrom. Ein gemeinverständlicher Experimentalvortrag. Von Braun, o. ö. Prof. der Physik an der Universität Tübingen. Tübingen 1892. H. Laupp.

Der ursprüngliche Vortrag erläutert die auf der internationalen elektrotechnischen Ausstellung in Frankfurt a. M. in grossem Masse

vorgeführte elektrische Kraftübertragung zwischen Frankfurt und Lauffen a. Neckar. Die gedruckt vorliegende Wiedergabe fügt manche Belehrung hinzu und ersetzt Gezeigtes durch Abbildungen.

H.

Lehrbuch der absoluten Masse und Dimensionen der physikalischen Grössen. Mit 352 Fragen, 545 Erklärungen und einer Sammlung von 561 gelösten und ungelösten Aufgaben. Von Dr. H. Hovestadt. Stuttgart 1892. Julius Maier.

Das Vorliegende ist ein Band von „Kleyers Encyklopädie". Die ganze Lehre ist in eine Reihe von Fragen und Antworten mit einzeln beigefügten Erklärungen zerfällt. Ausser einer historischen Einleitung ist nichts im Zusammenhang vorgetragen. H.

On the electric strength of solid, liquid ond gaseous dielectrics. By Alexander Macfarlane and C. W. Pierce. The Physical Review. Vol. I. Nr. 3.

Macfarlane und später Steinmetz hatten übereinstimmend gefunden, dass die erforderliche elektrische Spannung, bei welcher ein Funke eine dielektrische Schicht durchbricht, deren Dicke umgekehrt proportional ist für liquide (nicht angegeben welche) und gasförmige Dielektrika, für feste hingegen constant. Aus den hier beschriebenen Versuchen von Pierce folgt aber, dass sich liquide (vielleicht andere?) Schichten ebenso verhalten wie feste, und nur Gase eine Ausnahme machen — eine Mitteilung zugleich als Lebenszeichen der neuen Zeitschrift, welche in New York bei Macmillan u. Co. seit Aug. 1893 zweimonatlich erscheint. H.

Beiträge zu einzelnen Teilen der mathematischen Physik, insbesondere der Elektrodynamik und Hydrodynamik, Elektrostatik und magnetischen Induction. Von Dr. Carl Neumann, Professor der Mathematik an der Universität Leipzig. Mit Figuren im Text. Leipzig 1893. B. G. Teubner.

Der Verfasser constatirt zunächst, dass die bis jetzt aufgestellten mechanischen Theorien der Wärme, Elektrodynamik und des Magnetismus in ihren Consequenzen zu Widersprüchen führen. Demzufolge sei nicht darauf zu rechnen, dass es möglich sei diese Forschungszweige auf den Boden der reinen Mechanik zu gründen, vielmehr

scheine ein jeder ausserdem sein eignes Princip zu haben. Eine definitive Grundlegung könne erst auf längerem Wege erhofft werden; die gewonnenen Erfolge auf rein mechanischer Basis seien eine Vorbereitung dazu; das erste müsse nun sein, durch Anwendung auf allerhand Aufgaben die Consequenzen zu studiren. Derartigen Untersuchungen sei das vorliegende Werk gewidmet. Die Gegenstände sind bezeichnet: Präliminarien (Geometrie betreffend); zur Elektrodynamik; über elektrische Flächenströme; über elektrische Ströme im Innern und an der Oberfläche eines Körpers; zur Hydrodynamik; das Hamilton'sche Princip in seiner Anwendung auf hydrodynamische Probleme; über die Analogien zwischen Hydrodynamik und Elektrodynamik; zur Elektrostatik; zur Theorie des inducirten Magnetismus; über die Verwandlung eines gegebenen Raumes in einen einfach zusammenhängenden. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XLII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Frobenius, G., Gedächtnissrede auf Leopold Kronecker. Berlin, Georg Reimer. 1 Mk. 50 Pf.

Kundt, A., Gedächtnissrede auf Werner v. Siemens. Ebd. 1 Mk. 50 Pf.

Mayer, R., kleinere Schriften u. Briefe. Nebst Mittheilgn. aus seinem Leben. Hrsg. v. J. J. Weyrauch. Stuttgart, J. G. Cotta Nachf. 10 Mk.

Obenrauch, F. J., Mumge, der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft. Eine mathematisch-histor. Studie. Progr. Brünn, Selbstverlag. 2 Mk.

Obermayer, A. v., zur Erinnerung an Josef Stephan, k. k. Hofrath u. Professor an der Universität in Wien. Wien, W. Braumüller. 1 Mk. 40 Pf.

Methode und Principien.

Doms, Frz., Doms'sche Rechnenmethode. Hrsg. v. Alfr. Doms. Berlin, Friedländer's Buchdr. 2 Mk.

Frege, G., Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. 1. Bd. Jena, H. Pohle. 12 Mk.

Gallasch, H., die Grundlagen der Algebra im Kant'schen Sinne. Progr. Berlin, R. Friedländer & Sohn. 1 Mk. 20 Pf.

Karagiannides, A., die nichteuklidische Geometrie vom Alterthum bis zur Gegenwart. Eine historisch-krit. Studie. Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 60 Pf.

Litterarischer Bericht

L.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Vorlesungen über Zahlentheorie. Von P. G. Lejeune Dirichlet. Herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. Dedekind, Professor an der technischen Hochschule Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig. Vierte, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Braunschweig 1894. Friedrich Vieweg und Sohn.

Die Vorlesungen handeln in 5 Abschnitten: von der Teilbarkeit der Zahlen, der Congruenz der Zahlen, den quadratischen Resten, den quadratischen Formen, der Anzahl der Classen, in welche die binären quadratischen Formen von gegebener Determinante zerfallen. Vom Herausgeber sind 11 Supplemente hinzugefügt: über einige Sätze aus der Theorie der Kreisteilung von Gauss, den Grenzwert einer unendlichen Reihe, einen geometrischen Satz, die Geschlechter, in welche die Classen der quadratischen Formen von bestimmter Determinante zerfallen, Theorie der Potenzreste für zusammengesetzte Moduli, den Satz, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinsame Factoren sind, unendlich viele Primzahlen enthält, einige aus der Theorie der Kreisteilung, die Pell'sche Gleichung, die Convergenz und Stetigkeit einiger Reihen, die Composition der binären quadratischen Formen, die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen.

H.

Beleuchtung und Beweis eines Satzes aus Legendre's Zahlentheorie. Von Dr. Hermann Scheffler. Leipzig 1893. Friedrich Foerster.

Der Satz lautet: „Sei eine beliebige arithmetische Progression, deren Anfang und Differenz relativ prim sind, und eine Reihe beliebiger k ungerader Primzahlen gegeben; bezeichnet allgemein $\pi(z)$ den $z$ten Term der natürlichen Reihe der Primzahlen 3, 5, 7, 11, . . ., so gibt es unter $\pi(k-1)$ consecutiven Termen jener Progression mindestens einen, der durch keine der gegebenen Primzahlen teilbar ist." Der von Legendre für diesen Satz aufgestellte Beweis ist ungenügend, sofern er sich auf eine unbegründete Voraussetzung stützt. Es werden zahlreiche Beobachtungen gemacht, dann bewiesen, dass die Voraussetzung, und demnächst, dass der Satz richtig ist. H.

Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. Mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemann's bearbeitet von Dr. H. Durège, Professor i. r. an der deutschen Universität zu Prag. Vierte Auflage. Leipzig 1893. B. G. Teubner.

Nach einer ausführlichen Erläuterung des Wesens und der Bedeutung der Imaginären wird die Theorie in folgenden 10 Abschnitten entwickelt: geometrische Darstellung der imaginären Grössen; von den Functionen einer complexen Variabeln im allgemeinen; mehrdeutige Functionen; Integrale mit complexen Variabeln; der Logarithmus und die Exponentialfunction; allgemeine Eigenschaften der Functionen; über das unendlich gross und unendlich klein Werden der Functionen; Integrale; einfach und mehrfach zusammenhängende Flächen; von den Periodicitätsmoduln. H.

Grundzüge der Differential- und Integralrechnung von Dr. Otto Stolz, ord. Professor an der Universität zu Innsbruck. Erster Teil: reelle Veränderliche und Functionen. Mit 4 Figuren im Text. Leipzig 1893. B. G. Teubner.

Nach einer Einleitung, welche auf die Principien der infinitesimalen Analysis ausführlich eingeht, behandeln 10 Abschnitte der Reihe nach folgende Gegenstände: Ableitungen, Differentialquotienten und Differentiale von Functionen einer Veränderlichen; den Mittelwertsatz mit einigen Anwendungen; von den höhern Differentialquotienten einer Veränderlichen insbesondere, Formeln für die

Summe der n ersten Glieder der Taylor'schen Reihe; Ableitungen und Differentialquotienten der Functionen von mehreren Veränderlichen und der impliciten Functionen; unbestimmte Integration (Allgemeines); die der rationalen Functionen; die von algebraischen Functionen, insbesondere der rationalen Functionen von x und einer Quadratwurzel aus einem Polynom 2. Grades in x; die von transcendenten Functionen; das bestimmte Integral. Gegenüber andern Lehrbüchern für gleiche Doctrin zeichnet sich das vorliegende aus durch vorwaltendes Interesse für Unregelmässigkeiten und Singularitäten; in Betreff der normalen Elemente der Lehre ist die Darstellung weit entfernt von der einfachst und deutlichst möglichen; auch braucht man das Ideal in dieser Hinsicht noch gar nicht anzustreben, denn kaum je war es nötig vom Gewöhnlichen oder längst Bekannten abzugehen. Beides drängt den Leser zu der Vermutung, dass der Verfasser um jeden Preis vermeiden wollte, die infinitesimale Analysis als ein leichtes Studium erscheinen zu lassen. Um diese Charakterisirung mit einigen Beispielen zu belegen, so sei zuerst folgende Stelle der Einleitung (S. 3) angeführt. „Wenn x den Grenzwert 0 hat, d. h. dem absoluten Betrage nach beliebig klein werden kann, so sagt man auch, die Veränderliche x wird (nicht „ist") unendlich klein". Hier ist zunächst factisch zu statuiren, dass dies nicht der Fall ist. Von unendlich kleinen Grössen, und zwar die es sind genau in dem obengenannten Sinne, wird viel gesprochen, aber niemand spricht von unendlich klein werdenden Grössen. Letzteres ist so sinnlos, als wenn man von einer Grösse, die variiren kann, sagen wollte, sie werde variabel. Nachdem durch diese falsche Aussage der Verfasser sein Mögliches getan hat, den Anfänger confus zu machen, fährt er fort: „Wir können jedoch dem Anfänger nicht raten, diesen Ausdruck zu gebrauchen, denn er könnte, da er in früherer Zeit oft auch einen andern, hier nicht berechtigten Sinn hatte, Anlass zu Misverständnissen bieten". Mit dem andern Sinne ist, wie die beigefügte Note zeigt, gemeint: unendlich klein bedeute $-\infty$. Dieser Sinn ist offenbar durch die Worte der Definition „nach absolutem Betrage" ausgeschlossen. Es gibt grosse Gebiete der Mathematik, wo es sich immer um absolute, nie um algebraische Grössen handelt, bei Dreiecken z. B. denkt niemand an den Fall negativer Seiten. Ist nun überdies die Beschränkung auf absolute Grössen in der Definition ausgesprochen, so ist ein Misverständniss von dieser Seite ganz unmöglich; die angebliche Besorgniss erweist sich als leerer Vorwand. Dahingegen ist gerade der erteilte Rat das Wort unendlich klein nicht zu gebrauchen recht dazu angetan Irrtum zu verbreiten und zu befestigen. In unzähligen Schriften wird das Wort richtig gebraucht und ist hier unersetzlich. Da aber leider in kaum einem Lehrbuch die Definition und Theorie

der unendlichen Grössen zu finden ist, so wird der Anfänger durch jenen Rat geradezu aufgefordert sich um Sinn und Bedeutung nicht zu bekümmern und den Begriff in aller herrschenden Unklarheit aufzunehmen (vielleicht damit er nie selbständig werde, sondern stets von seinen Lehrmeistern abhängig bleibe). Die Hinzufügung, statt „unendlich klein" könne man „beliebig klein" sagen, ist als irrig zurükzuweisen; denn ε und $\alpha\varepsilon$ sind gleichzeitig unendlich klein, aber nicht gleichzeitig beliebig klein. Im Vorstehenden war zwar die Eigenschaft, um die es sich handelte, die unendliche Kleinheit, falsch ausgedrückt, aber doch durch ihre exact richtige Bedingung unzweifelhaft kenntlich gemacht. Eine andere Stelle (S. 2) lässt beides, den Sinn dessen, was, und den Sinn dessen, wodurch es angeblich erklärt wird, fraglich. Sie lautet: „Nimmt die Veränderliche x Werte an, welche grösser sind als jede vorgegebene Zahl, so sagt man, ihre obere Grenze oder ihr Grenzwert ist $+\infty$ (in Zeichen $\lim x = +\infty$)". Das Zeichen ∞ bedeutet bekanntlich „unendlich gross". Warum nennt der Verfasser nicht das Wort, da er es doch sonst oft gebraucht? Eine Grösse, die $-\infty$ ist, kann bekanntlich über jede Grenze hinauswachsen, hat also keine obere Grenze; daher ist der Ausdruck $\lim x = +\infty$ sinnlos, sowie das Angegebene, was er bedeuten soll. Soll nun vielleicht die Behauptung: man sagt so — heissen, die an sich sinnlose Formel sei ein symbolischer Ausdruck für das Vorgenannte, nämlich dass x Werte annimmt, die grösser sind als jede vorgegebene Zahl, so ist leider die Erklärung nicht verständlicher als das Zuerklärende. Ein Wert ist eine individuelle Grösse; diese kann nicht grösser sein als alle Zahlen. Sind aber beliebig viele Zahlen gegeben, so enthält die Aussage, dass Werte von x grösser seien als alle diese Zahlen, nichts bestimmendes mehr für x, was nicht von der Wahl dieser Zahlen abhängig wäre. Da es nun ein Leichtes war, die Bedingung eines unendlich grossen x einfach und exact auszusprechen, so drängt sich die Frage auf, was den Verfasser bewogen haben könnte, so dunkle Rede zu führen. Vermutlich wollte er durch kein Urteil der erhofften Bildung eines Begriffs des absoluten (oder constanten) Unendlich in den Weg treten und strebte darum die Erledigung der Frage über den Begriff des Unendlichen als eines variabeln zugunsten jener Chimäre vermittelst dialektischer Künste hinzuzögern. Diese Vermutung wird auch noch dadurch unterstützt, dass er nach Vorgang von Lagrange für die Principien der Differentialrechnung unendliche Reihen in Anwendung bringt, ein Verfahren das durch Cauchy's strengeres Zuwerkegehen längst gerichtet und seitdem nie wieder aufgenommen worden ist. Indem der Verfasser erklärtermassen die Theorie der unendlichen Reihen und ihrer Convergenz als bekannt voraussetzt, mithin von ihrer Begründung nichts sagt, ist offenbar der logische

Faden seiner Deductionen hinsichtlich der infinitesimalen Elemente aller Controle entzogen und eventuellen Erschleichungen Tor und Tür geöffnet. Endlich ist noch zu erwähnen, dass infolge der grundsätzlichen Vermeidung des Wortes „unendlich klein", welches immer von neuem umschrieben wird, die Rechnungen unnützerweise ihre natürliche Einfachheit einbüssen, und der Einblick einigermassen erschwert wird. Hoppe.

Lehrbuch der höheren Analysis. I. Band. Lehrbuch der Differentialrechnung. Zum Gebrauche bei Vorlesungen an Universitäten und technischen Hochschulen. Von Harry Gravelius. Berlin 1893. Ferd. Dümmler.

Das Lehrbuch ist in folgende 10 Capitel geteilt: irrationale Zahlen; reelle Veränderliche und ihre Functionen, Stetigkeit; Differentialquotienten; Bildung des ersten Differentialquotienten der elemenntaren Functionen, allgemeine Sätze; höhere Differentialquotienten einer Function einer Veränderlichen, höhere Differenzen und Differentiale; Functionen mehrerer unabhängig Veränderlichen; Darstellung der Functionen durch Potenzreihen, Punktmengen; Theorie der Maxima und Minima; Anwendungen auf Geometrie; complexe Veränderliche. Die Begriffsentwickelung der Irrationalzahl schliesst sich der Methode von Heine an. Bei der Grundlegung der infinitesimalen Analysis vom 2. Capitel an werden keine Worte gespart die Begriffe zur Klarheit zu bringen und falsche Vorstellungen abzuwehren. Doch alles dies wird schwerlich den Erfolg haben, wenn nicht gleich anfangs der positive Sachverhalt unumwunden ausgesprochen ist, und daran lässt es das 2. Capitel fehlen. Sei zum Belege die Stelle auf erster Stelle angeführt: „Man darf nicht sagen, die Veränderliche sei dann einmal unendlich, denn das Unendliche ist keine Zahl. Die Veränderliche hat in diesem Falle" (d. h. wenn man sie unendlich nennt) „überhaupt keinen grössten Wert". Das ist alles im einzelnen richtig, aber es negirt bloss. Was heisst unendlich? Alle Erklärung fehlt. Der Verfasser wird nicht in Abrede stellen, dass von unendlichen, unendlich grossen, unendlich kleinen Grössen sehr oft und zwar correcter Weise gesprochen wird; überdies gebraucht er das Wort später selbst. Hier, wo er sagt, es ist keine Zahl, war der Ort zu sagen, was es ist. Offenbar ist es sinnlos ein Unveränderliches unendlich zu nennen; nur die Veränderung kann ohne Ende fortgehen. Unter einer unendlichen Grösse ist daher stets eine veränderliche zu verstehen, d. h. eine solche, die sich verändern kann, nämlich entsprechend dem Falle, von dem an jener Stelle die Rede ist. Ist dies ausgesprochen, so ist der Ge-

danke, eine Veränderliche sei (oder werde) einmal unendlich, von selbst ausgeschlossen, ebenso zeigt sich aber auch, dass die Setzung des Ausdrucks „werde" statt „sei" unendlich, womit der Verfasser die Formulirung verbessern zu wollen scheint, keinen verständlichen Sinn hat. Die Theorie des Unendlichen wird dann ihres mystischen Nimbus entkleidet und geht in einen elementaren Lehrgegenstand über. War der Verfasser der Ansicht, der Ausdruck „unendlich" böte dem Anfänger infolge traditioneller Unklarheit noch immer eine Schwierigkeit, so war es gewiss das verkehrteste Mittel zur Abwendung jenes Hindernisses, dass er denselben solange als möglich mied; denn was man nicht treibt, kann man nicht lernen. Hoppe.

Vorlesungen über Mathematik von Leopold Kronecker. Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission. Erster Band. Vorlesungen über die Theorie der einfachen und vielfachen Integrale. Herausgegeben von Dr. Eugen Netto, Professor der Mathematik an der Universität zu Giessen. Leipzig 1894. B. G. Teubner.

Der Inhalt ist zu reichhaltig und mannigfaltig, als dass sich eine umfassende Uebersicht in der Kürze geben liesse. Obwol ein sichtlicher Fortschritt nicht fehlt, und Gruppen und Untersuchungsgebiete sich kenntlich machen, so sind doch diese nicht namhaft begrenzt. Wir begnügen uns deshalb damit, aus jedem Teile einiges hervorzuheben. Nur kurze Zeit verweilt die Schrift bei den Principien der Theorie des Integrals einer Function einer Variabeln über ein einfaches reelles Intervall nach dessen 2 Herleitungen, aus dem Differential und aus der Reihensumme. Bald geht sie, vom Integral einer Function einer Complexen beginnend, zum Integral über ein Areal über, indem sie erklärt, dass und warum bei letzterem viele Complicationen wegfallen, welche die Theorie der Integration über eine Linie schwierig machen. Sie behandelt weiter die Mittelwertsätze, das Dirichlet'sche Integral, die Fourier'sche Reihe, Bernoulli'sche Functionen, die mechanische Quadratur, das Cauchy'sche Residuum, die Reihen, den Dirichlet'schen discontinuirlichen Factor, mehrfache Integrale, die Euler'schen Integrale, das Oberflächenelement, das Potential, die Green'sche Function, die ellipsoidische Mannigfaltigkeit. H.

The principles of elliptic and hyperbolic analysis. By Alexander Macfarlane, M. A., D. Sc., L. L. D. Fellow of the Royal

Society of Edinburgh, Professor of physics in the university of Texas. (Read before the Mathematical Congress at Chicago Aug. 24. 1893.) Norwood Press (1894). J. S. Cushing a. Co.

Die Schrift betrachtet vollständiger die den Versor betreffende Seite der Analysis des Raumes und dehnt die Untersuchung auf elliptische und hyperbolische Versoren aus. Es wird der Fundamentalsatz der Trigonometrie für die Kugel, das Rotations- und allgemeine Ellipsoid, für das gleichseitige und allgemeine zweischalige, dann einschalige Hyperboloid untersucht, dann von den resultirenden Pincipien Anwendung gemacht, schliesslich Analoga zum Rotationssatze hergeleitet. H.

E. Goursat, Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Gehalten an der Faculté des sciences zu Paris. Bearbeitet von C. Bourlet. Autorisirte deutsche Ausgabe von H. Maser. Mit einem Begleitwort von S. Lie. Leipzig 1893. B. G. Teubner.

Nachdem durch die Arbeiten von S. Lie die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung einen gewissen Abschluss gefunden hatte, ist sie durch Goursat's Werk „Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre", dessen Uebersetzung hier vorliegt, in einer für den Studirenden bequemen Weise und in engem Anschluss an die Arbeiten von Lagrange, Cauchy, Jacobi, Mayer dargelegt worden. Ihre Entwickelungsgeschichte hat Lie im Begleitwort dazugefügt. Die Teile des Werkes sind folgende: allgemeine Sätze über die Existenz der Integrale; lineare Gleichungen, vollständige Systeme; lineare totale Differentialgleichungen; Gleichungen von beliebiger Form, allgemeines, Methode von Lagrange und Charpit; Methode von Cauchy, Charakteristiken; Definition der Ausdrücke (ψ, φ) und $\{\psi, \varphi\}$; erste Methode von Jacobi und Mayer; Methode von Lie; geometrische Untersuchung der Gleichungen mit 3 Variabeln, Integralcurven, singuläre Lösungen; allgemeine Theorie von Lie; Berührungstransformationen; Theorie der Gruppen, allgemeine Integrationsmethode. H.

Leçons nouvelles sur l'analyse infinitesimale et ses applications géométriques. Par M. Ch. Méray, Professeur á la Faculté des sciences de Díjo. Ouvrage honoré d'une souscription du Ministère de l'instruction publique. Première partie. Principes gén[illegible] Paris 1894. Gauthier-Villars et fils.

Dieser erste Teil enthält Definitionen von Grundbegriffen der infinitesimalen Analysis nebst ihren nächsten Consequenzen. Obgleich diese Grundbegriffe sowie ihre Bezeichnungen nicht merklich von den gebräuchlichen abweichen, so lehnt sich doch die ganze Behandlungsweise an keine Autorität an; vielmehr weist der Verfasser in der Vorrede die ganze bisherige Lehre mit lauter allgemeinen Beschuldigungen der Ungenauigkeit und Wertlosigkeit ohne Begründung und Nachweis von sich. Durch dieses Bekenntniss von durchaus rein subjectiver Bedeutung enthebt er natürlich sich und uns von der Aufgabe, irgend welche Punkte kenntlich zu machen, in denen etwa sein Werk principielle didaktische Vorzüge vor frühern Darstellungsweisen haben sollten. Sei daher der Inhalt nur kurz aufgeführt. Brüche; Positive und Negative, Functionen; incommensurable Grössen, Varianten (Variable); imaginäre Grössen; Reihen; ganze Reihen; Derivirte der holotropen Functionen; Fundamentaleigenschaften der über gegebene Areale holotropen Functionen; Integration; zusammengesetzte Functionen; wesentliches Princip der Theorie der totalen Differentialgleichungen; implicite Functionen; wesentliches Princip der Theorie der partiellen Differentialgleichungen; allgemeine Integralfunctionen, Integralgleichungen, integrirende Multiplicatoren; über eine wesentliche Eigenschaft der ganzen Polynome einer Variabeln. Hoppe.

Eine allgemeinere Integration der Differentialgleichungen. Von Emanuel Puchberger. I. Heft. Wien 1894. Carl Gerold's Sohn.

Es ist hier von einer neuen Integrationsmethode die Rede, welche auf einen grössern Umfang von Differentialgleichungen anwendbar sei, als die bekannten Methoden. Die Schrift gibt in Betreff mehrerer Beispiele von Differentialgleichungen Andeutungen, aus denen der Leser erraten soll, welche Methode der Verfasser im Sinne hat. Dem Referenten ist dies nicht gelungen.

Hoppe.

Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln. Von Dr. Lothar Heffter, a. o. Professor an der Universität Giessen. Mit 3 Figuren im Text. Leipzig 1894. B. G. Teubner.

In dem vorliegenden Werke sind die bisherigen Arbeiten über den genannten Gegenstand in der dem Zwecke entsprechenden Aus-

dehnung einheitlich zusammengestellt und in didaktisch geordneter Stufenfolge zu einem Lehrbuche gestaltet. Die Reihenfolge ist diese. Erklärende Einleitung; Recursionsformel und determinirende Gleichung; Berechnung der Reihencoefficienten aus der Recursionsformel; Nachweis der Reihenconvergenz bei einer Stelle der Bestimmtheit; Fundamentalsystem von Integralen, nicht homogene Differentialgleichungen; die Integrale bei einer regulären Stelle und die linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten; die Integration im ganzen Gebiet der Differentialgleichung, Gruppe der Differentialgleichung; analytische Gestalt der Integrale bei einer singulären Stelle der Bestimmtheit; Recursionsformeln der Reihen in logarithmenbehafteten Integralen bei einer Stelle der Bestimmtheit; Zerlegung der Integralgruppen in Untergruppen; Notwendigkeit der Bestimmtheitsgestalt der Differentialgleichung bei einer Stelle für bestimmtes Verhalten sämtlicher Integrale daselbst; Fundamentalgleichung; die Integrale in einem Kreisring; Stellen der Unbestimmtheit, bei denen sich ein Teil der Integrale bestimmt verhält, Reductibilität; die Integrale in der Umgebung unendlich grosser Werte der unabhängigen Variabeln; Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe. Hülfssätze. H.

Sophus Lie Vorlesungen über continuirliche Gruppen. Mit geometrischen und anderen Anwendungen. Bearbeitet und herausgegeben von Dr. Georg Scheffers, Privatdocent an der Universität Leipzig. Mit Figuren im Text. Leipzig 1893. B. G. Teubner.

Theorie der Transformationsgruppen, dritter und letzter Abschnitt. Unter Mitwirkung von Prof. Dr. Friedrich Engel bearbeitet von Sophus Lie, Professor der Geometrie an der Universität Leipzig. Leipzig 1893. B. G. Teubner.

Die Teile des ersten Werkes sind folgende. Die allgemeine projective Gruppe der Ebene und einige Untergruppen; Theorie der projectiven Gruppen in der Ebene; die Gruppen in der Ebene; die grundlegenden Sätze der Gruppentheorie; lineare homogene Gruppen und complexe Zahlen; einige Anwendungen der Gruppentheorie. — Die Teile des zweiten Werkes sind folgende. Die endlichen continuirlichen Gruppen der geraden Linie und der Ebene; die des gewöhnlichen Raumes; die projectiven Gruppen des gewöhnlichen Raumes; Untersuchungen über verschiedene Arten von Gruppen des n-fach ausgedehnten Raumes; Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie; allgemeine Betrachtungen über endliche continuirliche Gruppen. H.

Essai sur le calcul de généralisation. Par Gabriel Oltramare, Professeur de mathématiques supérieures à l'université de Genève. Genève 1893. Stapelmohr.

Die hier so genannte Verallgemeinerungsrechnung geht von Verallgemeinerung des Begriffs des Differentialquotienten aus, erweitert Functionen und wird u. a. auf Integration von Differentialgleichungen und Differenzengleichungen angewandt. H.

Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques. Par M. Maurice d'Ocagne, Ingénieur des ponts et chaussées, Répétiteur à l' École Polytechnique. Conférences faites au conservatoire nationale des arts et métiers, les 26 février, 5 et 19 mars 1892. Paris 1894. Gauthier-Villars et fils.

Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques. Essai d'une théorie générale. Régles pratiques. Exemples d'application. Par Maurice d'Ocagne, Ingénieur des ponts et chaussées. Paris 1891. Gauthier-Villars et fils.

Es werden die mechanischen, tabellarischen und graphischen Hülfsmittel zur Ausführung numerischer Rechnungen im weitesten Umfang durchgegangen und abgebildet. H.

Repetitorium der Differential- und Integralrechnung. Von Dr. Chr. Joh. Deter. Dritte Auflage. Berlin 1894. Max Rockenstein.

Die hier gegebene kurze Zusammenfassung der Lehren der Differential- und Integralrechnung ist mit Fleiss und Umsicht so bearbeitet, dass nichts wesentliches zu vermissen ist, alles exact dargestellt und wol geordnet. Den grössten Teil bilden Formeln und Uebungen. H.

Zahlentheorie. Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Hauptteilen. Von Paul Bachmann. Zweiter Teil. Die analytische Zahlentheorie. Leipzig 1894. B. G. Teubner.

Der erste Teil des Gesamtwerkes, erschienen 1892, hat den Titel: „Elemente der Zahlentheorie". Die analytische Zahlentheorie begreift in sich diejenigen Forschungen im Gebiete der höhern Arithmetik, welche auf analytische Methoden begründet sind. Die

Abschnitte sind folgende: Allgemeines über unendliche Reihen und Producte; die Zerfällung der Zahlen in Summanden; über die Dirichlet'schen Reihen; der Satz von der arithmetischen Progression, die Classenanzahl quadratischer Formen, Grundformel; Bestimmung der Classenanzahl durch eine unendliche Reihe; die Gauss'schen Summen; Berechnung der Classenanzahl; die Geschlechter der quadratischen Formen; Ausdehnung des Satzes von der arithmetischen Progression auf quadratische Formen; zahlentheoretische Functionen; die Häufigkeit der Primzahlen; die mittleren Werte zahlentheoretischer Functionen. H.

Einführung in die Functionentheorie. Eine Ergänzung zu allen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Mit 23 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet von Dr. W. Laska. Stuttgart 1894. Julius Maier.

Das Bedürfniss einer Ergänzung sei es aller oder vieler Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung wird gewiss gern eingeräumt werden. Es beruht jedoch auf zwei sehr verschiedenen Desideraten, dem Mangel an Gründlichkeit und den zu eng begrenzten Zielen der Doctrin. Die Ungründlichkeit erklärt sich leicht aus dem Umstande, dass die Resultate und Anwendungen der Doctrin einen ohne Mühe zu erringenden grossen Gewinn darboten, während der Weg, dazu mit voller Einsicht zu gelangen, wegen gewisser Verirrungen schwierig schien. Zu den Erweiterungen der Principien aber führten Untersuchungen, welche hauptsächlich durch den genannten Mangel hervorgerufen waren. Der Ausdruck „Ergänzung" scheint nun den Anspruch zu erheben, dass durch Hinzufügung des hier Gegebenen die gedachten Lehrbücher definitiv zu einem „Ganzen" werden, das wenigstens in den berührten Beziehungen nichts mehr vermissen lasse. Die Bearbeitung macht nicht den Eindruck, als wenn der Verfasser sich diese Aufgabe gestellt hätte. Sie behandelt nur einen historisch vorgefundenen Lehrstoff, dessen Kenntnissnahme der Verfasser für notwendig hält, eben weil er vorhanden ist. Hiervon abgesehen, würde es eine verdienstvolle Leistung der Arbeit sein, wenn darin sorgfältig darauf geachtet wäre, dass jene Lehren für Anfänger verständlich würden, wie es in der Tat die Bezeichnung als „Einführung" verspricht. In den leichtesten Partien ist die erste Bedingung dazu, klare und bestimmte Rede, sehr wol erfüllt. Wo es sich aber um schwierigere Fragen handelt, mithin umsomehr Deutlichkeit not tut, wird die Sorgfalt mehr und mehr ausser Augen gesetzt, Zeichen bleiben hie und da unerklärt, Beziehungen werden

verschwiegen (z. B. S. 12. Z. 15, wo alle Rechenschaft über die Bedeutung fehlt). Der Inhalt des Buches ist: Grundbegriffe; geschichtliche Entwickelung des Functionsbegriffs; Riemann-Cauchy's Functionentheorie; Theorie der complexen Integrale; Fortsetzung der Functionen-Theorie nach Riemann's Anschauung; rationale Functionen; Theorie der Reihen; die Reihenfortsetzung; Begriff der Function nach Weierstrass; die Differentiation; Darstellung der eindeutigen Functionen.

Hoppe.

Josef Dienger.

Am 27. November 1894 morgens 5 Uhr verschied nach langem Leiden der sehr bekannte Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Karlsruhe Josef Dienger. Er ist geboren den 5. November 1818 zu Hausen an der Möhlin, Amt Staufen. Schon früh zeigte sich bei ihm eine ungewöhnliche Begabung für Mathematik. Er wurde deshalb von seinen Eltern für das Lehrfach bestimmt. Seine erste Ausbildung erhielt er auf der Präparandenschule zu Ettlingen, von wo er mit den besten Zeugnissen ausgerüstet, im Jahre 1838 an die katholische Kantonschule Graubündens, welche damals in Disentis war, berufen wurde. Nach 3jährigem Aufenthalte daselbst wandte er sich nach Genf, um sich in seinem Fache noch mehr zu vervollkommnen, und in der gleichen Absicht besuchte er im nächsten Jahre noch das Polytechnikum zu Karlsruhe i./B. Im Jahre 1843 wurde er Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Ladenburg und im Jahre 1844 Lehrer an der gleichen Anstalt zu Sinsheim an der Elsenz. 1849 wurde er Vorstand der höheren Bürgerschule zu Ettenheim und 1850 Professor der Mathematik und Vorstand der mathematischen Schule am Polytechnikum zu Karlsruhe i./B. Nach 18jähriger erfolgreicher Tätigkeit sah er sich infolge eines Nervenleidens genötigt, seine Stelle niederzulegen. Von seinem schweren Leiden genesen widmete er von Ende 1868 an seine Dienste der allgemeinen Versorgungsanstalt im Grossherzogtum Baden, welcher Anstalt er bis 1888 als Director angehörte.

Dass diese Anstalt auf der heutigen Höhe dasteht, kann wesentlich als sein Verdienst angesehen werden, und wird ihm in der Geschichte dieser Anstalt ein bleibendes Andenken sichern.

Seit 1888, also mit Vollendung seines 70. Lebensjahres, entsagte er auf Anraten des Arztes jeder wissenschaftlichen Tätigkeit und suchte in stiller Zurückgezogenheit mit seiner Gemahlin die Früchte seines segensreichen Wirkens zu geniessen. Leider war ihm dies nicht lange beschieden. Ein schweres Herzleiden stellte sich ein und machte seinem tätigen Leben ein rasches Ende.

Ausser zahlreichen Abhandlungen — es sind deren über 100 —

in Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik Band 34—36,
in Grunerts Archiv der Mathematik und Physik, 84 Artikel von Teil 7 bis 47,
in Terquem und Geronos Nouvelles annales des Mathématiques,
in der von Tortolini in Rom herausgegebenen Zeitschrift Annali dei scienze mathematiche e fisiche,
in den kritischen Anzeigen in den Heidelberger Jahrbüchern der Litteratur 1847—1868,
in den Abhandlungen der königlich böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag,
in den Denkschriften der Wiener Akademie und
in Versicherungszeitschriften (Annalen des gesamten Versicherungswesens)

erschienen von ihm:

1) Grundzüge der algebraischen Analysis, Karlsruhe 1851,
2) Handbuch der ebenen Polygonometrie, Stuttgart 1854,
3) Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, Stuttgart 1855 (in 3. Auflage 1867),
4) Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen, Braunschweig 1857,
5) Handbuch der Differential- und Integralrechnung, Stuttgart 1857 (in 3. Auflage 1867 in 3 Bänden),
6) Abbildung krummer Oberflächen auf einander und Anwendung derselben auf höhere Geodäsie, Braunschweig 1858,
7) Studien zur analytischen Mechanik, Stuttgart 1863,
8) Theorie der elliptischen Integrale und Funktionen, Stuttgart 1865,
9) Theorie und Auflösung der höheren Gleichungen, Stuttgart 1867.
10) Grundris der Variatiationsrechnung, Braunschweig 1867.

Von diesen Werken wurde das Handbuch der Differential- und Integralrechnung im Jahre 1861 ins Russische übersetzt.

Diengers Verdienste um die Mathematik wurden auch von wissenschaftlicher Seite gewürdigt, denn

1) verlieh ihm die Universität Giessen auf Grund seiner ersten von ihm veröffentlichten Abhandlung „die Lagrange'sche Formel und die Reihensummirung durch dieselbe" — sie erschien im Jahre 1846 in Crelles Journal Band 34 Seite 75—100 — das Doctor-Diplom summa cum laude, und
2) ernannte ihn die königlich böhmische Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag zu ihrem auswärtigen Mitgliede.

Karl Dienger.

Litterarischer Bericht

LI.

Lehrbücher.

Anfangsgründe der Zahlen-. und Raumgrössen-Lehre. Im Auftrage der früheren Königlich Preussischen General-Inspektion der Artillerie und mit Zustimmung der jetzigen Königlich Preussischen General-Inspektion der Fuss-Artillerie zum Gebrauche als Leitfaden bei dem mathematischen Unterrichte in den Regiments-Schulen der Artillerie, sowie zur Benutzung beim Selbstunterricht bearbeitet von R. Foth, Feuerwerks-Major a. D. Mit 135 in den Text gedruckten Holzschnitten. Vierte Auflage. Hannover 1894. Carl Meyer.

Die 3. Auflage ist im 25. litt. Bericht S. 1—3 besprochen. Zur allgemeinen Charakterisirung möchte wol diesem Berichte nichts hinzuzufügen sein. Der Plan des Ganzen, die Auffassung der dem besondern Zwecke entsprechenden Aufgabe und die didaktischen Grundsätze sind unverändert festgehalten; dagegen hat der Verfasser nicht aufgehört auf Grund immer neuer Erfahrungen die Lehrweise zu vervollkommnen, einfacher und einheitlicher zu gestalten. Was im vorigen Berichte als verfehlt bezeichnet worden ist, kommt in der neuen Auflage nicht vor. Gemäss dem Grundsatze, theoretische Lehren, die das Erlernen erleichtern und die Orientirung fördern, dem Praktiker nicht vorzuenthalten, mag hervorgehoben werden, dass auch an den vorgeschriebenen Grenzen des elementaren Gebietes stets die jenseitigen Begriffe nicht mit Stillschweigen übergangen, sondern exact erklärt werden. H.

Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik von Dr. Gustav Holzmüller, Direktor der Gewerbeschule (Realschule mit Fachklassen) zu Hagen i. W., Mitglied der Kais. Leop. Carol. Akademie der Naturforscher. Erster Teil, nach Jahrgängen geordnet und bis zur Abschlussprüfung der Vollanstalten reichend. Mit 142 Figuren im Text. — Zweiter Teil, für drei Oberklassen der höheren Lehranstalten bestimmt. Mit 210 Figuren im Text. — Leipzig 1894. B. G. Teubner.

Das Lehrbuch ist in hohem Grade eigenartig, doch stellt sich die Abweichung vom Gewöhnlichen nicht sowol in neuen leitenden Grundsätzen, als vielmehr in gänzlicher Ungebundenheit der Behandlung des Einzelnen dar. Zur Rechenschaft über diese ist jedem der beiden Teile eine abgetrennte (nicht für die Schüler bestimmte) Schrift beigegeben, die uns indes zur Beurteilung wenig darbietet, da die Methode mehr mit Schlagwörtern als mit Gründen verteidigt wird. Was das Buch selbst betrifft, so zeugt zunächst der Vortrag von ausserordentlicher Beherrschung des Lehrstoffs, Gewandtheit und Sicherheit in Gedanken und Ausdruck; alles wird sofort ohne künstliche oder umständliche Nachhülfe vollkommen exact und in bester Form ausgesprochen. Mit einer so hohen Begabung ist jedoch nicht immer eine erfreuliche Wirksamkeit verbunden; ob der Gebrauch, den der Verfasser von seiner vortrefflichen Befähigung macht, eine solche erhoffen lasse, erscheint in hohem Grade fraglich. Er gehört zu denjenigen Autoren, welche den mathematischen Unterricht mit einer Propädeutik beginnen wollen. Die vorgängigen Unternehmen dieser Art, welche während der letzten 80 Jahre aufgetreten sind, haben einen guten Erfolg nicht so überzeugend dargetan, dass ihnen die Mehrzahl der erschienenen Lehrbücher nachgefolgt wäre. Von allen jenen Vorgängern unterscheidet sich nun das gegenwärtige Lehrbuch dadurch, dass es die Grenze zwischen Propädeutik und strengem Lehrcursus ganz fallen lässt und aus anfänglich disciplinfreier Vorführung allmählich annähernd zur euklidischen Form übergeht. Hiermit ist offenbar der Doctrin ihre Basis entzogen; sie kann nicht mehr als notwendige Folge bestimmter Principien begriffen werden. In der Tat hat der Verfasser nichts dafür getan, dass der Schüler die Idee apodiktischer Erkenntniss gewinnt, so vielen Lehren er auch Beweise folgen lässt. Er sagt selbst, dass,, was im Anfang als Beobachtungsergebniss vorgekommen ist, später als gültiger Satz angewandt wird. Es scheint ihm also zu genügen, wenn die Beweise als Plaidoyers zugunsten der Behauptungen angesehen werden und das Vertrauen auf deren Richtigkeit erwirken, deren Begründung dem Lehrer gewiss bekannt sein werde. Gleicherweise geringschätzig wie mit dem logischen

Zusammenhang wird mit der Systematik verfahren. Die Lehrsätze sind zumteil ausgesprochen, zumteil in allgemeinen, zumteil in speciell numerischen Aufgaben involvirt, wo man eine bestimmte Lehre zu suchen hat, nicht kenntlich gemacht, daher auch successiver Fortschritt und jeweiliger Standpunkt nicht zum Bewusstsein gebracht, vielmehr nur mit grosser Umsicht durch recht reichlichen Lehrstoff dafür gesorgt, dass in der Gesamtheit keine Lehre vermisst werden kann. In der Begleitschrift ist davon die Rede, dass der Lehrgang nicht bindend sein solle, nach Ermessen des Lehrers manches wegfallen oder in andrer Ordnung gegeben werden könne. Das hätte Sinn, wenn das Verhältniss des Dargebotenen und des Freigestellten das umgekehrte wäre, d. h. wenn das gedruckte, unveränderlich in Aller Händen befindliche Lehrbuch ein für allemal eine deutliche logische und systematische Verbindung aufgestellt und es dann der Einsicht des Lehrers überlassen hätte, im besondern Falle Entbehrliches zu übergehen. Hier wird im Gegenteil dem Lehrer gestattet, den logischen Zusammenhang und die systematische Ordnung, die er etwa vermisst, im besondern Falle herzustellen. Ferner ist der Verfasser beteiligt an der Ansicht, der geometrische Unterricht müsse mit dreidimensionalen Gebilden anfangen, weil diese sich der unmittelbaren Anschauung darböten. Wir wollen diese Ansicht nicht voreilig verwerfen; man kann versuchen, ob factisch durch Körperbetrachtung die Geometrie leichter zugänglich wird; der Verfasser beruft sich in diesem Punkte nicht auf Erfahrung: es ist eben nur sein Gedanke, der ihm natürlich und einwandfrei scheint. Dass er sehr mangelhaft erwogen ist, findet man bald. Er setzt erstens voraus, dass der Schüler mit dem alltäglich gesehenen Gegenstande bekannter und s. z. s. befreundeter sei als mit dem, welchen ihm die Schule, sei es auch nur auf dem Papiere, neu darbietet. Ein Kind geht gleichgültig an hundert Dingen vorbei, macht dagegen mit Lust und Eifer von einer neu erworbenen Fähigkeit bei jeder Gelegenheit Anwendung, ohne zu unterscheiden, was mehr oder weniger interessant ist; das spätere Alter wird mehr und mehr wählerisch. Daher ist es offenbar vernünftig, die unbedingt notwendigen Lehren, deren Wichtigkeit der Anfänger nicht einsehen kann, mit den jüngsten Schülern zu treiben. Nun ist aber exacte Wissenschaft nur möglich durch Isolirung der einfachen Elemente. Sollten die Schüler durch eigene Beobachtung finden, dass der Weg zur Geometrie Fixirung von Punkten und geraden Linien erfordert, so müssten sie in wenigen Jahren vollenden, was die Wissenschaft in Jahrtausenden erreicht hat. Es ist eine Errungenschaft aus alter Zeit, die durch den Unterricht rein überliefert wird ohne durch Motivirung der Methode irgend gewinnen zu können, so dass heutige Pädagogen auf den Gedanken verfallen, die ererbte Methode

sei ein blosses Herkommen. Das Zuwerkegehen des Verfassers spricht dafür, dass ihm jene wissenschaftliche Forderung, bewusster oder unbewusstermassen, nicht fremd ist, obgleich er den Blick davon ablenkt. Seiner Ansicht zufolge musste nun einmal der Schüler durch eine Reihe von Beobachtungen an einem Körper in die Anfangsgründe der Geometrie eingeführt werden. Er wählt dazu, ohne den Grund auszusprechen, den Würfel, einen Körper, der die einfachen Elemente so isolirt als möglich vor Augen stellt, indem er das Zu-Beachtende mehrfach, vom Nicht-zu-Beachtenden so wenig als möglich darbietet, und lässt die Schüler eine Reihe von Beobachtungen daran machen, d. h. er sagt ihnen, was sie erkennen sollen. Hiermit werden zwei Ziele, jedes mit halbem Erfolge, angestrebt, einerseits die Schüler zu der Meinung zu verlocken, als ob sie die Wissenschaft erfänden, andrerseits ihnen die elementaren Gegenstände der Geometrie zunächst anzuzeigen, ehe sie die Lehre von ihnen in gründlicher Weise empfangen. Beides möchte ihnen dazu schwerlich von Nutzen sein. Um kurz zusammenzufassen, so ist das Buch sehr reichhaltig, im einzelnen correct und zuverlässig, seine Einrichtung aber wenig geeignet, Anfängern die Mathematik fasslich zu machen. Hoppe.

Anfangsgründe der ebenen Geometrie. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet von Karl Schwering, Direktor des stiftischen Gymnasiums in Düren, und Wilhelm Krimphoff, Oberlehrer am Gymnasium in Paderborn. Mit 150 Figuren. —

Stereometrie für höhere Lehranstalten. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet von Karl Schwering, Direktor des stiftischen Gymnasiums in Düren. Mit 41 Figuren. —

Anfangsgründe der analytischen Geometrie für höhere Lehranstalten. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet von Karl Schwering, Direktor des stiftischen Gymnasiums in Düren. Mit 7 Figuren. — — Freiburg i. Br. 1894. Herder.

Die Lehrform schliesst sich der gewöhnlichen, im einzelnen bessernd, an. Durchgängig ausgesprochen ist eingeschaltete „Besprechung" jeder Lösung einer Aufgabe nach unmotivirter und durch keine Analysis vorbereiteter Vorschrift der Construction. Die Besprechung umfasst die Determination; als Hauptgegenstand aber und Hauptzweck erscheint die Orientirung durch Hinweisung auf alle, wenn auch grossenteils selbstverständliche Punkte, die zum Bewusstsein gezogen werden. Dagegen weicht der Entwickelungsgang nicht nur völlig vom gewöhnlichen ab, sondern es wird der Leser nicht

einmal zum Mitwisser des Princips gemacht. Der Schüler wird gleich im Anfang in eine Menge verschiedener verschiedenartiger geometrischen Erkenntnisse eingeführt, die sich auf mannigfache Elemente nicht gerade der einfachsten Gebilde beziehen. Einen Einblick in die Zusammengehörigkeit erhält er nicht, und wenn er wirklich, was nicht wahrscheinlich ist, keine der Lehren vergisst, so ist doch sein Wissen vom Einzelnen wenig darauf vorbereitet es anzuwenden, wo es nötig ist. Nun hat aber der Verfasser selbst, bei seinem unsystematischen Zuwerkegehen, eine wichtige und unentbehrliche Lehre mitzuteilen oder zum Bewusstsein zu bringen vergessen — wenigstens ist der angenommene Fall, dass er es vergessen hat, der einzige, der irgend Entschuldigung zuliesse. Da er in Erklärung von selbst einleuchtender Dinge soweit geht, dass er, bei der Aufgabe der Construction einer Figur aus gegebenen Stücken, es besonders ausspricht, dass diese Figur an beliebig verschiedener Stelle des Papiers gezeichnet werden könne — in der Tat dürfte auch diese Betrachtung bei der Determination nicht fehlen — so war es doch mindestens ebenso wichtig und zur Klarstellung der Begriffe notwendig die geometrische Addition superponirbarer Raumgrössen zu lehren. Die Addition der Strecken auf einer Geraden kommt im Anfang nicht vor: hier war gerade kein Anlass davon zu sprechen. Die Addition der Bogen eines Kreises ist schon in anderm Falle: sie liegt begrifflich der Teilung des Kreises in Grade und Messung der Bogen durch Grade zu Grunde, von der im Anfang die Rede ist; doch wird ihr auch hier keine Aufmerksamkeit zuteil. Soll man dies etwa in dem Sinne verstehen: das Nähere brauche der Schüler nicht zu wissen, weil er zur Bogenmessung ein Instrument hat? Das hiesse denn doch, das Ziel des mathematischen Unterrichts sehr niedrig stecken! Schlimmer wird das Unterlassen aller Erklärung bei der Addition der Winkel. Eine Definition des Winkels wird zunächst ausdrücklich abgelehnt. Soweit ist allerdings das Zuwerkegehen ganz correct: der Winkel ist zunächst die aus 2 Geraden bestehende Figur; eine Grösse wird er durch die Addition mittelst Aneinanderlegen. Letzteres verschweigt das Lehrbuch; es bestimmt die Grösse des Winkels durch Messung des um seinen Scheitel beschriebenen Kreisbogens. Da soll also der Leser, um den Sinn der Aussage zu begreifen, dass ein Winkel dopelt so gross als ein andrer ist, erst beide in Graden ausgedrückt denken (was beiläufig im allgemeinen gar nicht genau möglich ist, und das Zuerklärende schon vielfach involvirt). Bald darauf wird der Satz von der Winkelsumme des Dreiecks als Lehrsatz aufgestellt, und es folgt ihm unter der Bezeichnung „Beweis" eine Betrachtung, von der man leicht genug sieht, dass und warum sie zur Begründung nicht genügt. Da freilich vorher alles darauf

eingerichtet ist keinen exacten Begriff von der Grösse eines Winkels aufkommen zu lassen, so konnte der Verfasser sich wol gegen jeden Einwand der Schüler gesichert glauben. So wird denn der Schüler über ein ganzes Gebiet elementar geometrischer Begriffe beharrlich in Unkenntniss erhalten, damit er die Unrichtigkeit eines angeblichen Beweises für den Satz über die Winkelsumme des Dreiecks, der bekanntlich gar keine notwendige Folge der vorausgehenden Lehren ist, nicht fähig sein soll zu bemerken!

Der Vortrag der Stereometrie besteht in Vorführung und freier Besprechung einzelner Körper. Eine universelle, geordnete Lehre von der Lage der Ebenen und Geraden fehlt ganz. Es wird nur vorübergehend einiges daraus mitgeteilt und ein unentbehrlicher Satz exact bewiesen. Bevorzugt unter den mannigfaltigen Gegenständen sind überall die Inhaltsberechnungen. Die Beobachtungen erstrecken sich auch auf die Kegelschnitte.

Die „Anfangsgründe der geometrischen Geometrie" bestehen in der Einführung der ebenen Coordinaten und deren Anwendung auf Gerade, Kreis und Kegelschnitte. Hoppe.

Die Grundlehren der ebenen Geometrie. Ein Leitfaden für den Unterricht mit Uebungsaufgaben. Von Jos. Lengauer, Professor am k. alten Gymnasium zu Würzburg. Vierte, umgearbeitete Auflage der Ebenen Geometrie von A. Stegemann. Kempten 1893. Jos. Kösel.

Die 2. Auflage ist im 231. litterarischen Bericht S. 30 besprochen. Bei der Neubearbeitung, welche durch Lengauer zuerst in 3. Auflage in Ausgabe gekommen ist, haben manche nicht unwichtige Aenderungen, Verbesserungen, Ergänzungen und Vermehrungen stattgefunden: Beweise sind gekürzt, eine reichhaltige Sammlung von Rechnungs- und Constructionsaufgaben ist hinzugefügt worden. Erst in 4. Auflage ist eine zu misbilligende Anordnung, die bis dahin bestand, durch Rückkehr zur gewöhnlichen verbessert worden, indem jetzt die Fundamentalaufgaben zum Lehrsystem gehören. Angezeigte Fehler sind berichtigt. Dagegen steht auf Seite 3 der 4. Auflage die unwahre Behauptung: „Gebilde, welche für einander gesetzt werden können, werden gleich genannt." Wer dies stets täte, müsste unzählige absurde Folgerungen einräumen, er müsste z. B. alle Dreiecke einander gleich nennen; denn, lässt sich irgend ein Dreieckssatz an einem beliebigen Dreiecke A beweisen, so kann man für dieses Dreieck auch ein beliebiges anderes Dreieck B setzen, und B hiesse dann gleich A. Dass an jener Stelle hinzugefügt ist: „Es

wird stets angegeben werden; unter welcher Bedingung ein Gebilde ein anderes ersetzen kann" — macht das Unwahre nicht wahr. „Ersetzen" ist ein relativer, aber nicht mehrdeutiger Begriff. Seine Beschränkung auf Fälle quantitativer Gleichheit ist als Verstoss gegen anerkannten Wortgebrauch unzulässig und würde, wenn man sie gelten liesse, die gegenwärtige Erklärung der Gleichheit zu null machen. Sollte eine Definition der Gleichheit schwierig scheinen, so ist zu beachten, dass alle unsere Kunde von geometrischer Gleichheit durch Congruenz vermittelt ist. Innerhalb der linearen Geometrie bestehen je zwei gleiche Gebilde aus congruenten Teilen, und alle Beweise der Gleichheit nach gewöhnlicher Methode beruhen auf diesem Umstande. Folgende Definition trifft daher das Wesen der Sache: Zwei Gebilde, deren entsprechende Teile einander congruent sind, heissen einander gleich. Will man aber den Begriff der Gleichheit in seiner Totalität zum Ausdruck bringen, d. h. so, dass krumme Linien nicht ausgeschlossen sind, so darf man auch die Gleichheit, sofern sie nur einfachster Fall der Grössenvergleichung ist, nicht gesondert von der Ungleichheit (Grössen-Comparation) behandeln. Sind die Begriffe Grösser und Kleiner definirt, so wird nach dem bekannten Verfahren der Grenzeneinschliessung die Gleichheit in Fällen, wo sie nicht direct evident ist, daraus deducirt. Auch dies stimmt mit der gebräuchlichen Lehrmethode überein. Endlich ist auch die hier erforderte nachträgliche Erweiterung anfangs nur in engerem Umfange aufgestellter Begriffe ein bereits anerkanntes Lehrverfahren, ganz analog dem, welches beim Begriffe der Multiplication geübt zu werden pflegt. Hoppe.

Anfangsgründe der Trigonometrie. Pensum der Untersecunda. Herausgegeben von Dr. H. Lieber, Professor am Friedrich-Wilhelm-Real-Gymnasium in Stettin, und F. von Lühmann, Professor am Gymnasium in Königsberg i. d. Neumark. Mit 6 Figuren im Text. Berlin 1893. Leonhard Simion.

Das Buch erteilt einige Kenntniss von der Trigonometrie, hinreichend um die leichtern Rechnungsaufgaben zu lösen; doch ist die Begrenzung des Gegebenen weder ausgesprochen noch ein Princip ersichtlich, nach dem sie sich richtet. So kommen zwar Winkel > 1 Rechter und negative Functionswerte vor, doch wird nur bezüglich auf diese Fälle das Nötige angegeben, das Allgemeine darüber und die Periodicität nicht als Gegenstand der Lehre betrachtet. Goniometrische Relationen fehlen nicht ganz, wol aber die Formeln für die Functionen der Summen von Winkeln. Soviel indes Aufnahme gefunden hat, ist correct, in guter Ordnung und leichtfasslich behandelt, so dass das Pensum wenigstens nicht grösser scheint, als

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Dr. Karl Rohn, Professor der Mathematik an der k. s. technischen Hochschule zu Dresden, und Dr. Erwin Papperitz, Professor der Mathematik und darstellenden Geometrie an der k. s. Berg-Akademie zu Freiberg. In zwei Bänden. Erster Band. Mit zahlreichen Figuren im Text. Leipzig 1893. Veit u Comp.

Die Bedeutung der darstellenden Geometrie kann man unter drei Gesichtspunkte stellen. Sie löst erstens ein geometrisches Problem, das sich wenn man will auch erweitern und verändern lässt. Zweitens ist sie ein Organ stereometrischer Forschung, durch welches innerhalb dreifacher Variation eine zweifache isolirt erscheint. Drittens dient sie als angewandte Geometrie technischem Zwecke. Im vorliegenden I. Bande waltet der zweite Gesichtspunkt vor. Es soll mittelst der Darstellung eine umfassende räumliche Anschauung gepflegt werden. Das Mittel der Darstellung ist die Projection. Die Projectionslehre ist in vortrefflicher Weise so bearbeitet, dass sie von Anfängern ohne Mühe verstanden wird: die höhere projective Geometrie wird nicht als bekannt vorausgesetzt, sondern die Projection von Ebene auf Ebene ganz ausführlich behandelt und dabei die grundlegenden Begriffe entwickelt, alle Lehren und Erklärungen jedoch concinn und ohne Umschweife, entsprechend dem Standpunkte vollendeter elementarer Vorbildung, ausgesprochen.

H.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie. Sechster Teil: Proportionalität der Strecken. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 378 Erklärungen und 90 in dem Text gedruckten Figuren. Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Dr. J. Sachs. Stuttgart 1893. Julius Maier.

Das Eigentümliche der Abfassung besteht darin, dass jeder Lehre eine Frage vorausgeht. Ueber deren Zweck lassen sich höchstens Vermutungen aufstellen. H.

Litterarischer Bericht

LII.

Lehrbücher.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von J. Schlotke, Lehrer der allgemeinen Gewerbeschule in Hamburg. — II. Teil. Schatten- und Beleuchtungslehre. Mit 79 Figuren. 1893. — III. Teil. Perspective. Mit 133 Figuren. 1894. — Dresden, Gerhard Kühtmann. 60 + 381 S.

Die Einleitung zur Schattenlehre hätte allen Grund gehabt hier exacte Rede zu führen, weil der allgemeine Wortgebrauch hier gerade nicht exact ist. Aber gerade hier lässt es der Verfasser am Nötigen fehlen. Die Nominalerklärungen sind unzureichend, „Schatten" und „Eigenschatten" werden gar nicht definirt, „Schlagschatten" etwas undeutlich. Anstatt der Confusion der Begriffe zu wehren, macht sich der Verfasser selbst derselben schuldig, sagt z. B. Seite 2, Zeile 2 Raum statt Flächenstück, Zeile 11 Schatten statt Schlagschatten.

Der 3. Teil behandelt die Projection räumlicher Gebilde aus endlich fernem Centrum und zwar hauptsächlich von Geraden und Ebenen begrenzter Körper, ausserdem auch Rotationskörper berücksichtigend. Die allgemeinen Grundsätze der Bearbeitung sind, darf man annehmen, aus dem 1. Teile zu erkennen. Nur soviel ist hier im Vorwort ausgesprochen, dass Versuche die mathematische Vor-

bildung entbehrlich zu machen, wie sie öfters aufgetreten sind, gänzlich verworfen werden müssen und sich als verfehlt erwiesen haben. Es werden Beispiele aus einer ohne Mathematik auf blosse Anschauung gebauten Belehrung angeführt. Die Verfasser scheinen stets vorauszusetzen, dass die Schüler freundlichst zuvorkommend die Worte nicht wie gesagt sind, sondern wie sie gemeint sind, zu verstehen suchen werden. Hoppe.

Elementarphysik unter Zugrundelegung des Grundrisses der Experimentalphysik von E. Jochmann und G. Hermes für den Anfangsunterricht in höheren Lehranstalten herausgegeben von V. Hermes. Mit 186 Holzschnitten. Berlin 1892. Winkelmann u. Söhne. 188 S.

Das Lehrbuch verfolgt nur das eine Ziel, die Gesetze der Erscheinungen in der leblosen, unorganischen Natur klar, unumwunden und exact darzulegen und leistet in dieser Beziehung vorzügliches. Die Wege der Entdeckung und Forschung durch Beobachtung, Experiment und Rechnung lässt es unberührt, auch die theoretische Begründung macht es sich nicht allgemein zur Aufgabe; was zu ganz einfacher Begründung der Lehren hinzugefügt ist, erreicht noch lange nicht die Grenzen elementarer Mathematik. Die Lehren werden auch nicht zu Systemen gestaltet, sondern in Gruppen der Erscheinungen geordnet und werden sich wol so am besten einprägen. H.

Lehrbuch der Physik für höhere Lehranstalten, sowie zur Einführung in das Studium der neueren Physik. Von Dr. H. Börner, Director des Realgymnasiums in Elberfeld. Mit 470 in den Text gedruckten Abbildungen. Berlin 1892. Weidmann. 584 S.

Das Buch stellt sich als ein pädagogischer Thesaurus dar, der den Lehrstoff des physikalischen Unterrichts im weitesten Umfang für eine Reihe von Classen zur Auswahl nach Ermessen des Lehrers fertig bearbeitet darbietet. Da auf sehr verschiedenen Standpunkt der Vorbildung, namentlich der mathematischen, gerechnet werden musste, so hat es der Verfasser für nötig befunden, das Lehrbuch in 2 Teile: erste und zweite Stufe, zu teilen. Mechanik, Akustik, Optik, Wärme, Elektricität und Magnetisismus werden im zweiten Teile aufs neue behandelt, doch betreffen die einzelnen Lehren nicht dieselben Gegenstände wie im ersten. Um auch dem Bedürfniss mehr als gewöhnlich begabter Schüler zu genügen, geht der 2. Teil

ziemlich weit auf Theorien ein, die eigentlich noch Gegenstand der Forschung sind. Was diese betrifft, hätte der Verfasser wenigstens nicht es bei Darstellungsweisen, wie er sie vielleicht in Originalschriften gefunden hat, belassen dürfen; in einem Lehrbuche für Schulen musste gründliche Aufklärung über die Begriffe gegeben werden. So sind z. B. Arbeit und lebendige Kraft der Erklärung zufolge ideelle Begriffe, die sich auf absolute Wegstrecken beziehen und auf relative Wegstrecken und Geschwindigkeiten, wie sie in Wirklichkeit allein existiren, gar nicht bezogen werden können. Dennoch gibt das Lehrbuch über diesem Punkt keinen Aufschluss. Bei Einführung des Begriffs der Entropie ist von Summen derselben die Rede, und sie kommt als positiv und negativ in Rechnung. Beides hat offenbar, so lange ihr keine Quantität zugeschrieben wird, keinen Sinn, und von ihrem Quantum steht kein Wort im Buche. Dies ist um so verwirrender, weil es zu dem Irrtum verleitet, das Quantum verwandelter Energie als Quantum der Entropie zu betrachten, was zu Widersprüchen führt. Hoppe.

Leitfaden für den Anschauungsunterricht in der Physik. Von Dr. Max Pieper, Oberlehrer am Herzoglichen Friedrichs-Gymnasium zu Dessau. Dessau 1891. Paul Baumann. 55 S.

Die Lehrweise ist die beschreibende. Ueberdies ist sie mehr darauf bedacht, auf Naturvorgänge aufmerksam zu machen und deren gebräuchliche Benennung mitzuteilen als auf den Zusammenhang der Vorgänge hinzuleiten. Dass man, selbst für den sehr niedrigen Standpunkt der Lernenden, wie ihn der Verfasser voraussetzt, sehr viel zu sagen hat um den Sinn für die Aufgabe der Physik zu wecken, ist leicht zu sehen. Es brauchte sich also auch dieser Leitfaden nicht auf die einzelnen mit Sinnen wahrnehmbaren Erscheinungen zu beschränken, vielmehr hätte es ihm in der Tat auch obgelegen, das Sichtbare durch das, was wir zur Erklärung annehmen müssen, zu einer ursachlich zusammhangenden Vorstellung zu ergänzen. Hoppe.

Sammlungen.

Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben, verbunden mit einem systematischen Aufbau der Begriffe, Formeln und Lehrsätze der Arithmetik für höhere Schulen. Von

Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Erstes Heft: Für mittlere Classen. Dritte Auflage. 1890. 224 S. — Zweites Heft: Für obere Classen. 1888. Zweite Auflage. — — 228 S.

Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra für Real- und Bürgerschulen. Ein Auszug aus der Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben. — — Erstes Heft 1892. — Zweites Heft 1893. — 194 S.

Resultate zur Sammlung von arithmetischen und algebraischen Aufgaben für höhere Schulen. Ausgewählte Resultate zu beiden Heften. Zweite Auflage 1892. — Von Dr. Hermann Schubert. — — Potsdam. August Stein. 77 S.

Dies in 5 Heften enthaltene Werk zeichnet sich dadurch aus, dass es die Einübung der Lehren der Arithmetik und Algebra, d. h. des numerischen und algebraischen Rechnens, in allen erdenklichen Formen zum Ziele nimmt. Der Umfang ist den höhern Unterrichtsanstalten angemessen. Die Uebungsbeispiele schliessen sich in grosser Anzahl dem Lehrgange an. Die Lehren selbst, Erklärungen, Sätze und Formeln ohne Beweise, gehen jedem Abschnitt voraus. Resultate sind im betreffenden Hefte nur von solchen Aufgaben aufgestellt, „bei welchen eine Beruhigung des Schülers über die Richtigkeit der gefundenen Lösung wünschenswert erscheint, bei welchen jedoch die Kenntniss des Resultats ihm die Denkbarkeit nicht abnimmt". Wünschenswert bleibt freilich immer, dass der Schüler sich die Beruhigung und Vergewisserung durch Probe selbst geben und sich von einer fremden Hülfe, die er im spätern Leben doch entbehren muss, unabhängig machen lerne. H.

Mathematisches Uebungsbuch. Erster Teil. Für den Gebrauch in den mittleren Classen höherer Lehranstalten (Untertertia bis Untersecunda). Zusammengestellt von Fr. Bussler, Professor am Sophien-Gymnasium zu Berlin. Dresden 1894. L. Ehlermann. 80 S.

Sammlung mathematischer Aufgaben. Ein Uebungsbuch für die oberen Classen höherer Lehranstalten. Zusammengestellt von Fr. Bussler, Professor am Sophien-Gymnasium zu Berlin. Dresden 1894. L. Ehlermann. 120 S.

Beide Sammlungen sind durchgehends nach den Gymnasialclassen eingeteilt, zu deren Pensen die Aufgaben gehören. Zu jeder Lehre gehören 4 Aufgaben. Die Aufgaben sind arithmetische (mit Buchstaben), Gleichungen, trigonometrische (mit Logarithmen), geome-

trische (Sätze und Constructionen). Bei den Sätzen, wo die Frage nicht dabei steht, darf man wol annehmen, dass der Beweis verlangt wird. H.

Arithmetische Aufgaben. Herausgegeben von Dr. H. Lieber, Professor am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium zu Stettin, und Dr. A. Köhler, Oberlehrer am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium zu Stettin. Berlin 1894. Leonhard Simion. 222 S.

Auflösungen zu den arithmetischen Aufgaben. Herausgegeben von Dr. H. Lieber, Professor am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium zu Stettin und Dr. A. Köhler, Oberlehrer am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium zu Stettin. Berlin 1894. Leonhard Simion. 79 S.

Die Aufgaben schliessen sich an den Leitfaden der Arithmetik von Lieber und Lühmann an und sind für die Classen Untertertia bis Obersecunda bestimmt. Es sind vorzüglich solche gewählt, die einfache Resultate ergeben. Die „Auflösungen" geben die Resultate aller Aufgaben ohne irgend welche Bemerkung. H.

Recueil de problèmes de mathematiques. Arithmétique, algèbre élémentaire, trigonométrie. A l'usage des classes de mathematiques élémentaires. Par C. A. Laisant, Docteur ès sciences, Ancien élève de l'École Polytechnique. Paris 1893. Gauthier Villars et fils. 86 S.

Das Vorliegende ist eine geordnete Sammlung der interessantesten Aufgaben, welche der Herausgeber in Zeitschriften aus den Jahren 1842 bis jetzt gefunden hat, nebst Angabe der Autoren und Verweisung auf die Lösungen, soweit sie bekannt sind, ohne Unterschied, ob die Aufgaben sich zum Gebrauch an Schulen eignen. H.

Geometrische Analysis und Synthesis. Eine Sammlung von 636 planimetrischen Constructions-Aufgaben mit rein geometrischer Lösung. Für höhere Lehranstalten sowie zum Gebrauch beim Selbstunterricht systematisch geordnet und bearbeitet von W. Adam, Königl. Seminarlehrer a. D. Zweite Auflage. Potsdam 1893. Aug. Stein. 219 S.

Die erste Auflage ist in 1. Reihe, 219. litt. Bericht S. 8 besprochen. Die 2te scheint unverändert zu sein. Insbesondere lassen

die einleitenden Erklärungen noch ebensowenig Geschick in verständlicher Rede erkennen. Sämtiche Aufgaben sind mit wenigstens angedeuteter Lösung nebst Beweis versehen, so dass der Schüler den Weg der Lösung nie zu suchen braucht. Hoppe.

Analytische Geometrie der Ebene. Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben nebst Erläuterungen und Resultaten. Von J. Schlotke, Lehrer der Allgemeinen Gewerbeschule in Hamburg. Mit 37 Figuren. Dresden 1891. Gerhard Kühtmann. 217 S.

Die Aufgaben, welche sich der Lehre von den Geraden, Kreisen und Kegelschnitten mit Gebrauch der Coordinaten anschliessen, sind im Buche ausführlich allgemein gelöst, und es bleibt für den Schüler nur die Arbeit übrig, numerisch gegebene Beispiele danach auszurechnen. H.

Lehrbuch der planimetrischen Constructionsaufgaben gelöst durch geometrische Analysis. Dritter Teil: Verwandlungs- und Teilungsaufgaben über ein- und umbeschriebene Figuren, Mit 519 gelösten und ungelösten Aufgaben, 40 Anmerkungen, 72 Erklärungen und 54 in den Text gedruckten Figuren. Für das Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet nach System Kleyer von E. R. Müller. Stuttgart 1893. Julius Maier. 86 S.

Die zu den genannten Gebieten gehörenden Aufgaben hat der Verfasser systematisch behandelt. Reihen von Anmerkungen geben die Gesichtspunkte der Anordnung. Zu jeder Aufgabe wird der Weg der Lösung nebst Verweisung auf die anzuwendenden frühern Aufgaben angezeigt. H.

Recueil d' exercices sur la mécanique rationnelle à l'usage des candidats à la licence et à l' agrégation des sciences mathématiques. Par A. de Saint-Germain, Professeur de Mécanique à la Faculté des Sciences de Caen. Deuxième édition, entièrement refondue. Paris 1889. Gauthier Villars et fils. 560 S.

Das Buch enthält eine sehr reiche Sammlung von Uebungsaufgaben aus der Statik, Kinematik und Dynamik, jede mit ausführlicher Lösung. Obgleich vor jedem Abschnitt die Theorie entwickelt wird, so bilden die Aufgaben den Zweck der Herausgabe. Der Verfasser spricht sich dahin aus, dass es bei der Lösung weniger auf ein formulirtes Resultat, als vielmehr darauf ankomme, dass die

Natur der Bewegung in allgemeinster Weise ans Licht gestellt sei, die öfters aus der Differentialgleichung besser als aus dem Integral erkennbar sei. H.

Tabellen.

Logarithmisch-trigonometrische Tafeln für neue (centesimale) Teilung mit sechs Decimalstellen. Von W. Jordan, Professor an der Kgl. techn. Hochschule zu Hannover. Stuttgart 1894. Konrad Wittwer. 420 S.

Mit Herausgabe dieses Werkes ist ein neuer Schritt zu dem ersehnten Ziele getan die 3 überflüssigen goniometrischen Benennungen, Grad, Minute, Secunde, abzuschaffen und dem Rechner die dadurch aufgebürdeten Reductionen zu ersparen. Laut Vorwort steht der „neuen" „centesimalen" Winkelteilung noch sehr der Mangel an ausreichenden trigonometrischen Tafeln entgegen. Die 7 stelligen sind vergriffen, nur 5 stellige sind zu haben. Der Verfasser enthüllt indes den Stand der Sache nur sehr oberflächlich. Nachdem schon solange Zeit das Ziel ins Auge gefasst und dann und wann ein Beitrag dafür geliefert worden ist, sind wir noch nicht einmal so weit, dass das Unternehmen überhaupt als gesichert erscheint. Alle, die daran arbeiten, treten noch so auf, als böten sie neben der gebräuchlichen Rechnungsweise eine zweite dar, die Manchen besser gefiele, und als käme es niemandem in den Sinn die alte Winkelteilung in Wegfall zu bringen. Wenn selbst diejenigen, in deren Interesse es liegt, die Annahme der Decimalteilung soweit als möglich auszubreiten, einen so traurigen Prospect eröffnen, wo Jeder, der Decimalteilung anwendet, für alle Zeit mit beiden Rechnungsweisen vertraut bleiben und für beide die nötigen Tafeln besitzen muss, so kann man sich nicht wundern, dass die Beteiligung von Seiten der Anwender und der Herausgeber bis jetzt so gering geblieben ist. Das Gesagte trifft auch das vorliegende Werk. Die Einrichtung lehnt sich an die alte Winkelteilung an, gleich als sollte letztere durchaus erhalten bleiben. Die dreifache Benennung, Grad, Minute, Secunde, die jetzt ganz überflüssig ist, wird, noch dazu mit störender Bedeutungsänderung, auf das neue System übertragen. Auf dem Titel steht: „Für neue (centesimale) Teilung" statt einfach zu sagen: „Für decimale Teilung des rechten Winkels." Uebereinstimmend nämlich ist zwischen beiden Systemen die oberste Benennung R — 1 rechten Winkel, unverrückbar als volles Intervall für alle Zahlenwerte aller Kreisfunctionen. Eine fernere Bestätigung

des obigen Urteils über die vorliegende Einrichtung bietet eine Reductionstafel zwischen der alten und neuen Tafel, am Schluss hinzugefügt. Wenn diese einen Zweck haben soll, so kann es doch nur im Dienste der alten Tafeln sein. Dass die gegenwätige Tafel die Logarithmen nur auf 6 Stellen gibt, (eine Zahl die rücksichtlich des Volumens im ganzen unvorteilhaft ist) mag durch die besondere Bestimmung für Landesvermesser motivirt erscheinen. Handelt es sich aber um Ueberwindung der Herrschaft eines unpraktischen Herkommens, so ist ein Stehenbleiben auf halbem Wege ganz unzweckmässig. Soll die Decimalteilung der Winkel in Aufnahme kommen, so dürfen die käuflichen trigonometrischen Tafeln in keiner Hinsicht, weder in Stellenzahl noch in Detaillirung, hinter den 7 stelligen von Vega-Bremiker zurückstehen. Von dieser Bedingung hängt nicht nur die freie Wahl der einzelnen Rechner, sondern auch die Möglichkeit der Einführung auf allen Lehranstalten, auch derer, die nur 5 stellig rechnen, ab. Denn wenn die Schüler im spätern Beruf genötigt wären Tafeln mit alter Teilung zu Hülfe zu nehmen, so müsste deren Gebrauch auch gelehrt werden. Wenn endlich ein Zweifel, ob Mühe und Kosten durch reichlichen Absatz ihren Lohn finden würden, die Unternehmer von der Herausgabe grösserer Tafeln zurückhielte, so wäre die Besorgniss ganz ohne Grund. Zunächst ist durch die mehr als 60 Auflagen der Veja'schen Tafeln die Häufigkeit des 7 stelligen Rechnens und das Bedürfniss 7 stelliger Tafeln überhaupt genügend dargetan. Der Umstand, dass die 7 stelligen trigonometrischen Tafeln mit Decimalteilung sämtlich vergriffen sind, spricht sehr dafür, dass, wenn nur solche vorhanden wären, es an deren Anwendung nicht fehlen würde. Ausserdem ist ersichtlich, dass Einschaltung von Zwischenstufen keine Erleichterung des Unternehmens im ganzen gewähren, sondern es nur weniger einträglich und mühevoller machen kann. Daher ist mit der gegenwärtigen Herausgabe von 6, vorläufig statt 7 stelligen Tafeln der eigene Vorteil gar nicht wol bedacht. Nur zu erwähnen ist noch der ganz nichtige Einwand, den man noch öfters hört: um die alte Winkelteilung entbehrlich zu machen, müssten erst alle darauf eingerichteten Instrumente und Apparate abgeändert werden. Die Scalen der Apparate sind meistens unabhängig von der Benutzung der Beobachtungsdaten gewählt, und niemand sieht in ihrer Reduction eine beträchtliche Mehrarbeit; jedenfalls ist letztere viel geringer als die beständige Reduction während jeder Rechnung. — In dem vorliegenden Werke geht der Tafel der Logarithmen der Kreisfunctionen die gleichfalls 6 stellige Tafel der Logarithmen der Zahlen voraus, sie selbst ist detaillirt bis auf die hundertel Rechte, ihr folgen noch vielstellige Tafeln für die Logarithmen gewisser besonders bedeutsamer Zahlen.

Mathematische und geodätische Hülfstafeln. Neunte Auflage. Herausgegeben von Dr. W. Jordan, Professor an der technischen Hochschule in Hannover. Hannover 1895, Helwing. 120 S.

Das Ganze ist eine Zusammenstellung von 34 kleinen Tafeln. Das Buch ist bereits durch seinen praktischen Gebrauch so bekannt, dass der Herausgeber nicht für nötig befunden hat, die Bedeutung der Tafeln zu erklären.

Tafel des Integrals

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

zusammengestellt von Bruno Kämpfe. Leipzig 1893. Wilhelm Engelmann.

Die Tafel ist 4 stellig, detaillirt auf 3 Bruchstellen von γ bis $\gamma = 1{,}5$, von da an auf 2. Für $\gamma > 2{,}86$ ist der Unterschied von $\Phi(\infty) = 1$ in 4ter Stelle nicht mehr merklich. Das Ganze steht auf wenig mehr als 3 Seiten 8°. — Die Werte sind aus Meyer's „Wahrscheinlichkeitsrechnung" entnommen und daselbst bis $\gamma = 1{,}51$ durch Interpolation unter Benutzung der 2ten Differenzen erhalten worden. H.

Berechnung von Renten und Lebens-Versicherungen. An der Hand von Beispielen erläutert von Jos. Thannabaur, k. k. Ober-Real-Professor in Olmütz. Wien, 1893. Karl Graeser. 132 S.

Zinseszinsen- und Rententafeln. Ein Hilfsmittel zur Berechnung des Bar- und Endwertes von Capitalien und Renten oder Annuitäten, der Höhe der letzteren bei gegebenem Bar- oder Endwert, sowie zur Berechnung des Zinsfusses oder der Zeit. Zum praktischen Gebrauch für Sparcassen-, Bank-, Assecuranz-, Forst-Beamte etc., sowie zum Schulgebrauch für Bürgerschulen, gewerbliche Fortbildungs- und Gremial-Handelsschulen. Berechnet und durch zahlreiche Beispiele erläutert von Jos. Thannabaur, k. k. OberRealschul-Professor. Wien 1893. Karl Graeser. 80 S.

Auf ersteres Buch, welches die vielen Arten von Renten und Versicherungen erklärt, müssen wir verweisen, wenn es sich um Bedeutung und Gebrauch der 4 im erstern und der 12 im letztern enthaltenen Tafeln handelt. Sämtliche Tafeln sind 7 stellig.

H.

Erd- und Himmelskunde.

Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie für den Unterricht bearbeitet von Dr. Siegmund Günther, Professor der technischen Hochschule München. Dritte, durchaus umgearbeitete und revidierte Auflage. München 1893. Theodor Ackermann. 131 S.

Die 2. Auflage ist im 13. litt. Bericht, S. 22 besprochen. Die dritte erscheint mit vielen eingehenden Verbesserungen. Die 3 Stufen der Weltanschauung, nach denen die Entwickelung der Lehre fortschreitet, sind deutlich geschieden. Die Lehre auf erster, dem festen Horizont entsprechender Stufe enthält noch nichts von Geographie. Die Himmelserscheinungen werden einzeln durchgegangen und formulirte Lehrsätze darüber aufgestellt. Ob diese zu einer guten Orientirung hinreichend sind, scheint wenig bedacht zu sein. Da sich sehr wol einfache Gesichtspunkte geben lassen, nach denen man sich ohne höhere Kenntnisse eine Anschauung von der Bewegung des Sonnensystems bilden kann, und gemäss der im Vorwort ausgesprochenen Bestimmung des Buches gerade dieses besonders erstrebt werden musste, so kann man von der gegenwärtigen Bearbeitung gewiss nicht sagen, dass sie das Erreichbare schon erreicht habe. Der zweite Teil der Lehre, der auf geometrischem Grunde steht, die Erde aber anfangs consequent als Kugel betrachtet, geht geometrisch zuwerke, nimmt mehr und mehr die Präcisionsfragen auf und umfasst auch geodätische Aufgaben. Der dritte Teil, auf heliocentrischem Standpunkte, ist so ausführlich, als man es bei elementarer Darstellung nur wünschen kann. Ueber die Ursachen von Flut und Ebbe hat sich der Verfasser noch keine Klarheit verschafft. Was er sagt, ist sinnlos. Da der Entwickelungsgang der Lehre mit der Geschichte der Forschung nahe übereinstimmt, so war es ganz zweckmässig alle zugehörigen historischen Angaben zu machen, was auch in anerkennenswerter Weise geschehen ist.

Hoppe.

Elementare Rechnungen aus der mathematischen Geographie für Freunde der Astronomie in ausgewählten Capiteln gemeinverständlich begründet und vorgeführt von O. Weidefeld, Oberrossarzt a. D., Mitglied der Vereinigung von Freunden der Astronomie und kosmischen Physik. Mit einer Figurentafel. Berlin 1894, Ferd. Dümmler. 64 S.

Als notwendige Vorkenntnisse werden betrachtet die Lehren von den trigonometrischen Functionen und von den brigg'schen

Logarithmen; dieselben werden im voraus vorgetragen. Der Umfang des Lehrstoffs ist gering: es handelt sich um Bestimmung des Laufes der Sonne in Bogen, Azimut und Höhe; die Genauigkeit wird nach Möglichkeit streng genommen. Die Lehrweise zeichnet sich durch klare, correcte Sprache aus. H.

Der Erdmagnetismus nach seiner Ursache, sowie nach seiner Bedeutung für die Wetterprognose erläutert von Dr. B. Saubert. Mit 8 Tafeln und 1 Figur im Text. Hannover 1895. Helwing. 44 S.

Die Schrift erweckt Hoffnung, mit Hülfe erdmagnetischer Beobachtungen uns der Erkenntniss der atmosphärischen Vorgänge nähern zu lernen. Die Möglichkeit gründet sich darauf, dass die erdmagnetischen Erscheinungen teils von constanten Kräften des Erdkörpers teils von veränderlichen äussern Wärmezuständen abhangen. Das Gegenwärtige macht zur Anbahnung der Untersuchung durch Vergleichung der Declinations-, Inclinations-, Intensitäts- und thermischen Curven auf Beziehungen aufmerksam, die auf gesetzmässigen Zusammenhang hinzudeuten scheinen. H.

Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten. Von J. H. Lambert (1772) Herausgegeben von A Wangerin. Mit 21 Textfiguren. Leipzig 1894. Wilhelm Engelmann. 95 S.

Die Schrift gehört zu „Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften" als Nr. 54. Sie bespricht die grosse Anzahl in Anwendung gekommener Projectionsweisen nach ihren bevorzugten Zwecken. Der Herausgeber fügt am Schlusse die Erklärung der stereographischen und Mercator'schen Projectionen bei. H.

Ueber Kartenprojektion. Abhandlungen von Lagrange (1779) und Gauss (1822). Herausgegeben von A. Wangerin. Mit 2 Textfiguren. Leipzig 1894. Wilhelm Engelmann. 101 S.

Die Schrift bildet Nr. 55. in Ostwald's Kl. d. ex. W. Sie enthält zuerst 2 zusammengehörige Abhandlungen von Lagrange, in denen die Aufgabe der conformen Abbildung der Rotationsflächen behandelt und auf die Erde angewandt wird Dann folgt die Bearbeitung der Aufgabe der königl. Gesellschaft der Wissenschaften von Gauss betreffend die Abbildung der Flächen nach Aehnlichkeit der kleinsten Teile. H.

Astronomischer Kalender für 1895. Berechnet für den Meridian und die Polhöhe von Wien (16° 20′ 22″,3 = 1ʰ 5ᵐ 21ˢ,9 östliche Länge von Greenwich, 48° 13′ 55″,4 nördliche Breite). Herausgegeben von der k. k. Sternwarte. Der ganzen Reihe 57. Jahrgang, der neuen Folge 14. Jahrgang. Wien, Carl Gerold's Sohn. 162 S.

Die Beilagen geben folgende Verzeichnisse: Grosse Fixsterne, veränderliche Sterne, Nebelflecken und Sternhaufen, Bahnelemente der grossen Planeten (Saturnsringe), der Satelliten, Asteroiden, ihre Bahnelemente, periodische Kometen, geographische Positionen, Elemente des Erdmagnetismus in Oesterreich, normale fünftägige Temperaturmittel, Jupiter und seine Monde, neue Planeten und Kometen.

H.

Annuaire pour l'an 1895, publié par le bureau des longitudes. Avec des notices scientifiques. Prix: 1 fr. 50 cᵐ. Paris, Gauthier-Villars et fils. 825 S.

Comme tous les ans à pareille époque l' *Annuaire du Bureau des Longitudes* vient de paraitre. L'Annuaire pour 1895 renferme une foule de renseignements pratiques réunis dans ce petit volume pour la commodité des travailleurs. On y trouve également des articles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin les Notices suivantes: *Les Ondes atmosphériques lunaires;* par M. Bouquet de la Grye. — *Sur le Congrès géodésique d'Inspruck;* par M. E. Tisserand. — *L'observatoire du mont Blanc;* par M. J. Janssen. — *La Photométrie photographie;* par M. J. Janssen. — *Rapport sur les propositions d'unification des jours astronomique et civil;* par M. H. Poincaré. In-18 de IV-1826 pages, avec 2 Cartes magnétiques.

Gauthier-Villars et fils.

Fig. 2.

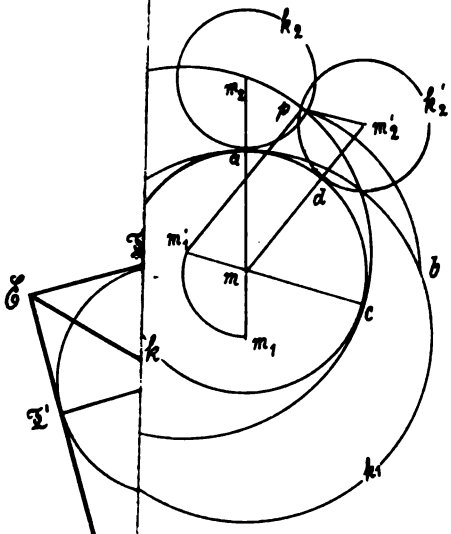


Fig. 1.

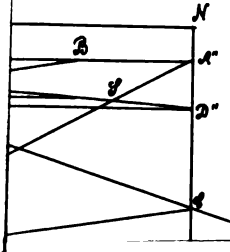


Fig. 1.

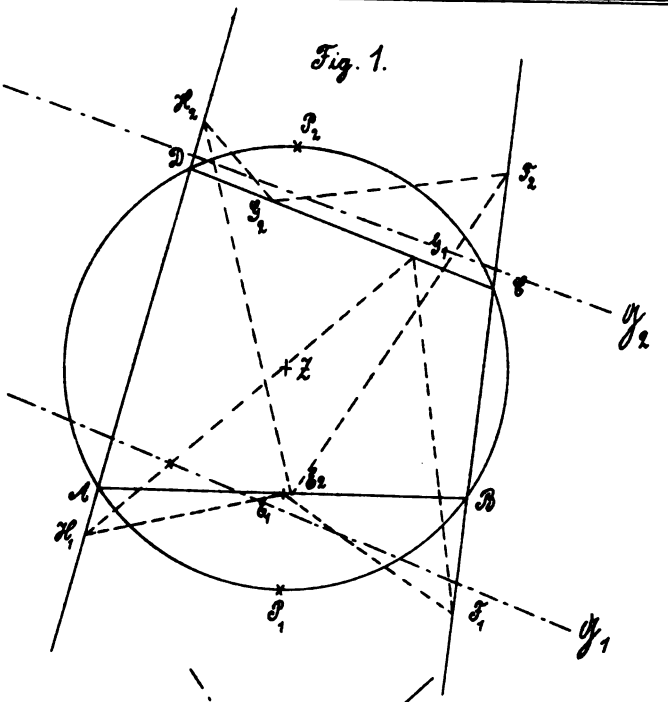
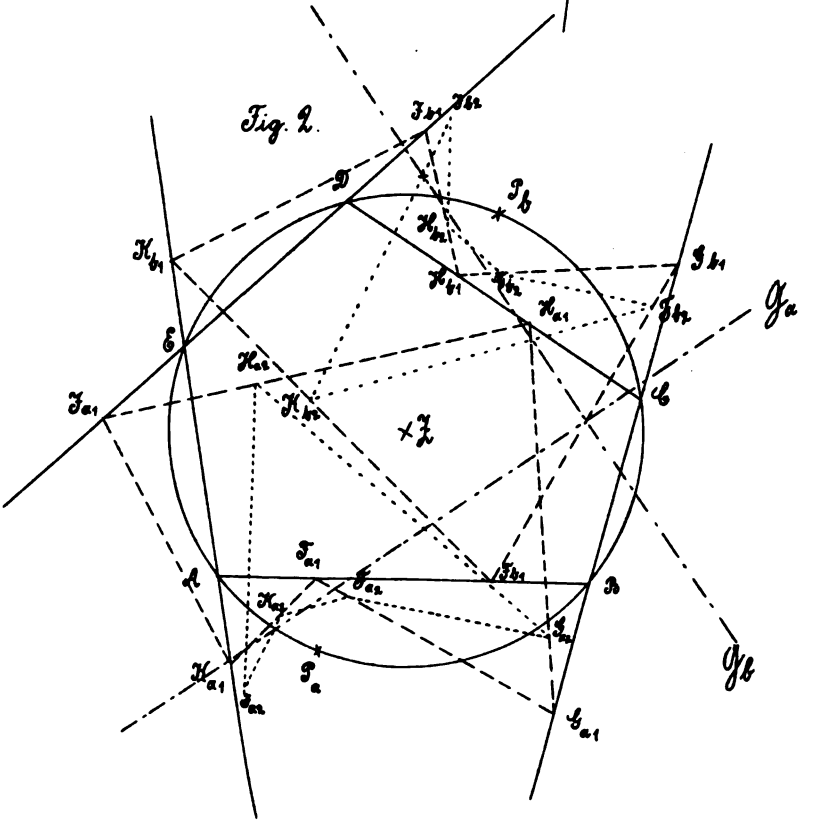
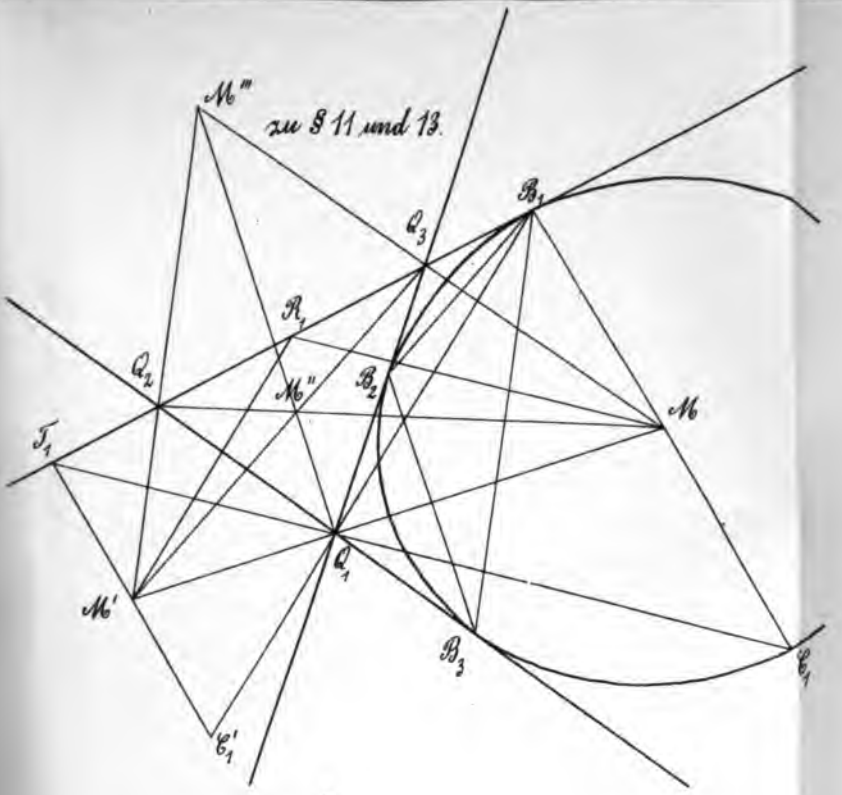
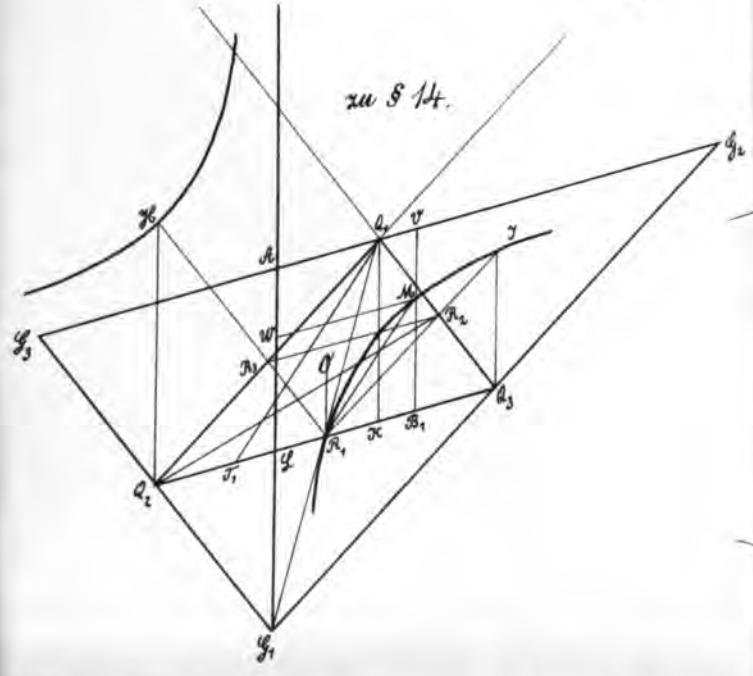

H_2
P_2
D
F_2
G_2
G_1
C
g_2
Z
E_2
A
B
E_1
H_1
P_1
F_1
g_1

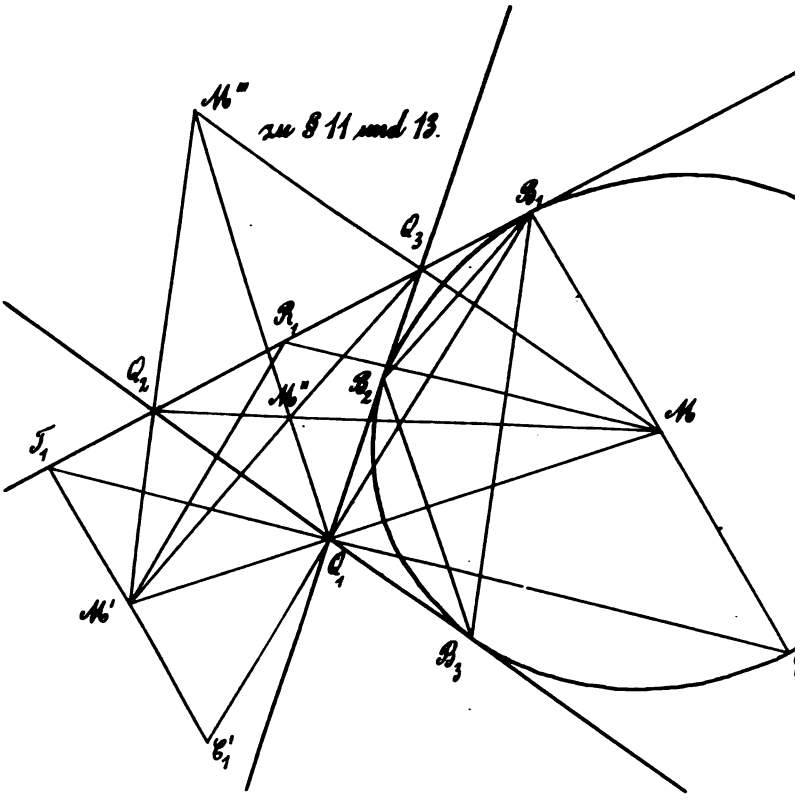
Fig. 2.

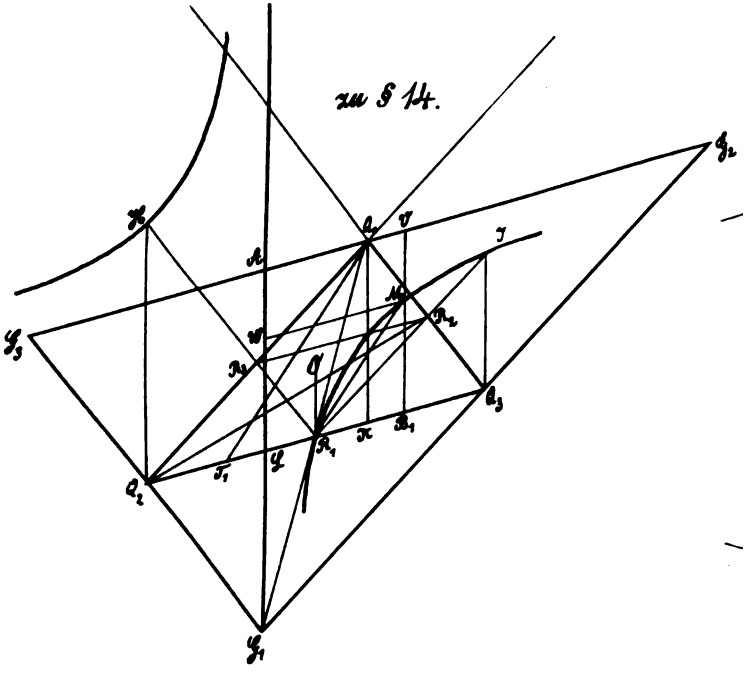

F_{b1}
F_{b2}
D
P_b
H_{b2}
K_{b1}
G_{b1}
H_{b1}
G_{b2}
H_{a1}
F_{b2}
g_a
E
H_{a2}
F_{a1}
K_{b2}
C
Z
F_{a1}
F_{a2}
F_{b1}
A
B
K_{a2}
G_{a2}
K_{a1}
P_a
F_{a2}
G_{a1}
g_b


zu § 11 und 13.
M'''
B1
Q3
R1
Q2
M''
B2
M
T1
Q1
M'
B3
C1
C'1


zu § 14.
G2
H
Q1
v
J
A
M
R2
G3
w
R3
O
Q3
R1
x
B1
T1
L
Q2
G1

Teil XIII.


zu § 11 und 13.
M'''
B1
Q3
R1
Q2
M''
B2
M
T1
Q1
M'
B3
C'1


zu § 14.
G2
H
Q1
V
J
A
M
R2
G3
W
R3
O
Q3
R1
X
B1
T1
L
Q2
G1

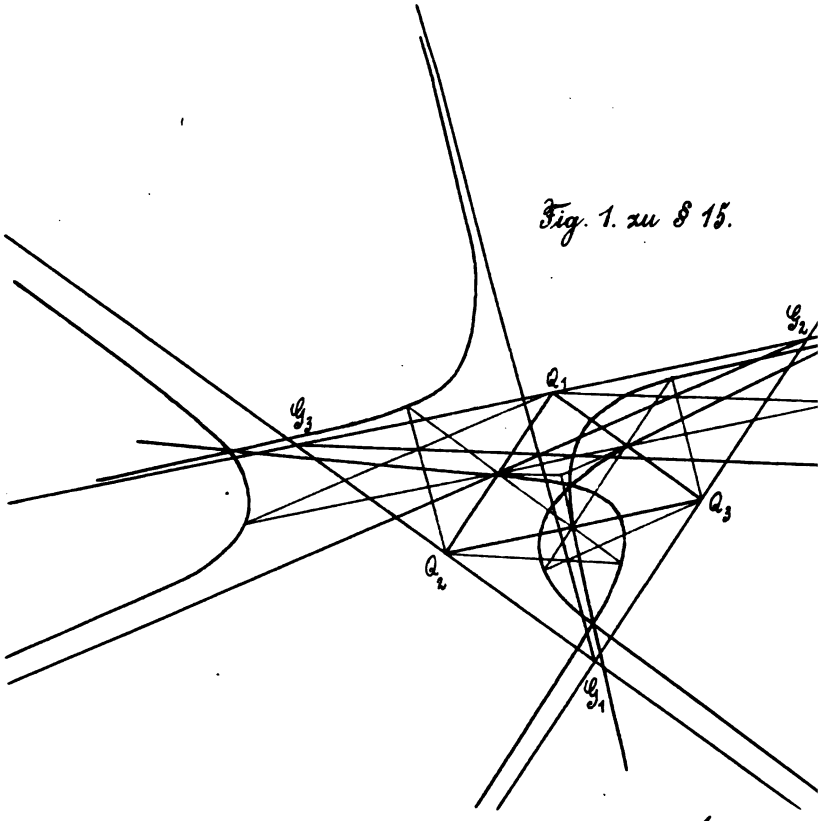


Fig. 1. zu § 15.

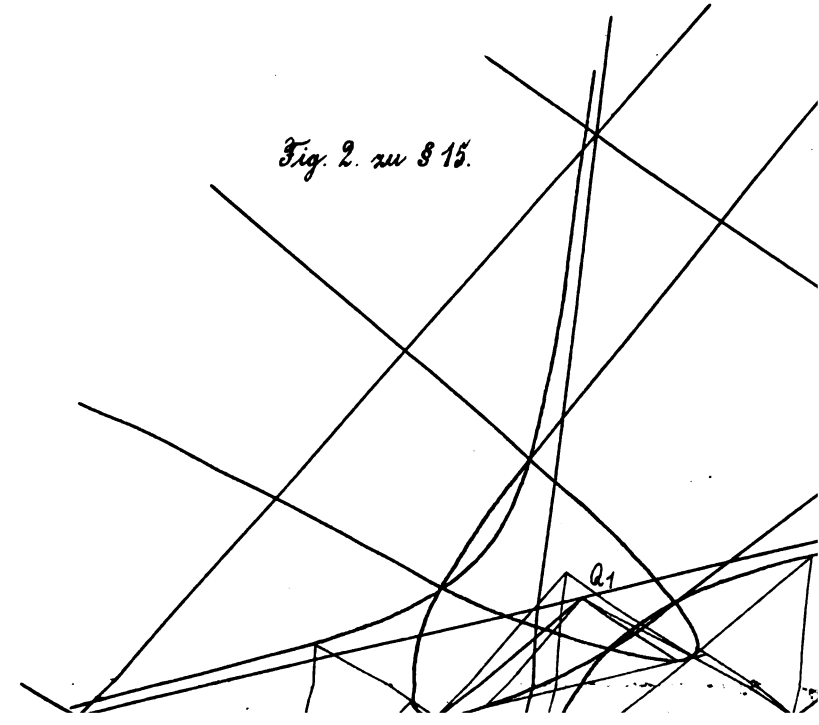
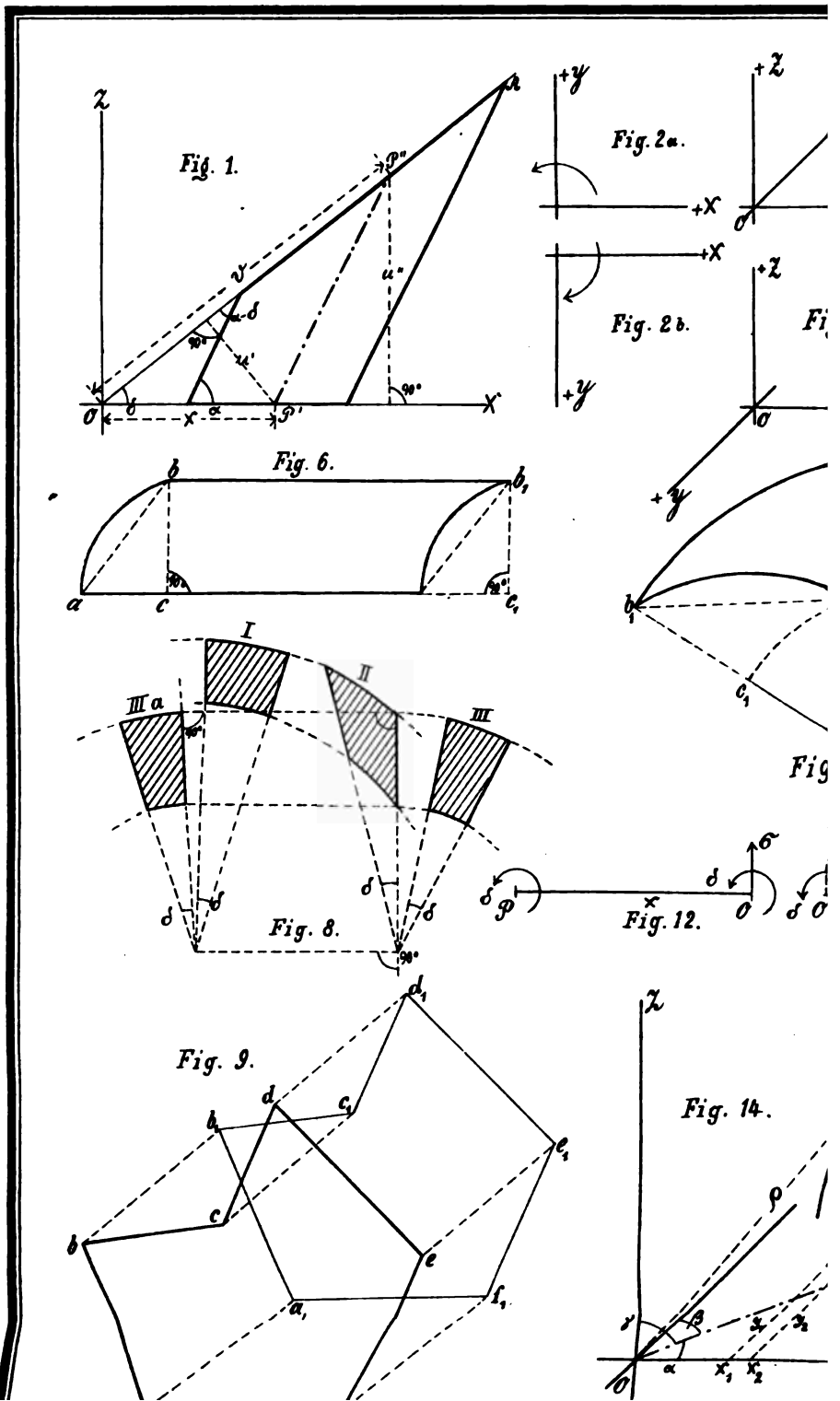
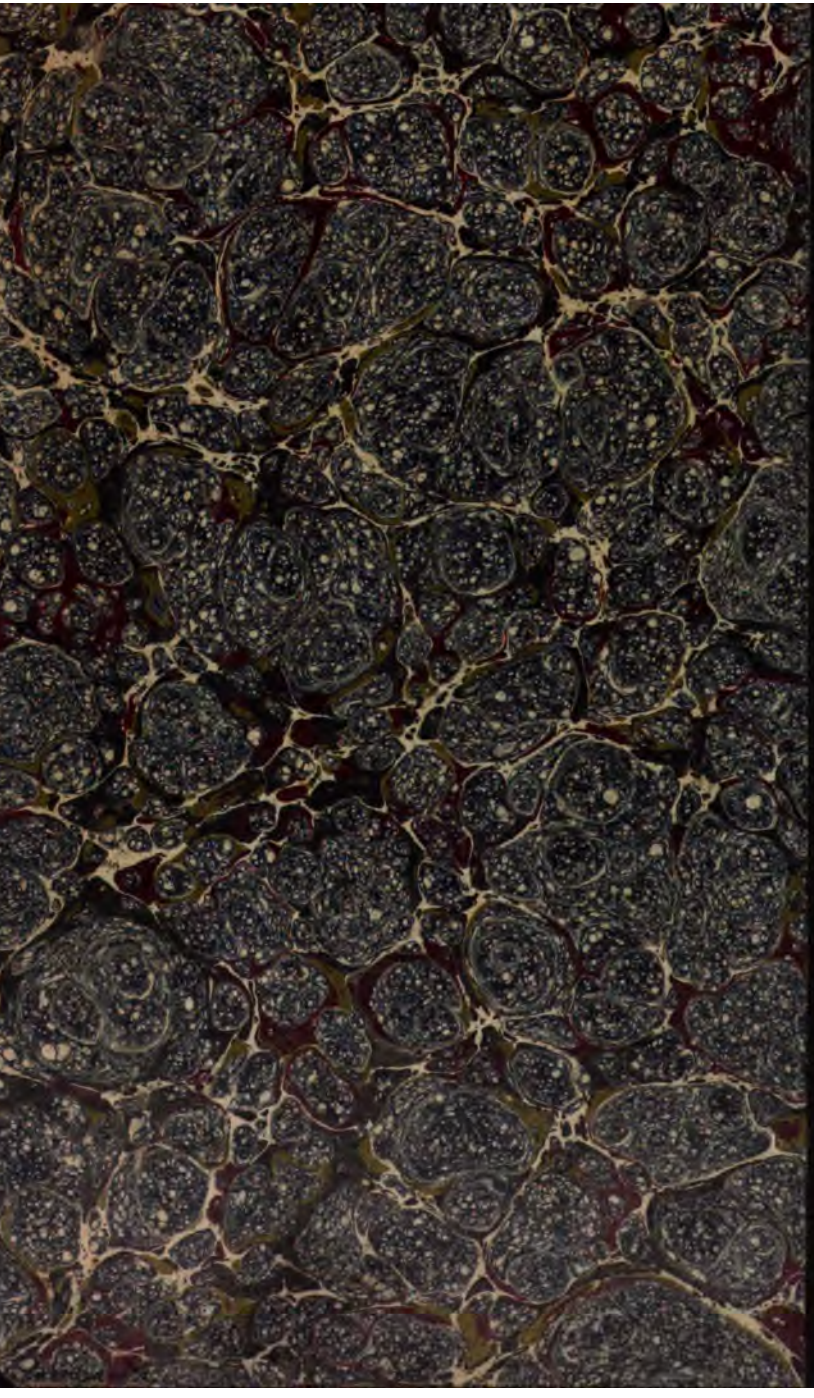


Fig. 2. zu § 15.

Teil XIII.



To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

510.5
A673
V. 13

STORAGE AREA